Rem : (i) $N(\vec{0}) = N(0.\vec{0}) = |0|\,N(\vec{0}) = 0$.

"semi-norme" : seulement les axiomes (i) et (ii).

Notation fréquente : $\|x\|_N = N(x)$

$\|x\| = N(x)$.

Définition : N norme $\rightsquigarrow$ distance d.

$d(x,y) = N(y-x) = \|y-x\|_N$.

d distance.

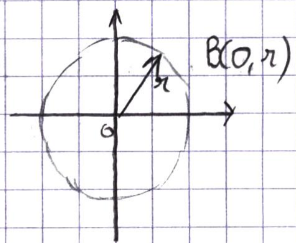
Vérifions par exemple l'inégalité triangulaire.

$\forall x,y,z \in E$

$$\begin{aligned} d(x,z) &= N(z-x) \\ &= N((y-x)+(z-y)) \\ &\leq N(y-x) + N(z-y) \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Exemples : $E = \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad x = (x_1, x_2)$

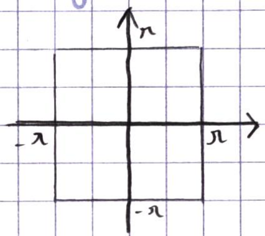
- Norme euclidienne : $N(x) = \sqrt{x^2+y^2}$



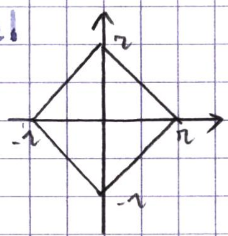
(inégalité triangulaire résulte de Cauchy-Schwarz).

- $N'(x) = \max(|x_1|, |x_2|) \rightsquigarrow d'$

$x \in B(0,r) \iff \begin{cases} |x_1| < r \\ |x_2| < r \end{cases}$



- $N''(x) = |x_1| + |x_2|$



1. Norme de la convergence uniforme.

A ensemble quelconque.

$E = \mathrm{Appl}(A \to \mathbb{K}) \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$f \in E \quad f : A \to \mathbb{K}$ fonction (définie partout sur A).

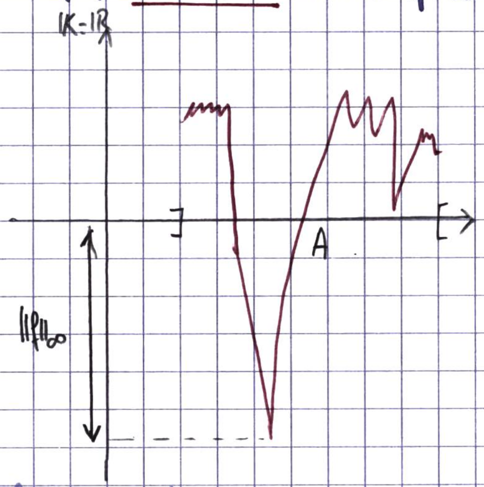
E est un $\mathbb{K}$ e.v. $\begin{cases} f+g : x \mapsto f(x) + g(x) \\ \lambda.f : x \mapsto \lambda \times f(x) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{K}. \end{cases}$

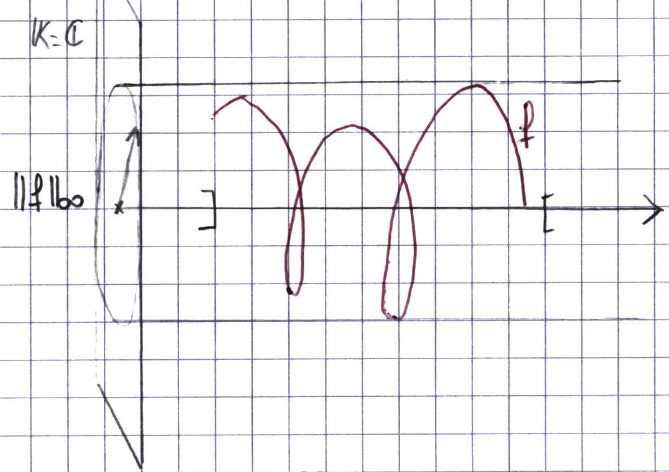
Définition : (i) $E_\infty = \{$applications bornées $A \to \mathbb{K}\}$.

$f \in E_\infty \iff \exists M \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in A, \ |f(x)| \leq M$.

E_∞ est un s.e.v de E.

(ii) "Norme ∞" notée $\|f\|_\infty \underset{\text{déf}}{=} \sup\{|f(x)| ; x \in A\} \in \mathbb{R}^+$ si $f \in E_\infty$.





vérification : $f \longmapsto \|f\|_\infty$ est bien une norme sur $E_\infty \underset{\text{notation}}{=} \ell^\infty(A, \mathbb{K})$

$M = \|f\|_\infty$ plus petit majorant $M \geq |f(x)| \ \forall x \in A$.

- $f, g \in E_\infty$ $\quad |f(x)| \leq M$ où $M = \|f\|_\infty$

$\quad |g(x)| \leq M'$ où $M' = \|g\|_\infty \quad \forall x \in A$

$\forall x \in A, \ |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + M'$

donc $\|f+g\|_\infty \leq M + M'$ qui est un majorant

$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- $\|\lambda f\| = \sup\{|\lambda f(x)|, x \in A\}$

$= \sup\{|\lambda| \, |f(x)|, x \in A\}$

dilatation dans le rapport $|\lambda|$.

$= |\lambda| \, \|f\|_\infty$. (*)

(*) $M = \|f\|_\infty$: $\begin{cases} \forall x \in A \ |f(x)| \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \ M - \varepsilon \leq |f(x)| \leq M \end{cases}$

$\times |\lambda| \ \begin{cases} \cdot \forall x \in A \ |\lambda f(x)| \leq |\lambda| M \\ \cdot \forall \varepsilon > 0 \ |\lambda| M - \varepsilon |\lambda| \leq |\lambda f(x)| \leq |\lambda| M \end{cases}$

$\lambda = 0 \quad \|\lambda f\|_\infty = 0$

$\lambda \neq 0 \quad \varepsilon \longrightarrow \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$

On a bien $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| M = |\lambda| \, \|f\|_\infty$.

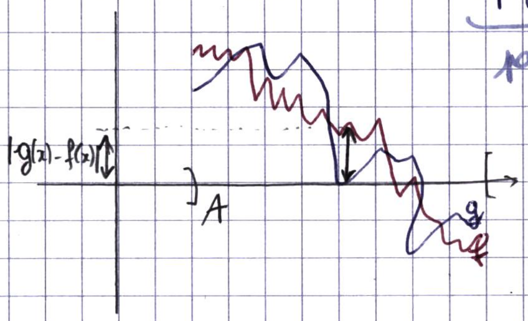
- $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ évident.

Définition : Distance d_∞.

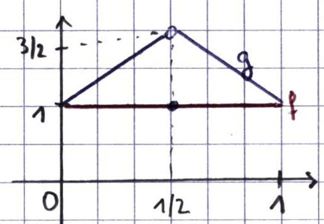
$f, g \in E_\infty$

$d_\infty(f,g) \underset{\text{déf}}{=} \|g-f\|_\infty = \sup_{x\in A} |g(x)-f(x)|$.

$= \sup \underbrace{\{|g(x)-f(x)|, x\in A\}}_{\text{partie bornée de } \mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}^+$.



$\|g-f\|_\infty$ est le sup de tous les écarts.
$|g(x)-f(x)|$ n'est pas forcément atteint.



$A = [0;1]$

$f(x) = 1$

$g : \begin{cases} g(\frac{1}{2}) = 1 \\ g(x) = \min(1+x, 2-x) \text{ si } x \in [0;1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}$

$\|g-f\|_\infty = \frac{1}{2}$ est un sup non atteint.

Rem : Si $A = [a,b]$ intervalle fermé borné et si f, g continues, le sup est atteint.

Rem : . Si A ensemble fini, $\ell^\infty(A, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^A$

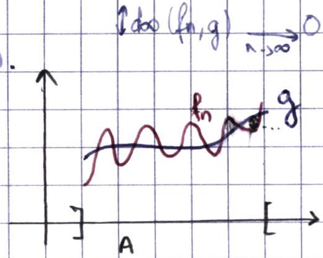
$A \longleftrightarrow$ valeurs $\{f(x_i)\}_{1\leq i\leq n}$

$A = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$\dim_{\mathbb{K}} \ell^\infty(A, \mathbb{K}) = \text{card}(A) = n$.

. Si A infini, $\dim_{\mathbb{K}} \ell^\infty(A, \mathbb{K}) = +\infty$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $E_\infty = \ell^\infty(A, \mathbb{K})$.



Définition : (f_n) converge vers g dans E_∞ $\underset{\text{déf}}{\iff}$ $d_\infty(f_n, g) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ n \geq N \Rightarrow d_\infty(f_n, g) \leq \varepsilon$.

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ n \geq N \Rightarrow \forall x \in A, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

On dit que (f_n) converge uniformément vers g.

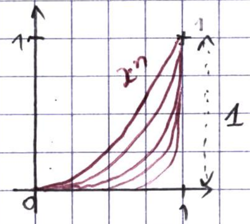
Définition : Convergence simple :

Par définition $(f_n) \longrightarrow g$ converge simplement si $\forall x \in A\ \lim_{n\to\infty} f(x) = g(x)$.

$$\boxed{\text{Proposition : convergence uniforme} \Rightarrow \text{convergence simple.}}$$

Exemple : $A = [0;1[$.

$f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.



- convergence simple.

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \forall x \in [0;1[$

$(f_n) \longrightarrow g = 0$ CV simplement

$\|g - f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1$.

$(f_n) \longrightarrow g$ avec convergence simple mais pas uniforme.

Théorème : $\ell^\infty(A, \mathbb{K})$ est un espace complet.

Toute suite de Cauchy (f_n) dans $\ell^\infty(A,\mathbb{K})$ est convergente.