Droite réelle achevée.

Définition: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Relation d'ordre total : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \underset{\text{plus petit élément}}{-\infty} < x < \underset{\text{plus grand élément de } \overline{\mathbb{R}}}{+\infty}$.

Attention : $(+\infty) + (-\infty)$ indéterminé.

proposition : A partie de $\mathbb{R}$ non vide.

Alors : . $\sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ existe et vaut $+\infty$ ssi A non majorée dans $\mathbb{R}$.

. $\inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ existe et vaut $-\infty$ ssi A non minorée dans $\mathbb{R}$.

Caractérisation des bornes sup et borne inf :

Soit A partie de $\mathbb{R}$, non vide.

(1) $M = \sup A$ caractérisé par :

. $\forall x \in A, x \leq M$ (M majorant).

. $\forall M' < M, \exists x \in A$ tel que $M' < x \leq M$. (M' pas un majorant).

Ceci est valable dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque : Si $M \neq +\infty$, la 2ème condition peut s'écrire

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x \leq M$. (on écrit $M' = M - \varepsilon$ lorsque $M \neq +\infty$).

(2) De même, $m = \inf A$ caractérisée par :

. $\forall x \in A, m \leq x$ (m est un minorant).

. $\forall m' > m, \exists x \in A$ tel que $m \leq x < m'$. (m' pas un minorant).

Remarque : Si $m \neq -\infty$, cette 2ème condition s'écrit aussi

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $m \leq x < m + \varepsilon$ (on prend $m' = m + \varepsilon$).

Démonstration d'existence des bornes sup et inf :

On fait le cas de la borne sup.

Soit A partie de $\mathbb{R}$, non vide.

premier cas : A non majorée.

$\forall M' < +\infty$, M' pas un majorant, $\exists x \in A$ tq $M' < x \leq M = +\infty$, donc $\sup A = +\infty$.

$2^{\text{ème}}$ cas : A majorée par un $\mu \in \mathbb{R}$.

$x \in A \longrightarrow$ développement décimal $d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$

$d_0 = E(x) \leq \mu$.

En regardant les décimales successives, on fabrique une suite de décimaux :

$\delta_n = d_0, d_1 \dots d_n \dots$ et la limite $M = \lim \delta_n = d_0, d_1 \dots d_n \dots$,

tels que . $\forall x \in A,\ x \leq M$.

. $\forall n,\ \exists x \in A\ \ \delta_n \leq x \leq M$.

$M - \delta_n = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ chiffres}} d_{n+1} d_{n+2} \dots \leq 10^{-n}$.

On a bien $M = \sup A$. ∎

Remarque : Les résultats et les raisonnements sont les mêmes dans une base quelconque $b = 2, 3, \dots$.

Exemple :

$\mathbb{R} = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}} / \sim \qquad (x_n) \qquad |x_{n+1} - x_n| \leq C\, 10^{-n}$

$(x_n) \sim (y_n) \quad |x_n - y_n| \leq C'.\, 10^{-n}$.

Prenons $b = 16$.

$(x_n) \rightsquigarrow x_n' = x_{2n}$.

$$\begin{aligned} |x'_{n+1} - x'_n| = |x_{2n+2} - x_{2n}| &\leq |x_{2n+2} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_{2n}| \\ &\leq C.\, 10^{-(2n+1)} + C.10^{-2n} \\ &\leq 2C.10^{-2n} \\ &= \frac{2C}{100^n} \\ &\leq \frac{2C}{16^n} \end{aligned}$$

Remarque : $b \rightsquigarrow b' > b$: il suffit d'augmenter éventuellement le nombre de chiffres pour avoir la précision voulue.

Propriété : $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un "corps ordonné archimédien".

Rappel : . corps ordonné : corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ muni d'une relation d'ordre total compatible avec les opérations.

↪

(i) $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{K}$ $\left.\begin{array}{l} x \leqslant x' \\ y \leqslant y' \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \leqslant x'+y'$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{K}$ $\left.\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xy \geqslant 0$.

(i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii)

$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{K}$ $\left.\begin{array}{l} x' \geqslant x \geqslant 0 \\ y' \geqslant y \geqslant 0 \end{array}\right\} x'y' \geqslant xy$.

$x'y' - xy = \underbrace{(x'-x)}_{\geqslant 0} y' + x(y'-y) \geqslant 0$.

- propriété archimédienne :

$\forall x \in \mathbb{K}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $x \leqslant n . \mathbb{1}_{\mathbb{K}} = \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{K}} + \dots + \mathbb{1}_{\mathbb{K}}}_{n \text{ fois}}$

Vrai dans $\mathbb{R}$, $n = E(x) + 1$.

Autres formulations : * $\forall x \in \mathbb{K}$, $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $0 < \frac{1}{n} . \mathbb{1}_{\mathbb{K}} \leqslant x$.

$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leqslant n . \mathbb{1}_{\mathbb{K}} \right)$

* Si $x \in \mathbb{K}_+$ est infiniment petit par rapport aux entiers, càd si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} . \mathbb{1}_{\mathbb{K}}$, avec $x = 0$.

Remarque : Il existe des corps non archimédiens !

IV. Notions sur les cardinaux et la dénombrabilité.

But : étudier les ensembles finis et infinis.

E ensemble fini $\longrightarrow$ $\underbrace{\text{card } E}_{\text{nombre d'éléments}} = \# E \in \mathbb{N}$.

Georg Cantor : "Tous les infinis ne se valent pas, il y en a des plus grands que d'autres !". (≈ 1880).

Définition : • Deux ensembles E, F sont dits "équipotents" s'il existe une bijection $\varphi : E \to F$. C'est une relation d'équivalence.

réflexivité $E \xrightarrow{Id_E} E$

symétrie $E \xrightarrow[\text{bij}]{\varphi} F \Rightarrow F \xrightarrow[\text{bij}]{\varphi^{-1}} E$

transitivité $E \xrightarrow[\text{bij}]{\varphi} F$, $F \xrightarrow[\text{bij}]{\psi} G \Rightarrow E \xrightarrow[\text{bij}]{\psi \circ \varphi} G$

propriété : Si E, F finis, E et F sont équipotents ssi $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence} \\ \text{d'ensembles finis pour la} \\ \text{relation d'équipotence} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathbb{N}.$$

$$\dot{E} \longrightarrow \operatorname{card} E$$

Définition : Un cardinal quelconque (fini ou infini) est une classe d'équivalence pour l'équipotence. $E \longmapsto \operatorname{card} E \underset{\text{déf}}{=} \dot{E}$.

Relation d'ordre sur les cardinaux.

Théorème et déf : Soient E, F des ensembles. Il y a équivalence entre :

(i) $\exists j : E \hookrightarrow F$ injection

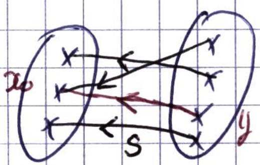
(ii) $\exists s : F \twoheadrightarrow E$ surjective.

On écrit alors $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$.

(si $E' \xrightarrow{\varphi} E$ $\quad F \xrightarrow{\psi} F'$ inj $\quad E' \longrightarrow E \overset{j}{\hookrightarrow} F \xrightarrow{\psi} F'$ encore surjective).

Démonstration :

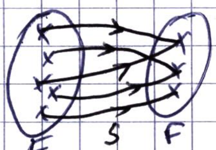
• (i) ⇒ (ii)

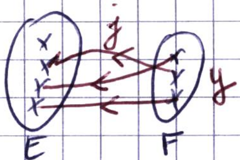


Définition de s : $y \in j(E)$ $\quad s(y) = j^{-1}(y)$ unique

$y \notin j(E)$ $\quad s(y) = x_0$ quelconque.

• (ii) ⇒ (i)





$\forall y \in F \quad s^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ car s surjective.

Je prends $j(y) = x \in s^{-1}(\{y\})$ quelconque.

$y \neq y' \Rightarrow s^{-1}(\{y\})$ et $s^{-1}(\{y'\})$ disjoints.

Forcément, $x \neq x'$, càd $j(y) \neq j(y')$, d'où j injective. ∎

Rem : On a utilisé "l'axiome du choix" : possibilité de faire simultanément une infinité de choix.

Théorème de Cantor-Bernstein : (admis)

card $E \leq$ card F et card $F \leq$ card E $\Rightarrow$ card E = card F.

$\exists i : E \xrightarrow{inj} F$, $\exists j : F \xrightarrow{inj} E \Rightarrow \exists E \xrightarrow[bij]{\varphi} F$.

Démonstration :

Ping-Pong ! (disponible sur la page web).

Rappel : Ensemble $E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

card $E = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ card $\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Opérations sur les cardinaux.

Définition : • card E + card $F \underset{déf}{=}$ card $E \underset{\text{réunion disjointe}}{\coprod} F$.

(card $(E \cup F)$ = card E + card F − card $(E \cap F)$).

• card $E \times$ card F = card$(E \times F)$.

• card $E^{\text{card } F}$ = card $(Appl(F \rightarrow E))$.

$\mathcal{P}(E) \xleftrightarrow{bij} Appl(E \longrightarrow \{0,1\})$.

A partie de $E \xmapsto{\Phi} \mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0,1\}$

$x \longmapsto 0$ si $x \notin A$

$x \longmapsto 1$ si $x \in A$

$A = f^{-1}(\{1\}) \longleftarrow\!\shortmid f : E \rightarrow \{0;1\}$

card $\mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}$. (même cas infini !).

Théorème : (Cantor). $\forall$ ensemble E, card E < card $\mathcal{P}E = 2^{\text{card}(E)}$.

Démonstration :

1). card$(E) \leq$ card $\mathcal{P}(E)$.

$\exists j : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ injection

$x \longmapsto \{x\}$.

2) card $E \neq$ card $\mathcal{P}(E)$.

Supposons $\exists f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ bijection

$x \longmapsto A = f(x) \subset E$

$S = \{x \in E \; ; \; x \notin f(x)\} \subset E$

$S \in \mathcal{P}(E)$.

il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = S$ puisque f est une bijection.

- si $x_0 \in f(x_0) = S$. $\Rightarrow x_0 \notin f(x_0)$. par déf de S.
- si $x_0 \notin f(x_0)$ $\Rightarrow x_0 \in S = f(x_0)$.

Contradiction, donc f ne peut pas exister. $\blacksquare$

$$\boxed{\underline{\text{Théorème}} : \ \text{card}\, \mathbb{R} = \text{card}\, \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\text{card}\, \mathbb{N}} > \text{card}\, \mathbb{N}.}$$