ESPACES NORMÉS ET ESPACES MÉTRIQUES.

I. Notion de distance et d'espace métrique.

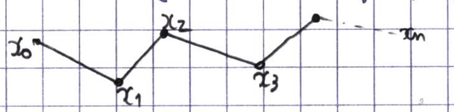
Définition : Soit X un ensemble. On appelle <u>distance sur X</u> une application
$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) \in \mathbb{R}_+ .$$

telle que : (1) Axiome de séparation : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ dans X.

(2) Axiome de symétrie : $\forall x,y \in X \quad d(y,x) = d(x,y)$.

(3) Inégalité triangulaire : $\forall x,y,z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(3) $\Leftrightarrow$ (3') $\quad \forall x_0, x_1, \dots, x_n \in X \quad d(x_0,x_n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.



(par récurrence sur n).

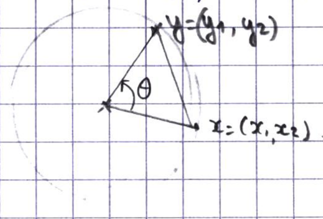
Définition : On appelle <u>espace métrique</u> un ensemble X muni d'une distance d.

Exemples :

a) $X = [a,b] \subset \mathbb{R} \quad d(x,y) = |x-y|$.

b) X ensemble quelconque $\quad d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$$(x,x) \longmapsto d(x,x) = 0$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y.$$

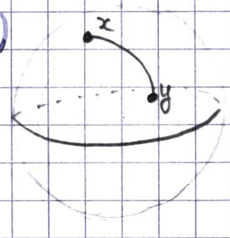
c) $X = \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ,\ x^2 + y^2 = 1 \}$.



$d_{eucl}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$d_{geod}(x,y) = R\theta \quad \theta \in [0;\pi]$ angle non orienté.
$= \text{long } \widehat{xy}$.

d)



distance géodésique de la sphère.

1. Continuité et limites dans les espaces métriques.

• **limites de suites.**

(X, d) espace métrique.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou peut-être $(x_n)_{n \geq n_0}$).

Définition : On écrit que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \ell \in X$ si

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, \ell) \leq \varepsilon$.

Remarque: en mettant $< \varepsilon$, la définition ne change pas de sens.

Exemple :

X ensemble $\quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad d(x_n, \ell) \leq \frac{1}{2} \iff x_n = \ell$ à partir de $n \geq N_{1/2}$.

Les suites convergentes sont les suites "stationnaires" càd constantes à partir d'un certain rang.

Proposition (unicité de la limite) :

Supposons $(u_n)_{n \geq n_0}$ suite dans un espace métrique (X, d) et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell'$ avec $\ell, \ell' \in X$. Alors $\ell = \ell'$.

Démonstration :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon \quad d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N'_\varepsilon$, $\forall n \geq N'_\varepsilon \quad d(u_n, \ell') \leq \varepsilon$.

Prenons par exemple $n = \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$.

On a $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$.

$\quad d(u_n, \ell') \leq \varepsilon$.

$0 \leq d(\ell, \ell') \leq d(\ell, u_n) + d(u_n, \ell') \leq 2\varepsilon$

Ceci entraîne $d(\ell, \ell') = 0$ (contradiction, sinon avec $\varepsilon = \frac{1}{3} d(\ell, \ell') > 0$).

Axiome séparation : $d(\ell, \ell') = 0 \Rightarrow \ell = \ell'$. $\boxtimes$

Rem: "semi-distance"

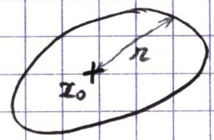
axiomes (ii) et (iii) symétrie l'inégalité triangulaire.

(i') $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$.

Alors $\lim u_n = \ell \Rightarrow \lim u_n = \ell'$ $\forall \ell'$ avec $d(\ell,\ell') = 0$.

2. Limites de fonctions.

Définitions : • Boules ouvertes dans (X, d).



Centre $x_0 \in X$, rayon $r \in \mathbb{R}_+$.

$B(x_0, r) = \{x \in X ;\ d(x_0, x) < r\}$

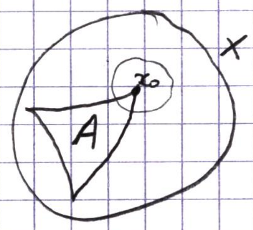
• Boules fermées.

$B_f(x_0, r) = \{x \in X,\ d(x_0, x) \leq r\}$

• $r = 0$ $B(x_0, 0) = \emptyset$ (pas intéressant !)

$r = 0$ $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$.

Situation considérée :



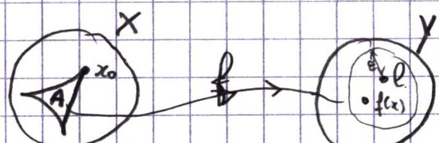
(X, d), (Y, δ) espaces métriques.

A partie de X. $x_0 \in X$.

Hypothèse : $\forall r > 0$, $A \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$.

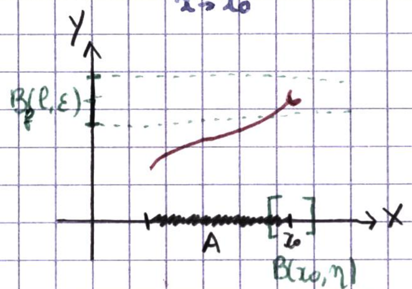
(Ceci signifie $\forall r > 0$, $\exists x \in A$ tq $d(x_0, x) < r$).

Définition : Soit $f : \underset{\cap}{A} \to Y$ application.
X



On dit que $\lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to x_0}} f(x) = \ell \in Y$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in A,\ \underbrace{d(x, x_0)}_{X} \leq \eta \Rightarrow \underbrace{\delta(f(x), \ell)}_{Y} \leq \varepsilon$$



(x_0 n'appartient pas forcément au domaine de définition A de f).

$\delta(f(x), \ell) \leq \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in B_f(\ell, \varepsilon)$.

condition équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\quad f(A \cap B_f(x_0, \eta)) \subset B_f(\ell, \varepsilon).$$

Rem : Quitte à changer un peu les rayons, il est indifférent de prendre des boules ouvertes ou fermées.

Rem : Si on remplace A par $A' = A \cap B(x_0, r_0)$

$\lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to x_0}} f(x) = \ell$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \in A' \\ x \to x_0}} f(x) = \ell$ existe.

Rem: si $\lim\limits_{\substack{x\in A \\ x\to x_0}} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{\substack{x\in A \\ x\to x_0}} f(x)=\ell'$ alors $\ell=\ell'$. (axiome de séparation $d(\ell,\ell')=0$).

Convention: Si on écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ (ensemble A non précisé), ceci signifie qu'on prend $A=B(x_0,r_0)\setminus\{x_0\}$ "boule pointée".

Exemples: fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\in]x_0-r_0,x_0[\\ x\to x_0}} f(x)$ $\quad A=]x_0-r_0,x_0[$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\in]x_0;x_0+r_0[\\ x\to x_0}} f(x)$ $\quad A=]x_0,x_0+r_0[$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $\quad A=]x_0-r_0,x_0+r_0[\setminus\{x_0\}$.

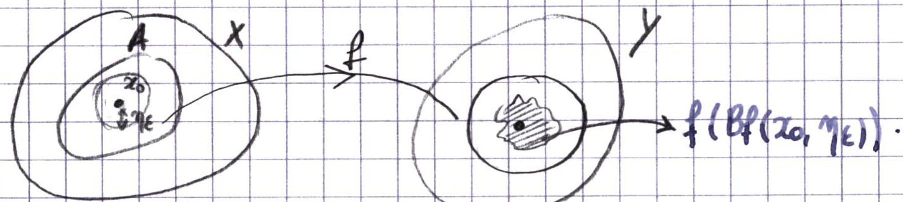
- Continuité en un point x_0.

On exige que $x_0\in A$.

Définition: $f: \underset{\hat{X}}{A} \longrightarrow Y$ est continue en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\in A \\ x\to x_0}} f(x)=f(x_0)$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta_\varepsilon>0\ \forall x\in A\ d(x,x_0)<\eta \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

équivalent à: $f(A\cap B_f(x_0,\eta_\varepsilon))\subset B_f(f(x_0),\varepsilon)$



- Faits de base sur limites et continuité.

proposition: $f: A\to Y$ continue en x_0.
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ $u_n\in A$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x_0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)=f(x_0)$.

Demonstration: exo.

Réciproque: f continue en $x_0 \Leftrightarrow$ $\forall$ suite $\begin{cases}(u_n)_{n\geq n_0} \\ u_n\in A\end{cases}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=x_0$,
on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)=f(x_0)$.

Démonstration :

Rappel : non $(P \Rightarrow Q)$ = non (non P ou Q)
= P et non Q.

$\boxed{\Rightarrow}$ exercice

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f non continue en x_0 :

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \eta > 0 \ \exists x \in A \quad d(x, x_0) \leq \eta$ et $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Prenons un tel $\varepsilon > 0$ qu'on fixe.

Prenons $\eta = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\exists x = u_n \in A$ tel que $d(u_n, x_0) \leq 2^{-n}$ et $d(f(u_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

$d(u_n, x_0) \leq 2^{-n}$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = x_0$,

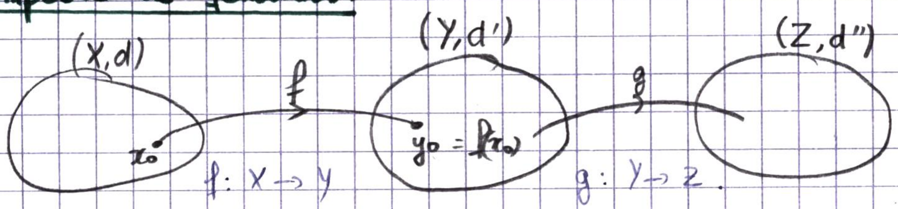
et pourtant $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n)$ n'est pas $f(x_0)$.

On a bien démontré la contraposée de $\Leftarrow$. ∎

Question : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to x_0}} f(x) = \ell \\ \forall u_n \quad \lim\limits_{n \to \infty} u_n = x_0 \\ \quad \text{avec } u_n \in A \setminus \{x_0\} \end{array}\right\} \overset{?\ \text{ok}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \ell.$

Cependant, c'est inexact si f n'est pas continue en x_0 et qu'on permet de prendre $u_n = x_0$.

3. Composée de fonctions.



proposition : $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } y_0 = f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : X \to Z$ continue en x_0.

II. Espaces (vectoriels) normés.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : Une norme N sur un $\mathbb{K}$-ev. E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto N(x)$

telle que (i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ où $|\cdot|$ est la valeur absolue dans $\mathbb{K}$.
(le "module" sur $\mathbb{C}$).

(ii) Inégalité triangulaire

$\forall x, y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

(iii) Séparation : $\forall x \in E \quad x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0$.