il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = S$ puisque f est une bijection.

- si $x_0 \in f(x_0) = S \Rightarrow x_0 \notin f(x_0)$ par déf de S.
- si $x_0 \notin f(x_0) \Rightarrow x_0 \in S = f(x_0)$.

Contradiction, donc f ne peut pas exister. ■

Théorème : $\text{card } \mathbb{R} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\text{card } \mathbb{N}} > \text{card } \mathbb{N}$.

Démonstration :

A démontrer : $\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$= \text{card}(\text{Appl}(\mathbb{N} \to \{0;1\})).$$

$\text{Appl}(\mathbb{N} \to \{0;1\}) = \{\text{suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \; ; \; u_n = 0 \text{ ou } 1\}$.

- $\text{Appl}(\mathbb{N} \to \{0;1\}) \xhookrightarrow{\text{inj}} \mathbb{R}$.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 3^{-n-1}$$

$$= 0, \underset{\frac{1}{3}}{u_0} \underset{\frac{1}{3^2}}{u_1} \underset{\frac{1}{3^3}}{u_2} u_3 \ldots \text{ développement en base 3.}$$

c'est un développement propre.

$\Rightarrow \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \text{card}(\mathbb{R})$.

- $\text{Appl}(\mathbb{N} \to \{0;1\}) \longrightarrow [0;1]$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n 2^{-n-1} = 0, u_0 u_1 \ldots u_n \ldots$$

Tout $x \in [0;1]$ admet une progression binaire de ce type.

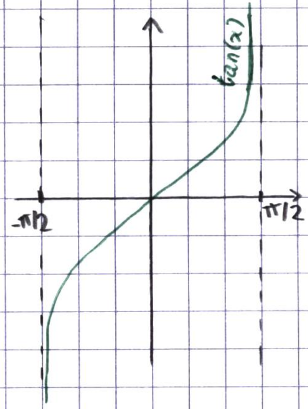
$1 = 0,11111\ldots$ (partie pleine $\mathbb{N}$).

$\text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) \geq \text{card } [0;1] \geq \text{card }]0;1[$.

- $\text{card }]0;1[= \text{card } \mathbb{R}$.

$\tan :]-\pi/2 ; \pi/2[\xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan(x)$.



$f :]0;1[\xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.

$\text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) \geq \text{card } [0;1] \geq \text{card }]0;1[= \text{card } \mathbb{R}$.

- Cantor-Bernstein $\Rightarrow \text{card } \mathbb{R} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) > \text{card } \mathbb{N}$. ■

Notation : $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$ "aleph 0".

$\aleph_1 =$ plus petit cardinal $> \aleph_0$ (il existe !).

$\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N}) < \aleph_1 \leqslant \text{card}(\mathbb{R})$.

$\aleph_1 \overset{?}{=} \text{card}(\mathbb{R})$ indécidable ! (Paul Cohen 1963).

3. Ensembles dénombrables.

Définition : Un ensemble E est dit dénombrable si $\text{card}\, E \leqslant \text{card}\, \mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow \exists\, \mathbb{N} \xrightarrow[s]{\text{surj}} E$$

$$\Leftrightarrow \exists\, E \overset{\text{inj}}{\underset{j}{\hookrightarrow}} \mathbb{N}.$$

Si $j : E \to \mathbb{N}$ injective, alors j induit une bijection $E \xrightarrow{\text{bij}} j(E) \subset \mathbb{N}$.

$j(E)$. ou bien fini et alors E fini.

. ou bien infini $j(E) = \{k_0 < k_1 < \dots < k_n < \dots\}$.

À ce moment là $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} j(E)$.

$n \longmapsto k_n$.

Ensembles dénombrables.

. ensembles finis $\text{card}(E) = p \in \mathbb{N}$

. tout ensemble infini est en bijection avec $\mathbb{N}$ $\text{card}\, E = \text{card}\, \mathbb{N}$.

$\text{card}\, E$ fini $\Leftrightarrow \text{card}\, E < \text{card}\, \mathbb{N} = \aleph_0$ plus petit cardinal infini.

Propriété : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : $\text{card}\, \mathbb{R} > \text{card}\, \mathbb{N}$.

Autre démonstration :

si $\text{card}\, \mathbb{R} \leqslant \text{card}\, \mathbb{N}$, $\exists\, j : \mathbb{R} \overset{\text{inj}}{\hookrightarrow} \mathbb{N}$.

$[0;1[\hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{N}$ inj $\Leftrightarrow \exists\, \mathbb{N} \xrightarrow[\text{surj}]{s} [0;1[$.

On pourrait numéroter les éléments de $[0;1[$ en une suite.

$x_0 = 0, a_{01} a_{02} \dots a_{0p} \dots$ en base 10.

$x_1 = 0, a_{11} a_{12} \dots a_{1p} \dots$

$\vdots$

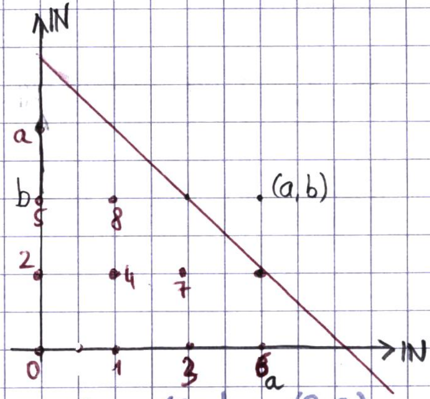
$x_n = 0, a_{n1} a_{n2} \dots a_{np} \dots$ avec $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = [0;1[$.

Prenons $y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_p \dots \in [0;1[$.

$b_1 \neq 0, 9, a_{11}$ 7 choix possibles.
$b_2 \neq 0, 9, a_{22}$
$\vdots$
$b_p \neq 0, 9, a_{p,p}$
$\vdots$
$y \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contradiction. $\blacksquare$

Rem: "La dénombrabilité est une notion élastique".

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad$ $\text{card}\,\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \text{card}\,\mathbb{N} \times \text{card}\,\mathbb{N}$.



ex : $7 \longmapsto (a_7, b_7) = (3;2)$

Proposition 1: $\text{card}\,\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \text{card}\,\mathbb{N}$.

$\exists$ bijection $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$n \longmapsto (a_n, b_n)$

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad$ $n = \prod_{p \text{ premier}} p^{a_p}$ $\quad$ $a_p \in \mathbb{N}$.

bijection $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{bij} \mathbb{N}^*$

$(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$
suites presques nulles.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}^*$
$(a,b) \longmapsto 2^a 3^b$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}^*$
$(a,b,c) \longmapsto 2^a 3^b 5^c$

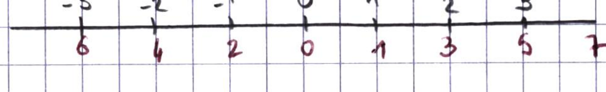
Proposition 2: $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

$\text{card}\,\mathbb{Q} = \text{card}\,\mathbb{N} < \text{card}\,\mathbb{R}$

Démonstration :

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc $\text{card}\,\mathbb{Q} \geq \text{card}\,\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$.

$s : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \xrightarrow{surj} \mathbb{Q}$
$(a,b) \longmapsto x = \frac{a}{b}$.



$\text{card}\,\mathbb{Q} \leq \text{card}\,\mathbb{Z} \times \text{card}\,\mathbb{N}^* = \text{card}\,\mathbb{N} \times \text{card}\,\mathbb{N}$
$= \text{card}\,(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$
$= \text{card}\,\mathbb{N}$. $\blacksquare$

Proposition 3: $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ famille d'ensembles dénombrables $\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ dénombrable.

Démonstration :

$\exists\ s_i : \mathbb{N} \longrightarrow E_i$ surjection.
$n \longmapsto s_i(n)$

$\Rightarrow\ S : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\text{surj}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$

$(i, n) \longmapsto s_i(n).$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\text{surj}"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "S"] & \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Proposition 4: $E_1, \dots, E_n$ ensembles dénombrables $\Rightarrow E_1\times\dots\times E_n$ est dénombrable.

$\mathbb{N} \xrightarrow{s_i} E_i$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\text{bij}", "\varphi"'] \arrow[rr, bend right, "\text{surj}"'] & \mathbb{N}^n \arrow[r, "{(s_1,\dots,s_n)}", "\text{surj}"'] & E_1\times\dots\times E_n. \end{tikzcd}$$

Attention : $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ produit infini d'ensembles même finis n'est en général pas dénombrable.

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(u_0, u_1, \dots, u_n), u_n = 0, 1\}$

$\text{card}\,\{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\text{card}\,\mathbb{N}} = \text{card}\,\mathbb{R} > \text{card}\,\mathbb{N}.$

en fait $(\text{card}\,\mathbb{N})^{\text{card}\,\mathbb{N}} = 2^{\text{card}\,\mathbb{N}} = \text{card}\,\mathbb{R}$ "continu".

(exercice).