• $\mathrm{Major}(A) \subset M$?

$\complement_{\mathbb{Q}_+} M \overset{?}{\subset} \complement_{\mathbb{Q}_+} \mathrm{Major}(A)$?

$y \in \complement_{\mathbb{Q}_+} M \; : \; y \in \mathbb{Q}_+ \; y^2 \leqslant 2$

On a en fait $y^2 < 2$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Il faut voir que $y \in \complement_{\mathbb{Q}_+} \mathrm{Major}(A)$ i.e. pour un majorant de A.

Prenons α petit dans $\mathbb{Q}_+^*$, disons $\alpha < 1$.

$x = y + \alpha$

$x^2 = y^2 + \alpha^2 + 2y\alpha$

$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 \leqslant \alpha \\ y \leqslant 2 \Rightarrow 2y\alpha \leqslant 4\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 \leqslant y^2 + 5\alpha.$

Je veux $x^2 < 2 \Leftrightarrow y^2 + 5\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha < \dfrac{2-y^2}{5}$.

Prenons $\alpha = \dfrac{2-y^2}{6} \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow y \in \complement_{\mathbb{Q}_+} \mathrm{Major}(A)$.

$\sup(A) = \min\{\mathrm{Major}(A)\} = \min\{y \in \mathbb{Q}^+ ; y^2 > 2\}$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

Si le min existait, ce serait un y_0 tel que $y_0^2 > 2$.

$y = y_0 - \alpha \xrightarrow[\text{exercice}]{}$

Conclusion : $\sup(A)$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

III. Construction des nombres réels.

1. Approximations décimales.

Soit $x \in \mathbb{Q}$.

• partie entière : $k = E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x < k+1$. Cet entier k est unique.

ex : $x = 3{,}21 \quad E(x) = 3$
$x = -2{,}73 \quad E(x) = -3$

prenons $k = (10^n x)$

$k \leqslant 10^n x < k+1 \Rightarrow \dfrac{k}{10^n} \leqslant x < \dfrac{k+1}{10^n}$

Définition : Le nombre décimal $\dfrac{k}{10^n} = \dfrac{1}{10^n} E(10^n x)$ est l'unique nombre décimal à n chiffres après la virgule vérifiant : $\dfrac{k}{10^n} \leqslant x < \dfrac{k}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.

C'est l'approximation décimale de x à n chiffres par défaut qu'on note $x_{[n]}$ (dév^t décimal tronqué à n chiffres).

- Approximations décimales de racines carrées.

$\sqrt{2}$? $\quad 1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 > 2$

$1,4^2 = 1,96 \qquad 1,5^2 = 2,25 > 2$

$1,41^2 = 1,9881 \qquad 1,42^2 = 2,0164.$

Exemple : $\sqrt{317,201}$

317,201	17,81
217	$2\underline{7} \times \underline{7} = 189$
28,20	$34\underline{8} \times \underline{8} = 2784$
3610	$356\underline{1} \times \underline{1} = 3561$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= a^2 + (2a+b)b.$

étape $a = 17,8 \longrightarrow$ reste $r = x - a^2$.

$r' = x - (a+b)^2$

$= r - (2a+b)b.$

À chaque étape, on cherche le plus grand $b = k.10^{-n}$ $k = 0, \dots, 9$.

tel que $(2a+b).b < r$ reste précédent.

On calcule $r' = r - (2a+b)b$ et on itère.

Exercice : approximation polygonale de π, par exemple avec disons 96 côtés...

Rem : En général, si la racine $\notin \mathbb{Q}$, on obtient ainsi un développement non périodique.

Définition : On appellera développement décimal illimité la donnée d'une suite

$d = \{d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots\}$ $\qquad d_0$: partie entière $\in \mathbb{Z}$.

$d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Exemple : $x = -\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

$d_0 = -1$

$x = -1 + \frac{1}{3} = (-1),333\dots3\dots$

d périodique $\rightsquigarrow x$ rationnel.

d non périodique ?

$x_n = \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{d_0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i\, 10^{-i}}_{\in [0;1[_{\mathbb{D}}} \in \mathbb{D}. \qquad |x_{n+1} - x_n| = d_{n+1}\, 10^{-(n+1)} \leqslant 9.10^{-(n+1)} = 0,9 \times 10^{-n}.$

Définition : • On considère les suites de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition de "compatibilité décimale" $|x_{n+1} - x_n| \leq C.10^{-n}$ où C constante $\in \mathbb{Q}_+$. (*)

(en gros on a à peu près les mêmes n premières décimales pour x_n et x_{n+1}).

• Relation d'équivalence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ si :

$\exists C \in \mathbb{Q}_+$ telle que $|x_n' - x_n| \leq C.10^{-n}$. (**)

• $\mathbb{R} = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}} / \overset{(**)}{\sim}$ suites de rationnels vérifiant (*).

Rem : $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

$\sim$ réflexive : trivial.

$\sim$ symétrique : trivial.

$(x_n) \sim (x_n')$ $(x_n') \sim (x_n'')$

$|x_n' - x_n| \leq C_1.10^{-n}$, $|x_n'' - x_n'| \leq C_2.10^{-n}$.

$\Rightarrow |x_n'' - x_n| \leq (C_1 + C_2).10^{-n}$.

$\Rightarrow (x_n) \sim (x_n'')$.

Exemple :

$d = 1,399...9...$

$d' = 1,4$

Approximations décimales à 10^{-n} près.

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 1,39...\underset{\text{rang } n}{\underset{\uparrow}{9}}... \\ x_n' = 1,40...\underset{\text{rang } n}{\underset{\uparrow}{0}}... \end{array}\right\} \Rightarrow x_n' + x_n = 10^{-n}.$$

$(x_n) \sim (x_n')$. $\Rightarrow$ mêmes nombres réels $x = x'$. où $x =$ classe d'éq. de (x_n).
$x' =$ —— (x_n').

2. Développements décimaux propres et impropres.

• **Développement impropre :**

$d = d_0, d_1 ... d_n 99...9...$ avec $d_n < 9$. donne le même nombre réel que

$d' = d_0, d_1 ... d_{n-1} (d_n + 1) 0 ... 0 ...$

Tout nombre décimal possède un développement impropre avec une infinité de 9 consécutifs et un développement propre avec une infinité de 0 consécutifs.

Attention : $0,090909...$ est un développement propre ! c'est le rationnel $\frac{1}{11}$.

Définition : Un développement propre est un développement décimal qui n'a pas une infinité de 9 consécutifs.

3. Opérations sur les réels.

- **Addition.**

$x = (\dot{x_n})$ $y = (\dot{y_n})$ $(x_n) \in S_{\mathbb{Q}}$, $(y_n) \in S_{\mathbb{Q}}$

$x + y \underset{\text{déf}}{=} (\dot{x_n + y_n})$

$(x_n + y_n) \in S_{\mathbb{Q}}$?

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C_1 . 10^{-n}$$
$$|y_{n+1} - y_n| \leq C_2 . 10^{-n}.$$

$$\Rightarrow |(x_{n+1} + y_{n+1}) - (x_n + y_n)| \leq (C_1 + C_2) 10^{-n}.$$

donc $(x_n + y_n) \in \mathbb{Q}$.

- **Compatibilité de + avec $\sim$?**

$$\left.\begin{array}{l} x = (\dot{x_n}) = (\dot{x_n'}) \\ y = (\dot{y_n}) = (\dot{y_n'}) \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} (\dot{x_n + y_n}) = (\dot{x_n' + y_n'})$$

$$\begin{array}{l} |x_n' - x_n| \leq C_1 . 10^{-n} \\ |y_n' - y_n| \leq C_2 . 10^{-n} \end{array} \Rightarrow |(x_n' + y_n') - (x_n + y_n)| \leq (C_1 + C_2) . 10^{-n}.$$

$(\mathbb{R}, +)$ groupe abélien.

$(S_{\mathbb{Q}}, +)$ groupe abélien $\rightsquigarrow$ $(\mathbb{R}, +)$ groupe quotient.

$(\dot{x_n}) = \dot{0}$ quand $|x_n| \leq C . 10^{-n}$.

- **Multiplication.**

> **Lemme**: $(x_n) \in S_{\mathbb{Q}}$ (vérifiant $(*)$), alors $\exists M \in \mathbb{Q}^+$ $|x_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve:

$$|x_n| \leq |x_0| + |x_n - x_0|$$
$$\leq |x_0| + (|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_1 - x_0|).$$
$$\leq |x_0| + C . 10^{-(n-1)} + C . 10^{-(n-2)} + \dots + C . 10^0$$

$$1 + a + \dots + a^N = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a} \quad \text{si } a < 1.$$

$$a = \frac{1}{10}, \ 1 + 10^{-1} + \dots + 10^{-N} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

$$|x_n| \leq M = |x_0| + C \times \frac{10}{9}. \ \blacktriangleright$$

Exemple:

$x = (\dot{x_n})$; $y = (\dot{y_n})$

$x \times y = (\dot{x_n \times y_n})$

$(x_n \times y_n) \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$?

$$|x_{n+1} y_{n+1} - x_n y_n| = |x_{n+1}(y_{n+1} - y_n)| + |y_n(x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leqslant \underbrace{M_1}_{\substack{\text{lemme} \\ \text{maj de } (x_n)}} \frac{C_2}{10^n} + \underbrace{M_2}_{\text{maj } (y_n)} \cdot \frac{C_1}{10^n} \ldots \leqslant \frac{C}{10^n}$$

Si x_n, y_n sont des approx décimales par défaut à n chiffres, le produit $x_n \times y_n$ a 2n chiffres après la virgule.

Exemple :

$x = (\dot{x_n}) = (\dot{x'_n})$
$y = (\dot{y_n}) = (\dot{y'_n})$

$$|x'_n y'_n - x_n y_n| \leqslant |x'_n(y'_n + y_n)| + |y_n(x'_n - x_n)|$$

$$\leqslant M_1 \cdot \frac{C_2}{10^n} + M_2 \frac{C_1}{10^n}.$$

$(\mathbb{R}, +, \times)$ anneau commutatif et unitaire.

Lien avec l'algèbre : $(\mathcal{S}_\mathbb{Q}, +, \times)$ anneau commutatif et unitaire.

$J \subset \mathcal{S}_\mathbb{Q}$ $\quad J = \{(x_n) \sim (0)$ càd $|x_n| \leqslant C.10^{-n}\}$.

J idéal de $\mathcal{S}_\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} = \mathcal{S}_\mathbb{Q} / J$.

Théorème : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

Attention : $\mathcal{S}_\mathbb{Q}$ n'est pas un corps.

$x_n = 10^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\rightsquigarrow (\dot{x_n}) = \dot{0}$

Élément unité de $\mathcal{S}_\mathbb{Q}$: suite $e_n = 1$.

$\frac{1}{x_n} = 10^n$. $\quad \left(\frac{1}{x_n}\right) \notin \mathcal{S}_\mathbb{Q}$ car non bornée.

Lemme : $(x_n) \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$ telle que $x = (\dot{x_n}) \neq \dot{0}$, alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ telle que $|x_n| \geqslant \varepsilon$, pour $n \geqslant n_0$ assez grand.

Démonstration :

supposons le lemme vrai.

prenons $\begin{cases} x'_n = \frac{1}{x_n} & \text{si } n \geqslant n_0 \\ x'_n = 0 & \text{si } n < n_0 \end{cases}$ $\quad (x'_n) \in \mathcal{S}_\mathbb{Q}$?

$$x'_{n+1} - x'_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}\, x_n}$$

$|x_{n+1} - x_n| \leqslant C \cdot 10^{-n}$ par hyp.

$\Rightarrow |x'_{n+1} - x'_n| \leqslant \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|\,|x_{n+1}|} \leqslant \dfrac{C}{\varepsilon^2} 10^{-n}$ pour $n \geqslant n_0$.

donc $(x'_n) \in \mathcal{S}\mathbb{Q}$ et $x' = (\dot{x}'_n)$ vérifie $xx' = 1\!\!1_{\mathbb{R}}$