$x_{n+1}' - x_n' = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}\, x_n}$

$|x_{n+1} - x_n| \leq C.10^{-n}$ par hyp.

$\Rightarrow |x_{n+1}' - x_n'| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n||x_{n+1}|} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} 10^{-n}$ pour $n \geq n_0$.

donc $(x_n') \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$ et $x' = (x_n')$ vérifie $xx' = 1\!\!1_\mathbb{R}$ ■

<u>Observation</u> : $(x_n) \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$ vérifiant $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{C}{10^n}$,

Alors c'est une suite de Cauchy, et plus précisément $\forall p \geq q$ $|x_q - x_p| \leq \frac{C'}{10^p}$

$x_q - x_p = (x_q - x_{q-1}) + (x_{q-1} - x_{q-2}) + \dots + (x_{p+1} - x_p)$

$|x_q - x_p| = \frac{C}{10^{q-1}} + \frac{C}{10^{q-2}} + \dots + \frac{C}{10^p} = \frac{C}{10^p}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{q-p-1}}\right)}_{\leq \frac{10}{9}}$

Vrai avec $C' = \frac{10}{9}C$.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Si la conclusion est fausse, on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq n_0$ $|x_n| < \varepsilon$.

Conclusion : Est-ce que ceci implique $(x_n) \sim (0)$?

? $\exists C'' \in \mathbb{Q}_+$, $|x_n| \leq \frac{C''}{10^n}$?

$(x_n) \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$ $\exists C'$ (observation), $\forall q \geq p$ $|x_q - x_p| \leq \frac{C'}{10^p}$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{10^p}$, $n_0 = p$ quelconque.

$\exists n \geq p$ tel que $|x_n| < \varepsilon = \frac{1}{10^p}$.

Prenons $q = n$. $\begin{cases} |x_n - x_p| \leq \frac{C'}{10^p} \\ |x_n| \leq \frac{1}{10^p} \end{cases}$

$|x_p| = |x_n - (x_n - x_p)| \leq \frac{1}{10^p} + \frac{C'}{10^p} = \frac{C'+1}{10^p}$

Donc on peut prendre $C'' = C'+1$ et $(x_n) \sim (0)$.

On a bien démontré que $(\mathbb{R}, +, \times)$ corps commutatif. ■

<u>Propriété de la borne supérieure</u>.

<u>Définition</u> : $(E, \leq)$ $(F, \leq)$ ensembles ordonnés.

L'ordre <u>"lexicographique"</u> sur $E \times F$ est défini par $(x,y) \leq (x',y')$ si $\begin{cases} x < x' \\ \text{ou } x = x' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$

ex: $an < ra$
$an < as$

Plus généralement, on a un ordre lexicographique sur un produit $E_1 \times \dots \times E_n$ d'ensembles ordonnés $(E_i, \leq_i)$.

Développements décimaux illimités : $d_0, d_1 \dots d_n \dots$
$d_0 \in \mathbb{Z}$, $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\} = I \subset \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} \times I \times I \times \dots \times I \times \dots$ → nom de l'ordre lexicographique.
$d_0 \quad d_1 \quad d_2 \dots d_n$

C'est un ordre total.

Théorème : Soit x_p une suite de réels donnée par des progressions décimales illimitées. $x_p = d_{p,0}, d_{p,1}\, d_{p,2} \dots d_{p,n} \dots$ avec $d_{p,0} \in \mathbb{Z}$

Supposons : . x_p majorée par M.
. suite croissante par l'ordre lexicographique.

Alors les décimales se stabilisent à des ordres arbitrairement élevés.

Explication :

$d_{p,0} = E(x_p) \in \mathbb{Z}$ suite croissante.

$d_{0,0} \leq d_{p,0} \leq M$.

On n'a qu'un nombre fini de valeurs $d_{p,0}$ possibles entre $d_{0,0}$ et M.

$\exists p_0$ tel que $d_{p,0} \in \mathbb{Z}$ atteint la valeur maximale.

$\exists p_1 \geq p_0$ tel que $d_{p,1}$ se stabilise pour $p \geq p_1$.
$d_{p,1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$
⋮
$\exists p_n \geq p_{n-1}$ tel que $d_{p,n}$ " " " $p \geq p_n$.

1
1,40
1,41
1,412
1,413
1,414

$\delta_0 = \max d_{p,0}$
$\delta_1 = \max d_{p,1} \quad p \geq p_0$.
⋮
$\delta_n = \max d_{p,n} \quad p \geq p_{n-1}$

$\delta_0, \delta_1, \delta_2 \dots \delta_n \dots$ est la borne sup de la suite (x_p) dans l'ensemble ordonné des développements illimités.

C'est peut-être un développement impropre !

$x_p = 1 - \frac{1}{10^p} = 0{,}99\dots\underset{\text{rang } p}{9}$

$x = 0{,}9\dots9\dots$ impropre.

Cas des suites décroissantes minorées :

même conclusion : on obtient une borne inf en prenant les décimales stabilisées à la hausse.

$\mathbb{R} \underset{déf}{:=} \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}/\sim$.

(x_n) $x_n \in \mathbb{Q}$ vérifiant $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{C}{10^n}$.

prenons $x_n' = x_n + \frac{A}{10^n}$ $A \in \mathbb{N}$ assez grand.

$$x_{n+1}' - x_n' = x_{n+1} - x_n + \frac{A}{10^{n+1}} - \frac{A}{10^n} \leq \frac{C}{10^n} - \frac{9}{10}\frac{A}{10^n}.$$

Choisissons A tel que $\frac{9}{10}A > C$, alors $x_{n+1}' - x_n' < 0$.

(x_n') suite décroissante de rationnels.

$|x_n' - x_n| \leq A$

(x_n) bornée $\Rightarrow$ (x_n') bornée.

(x_n') suite décroissante bornée.

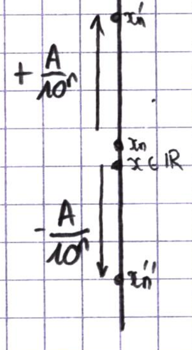
prenons $x_n'' = x_n - \frac{A}{10^n}$.

$x_{n+1}'' - x_n'' = x_{n+1} - x_n + \frac{9}{10}\frac{A}{10^n} \geq -\frac{C}{10^n} + \frac{9}{10}\frac{A}{10^n} > 0$ si je prends $\frac{9}{10}A > C$.

(x_n'') suite croissante bornée.

x' développement décimal illimité stabilisé de x_n'.

x'' ——————— de x_n''.



$x_n' - x_n'' = \frac{2A}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ou bien : • même développement (pas) décimal $x' = x''$.

• on obtient un décimal x' développement propre.

x'' développement impropre.

De toute façon $(x_n') \sim (x_n'')$ les réels associés sont égaux par définition.

En conclusion :

(1) progression décimale illimitée $d_0, d_1 \dots d_n \dots$ $\xrightarrow{\Phi}$ $x = (x_n) \in \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}/\sim$, $x_n = d_0 \dots d_n$

progression propre stabilisée. $\xleftarrow{\Psi}$ $(x_n) \in \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$

x' associé à $x_n' = x_n + \frac{A}{10^n}$.

On obtient ainsi des bijections entre {dév. décimaux propres} $\underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}}$ $\mathbb{R} = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}/\sim$

(2) Toute suite croissante majorée dans $\mathbb{R}$ possède une borne sup.
" " décroissante minorée dans $\mathbb{R}$ " " borne inf.

$\boxed{\text{Théorème : } \mathbb{R} \text{ est complet : toute suite de Cauchy dans } \mathbb{R} \text{ est convergente.}}$

Démonstration :

Suite de Cauchy (x_n).

$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p,q \in \mathbb{N}\ p,q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$.

- (x_n) de Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) est bornée.

$\varepsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall p,q\ p,q \geq N_1 \Rightarrow |x_q - x_p| \leq 1$.

Je prends $p = n_1$ $\forall q,\ q \geq N_1 \Rightarrow |x_q - x_{N_1}| \leq 1$
$\Rightarrow |x_q| \leq 1 + |x_{N_1}|$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq \max(|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N_1-1}|, |x_{N_1}| + 1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \underset{\text{déf}}{:=} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k \geq n} x_k$.

$U_k = \sup\limits_{k \geq n} x_k$. $\{x_k\}$ partie bornée $\Rightarrow$ a un sup par ordre lexicographique.

(U_n) décroissante bornée par M, admet une borne inf $\ell \in \mathbb{R}$.

$\ell = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$. $\ell \leq U_n$ car ℓ = borne inf.

si $\varepsilon > 0$ $\ell + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

$\exists N$ tq $U_N < \ell + \varepsilon$.

$\forall n \geq N$ $\ell \leq U_n \leq U_N < \ell + \varepsilon$.

- Etant donné $\varepsilon > 0$ $\exists \tilde{N},\ \forall p,q \geq \tilde{N},\ |x_q - x_p| \leq \varepsilon$.

$U_p = \sup\limits_{q \geq p} x_q$ $x_p - \varepsilon \leq x_q \leq x_p + \varepsilon$.

on voit que $x_p - \varepsilon \leq U_p \leq x_p + \varepsilon$. pour $p \geq \tilde{N}$.

prenons $n \geq \max(N, \tilde{N})$.

on a $\begin{cases} \ell \leq U_n < \ell + \varepsilon \\ |U_n - x_n| \leq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq x_n < \ell + 2\varepsilon$.

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. ■

$\boxed{\text{Corollaire : Si } (x_n) \text{ de Cauchy } \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n .}$