Racines k-ièmes.

$x \in \mathbb{Q}_+^*$

$\exists ?\ y \in \mathbb{Q}_+^*$ tq $y^k = x$.

Si oui on note $y = \sqrt[k]{x}$

condition nécessaire et suffisante : $y = \prod p^{b_p}$ $b_p \in \mathbb{Z}$ (unique).
(CNS)

$x = \prod p^{a_p}$ $a_p \in \mathbb{Z}$ (unique).

$y^k = \prod p^{kb_p}$

$kb_p = a_p \Leftrightarrow b_p = \frac{1}{k} a_p$ possible ssi $k \mid a_p$.

CNS : pour qu'on puisse trouver $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{Q}_+^*$, il faut et il suffit que les exposants a_p de la décomposition en facteurs premiers soient multiples de k.

Alors $\sqrt[k]{x} = \prod_p p^{\frac{a_p}{k}}$

En particulier $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Conséquence : si $x \in \mathbb{N}^*$ et s'il existe $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{N}$.

Dém : $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_p \geqslant 0$.

II. Rappels et compléments sur les ensembles ordonnés.

Définition : On appelle ensemble ordonné un ensemble E muni d'une relation binaire $\leqslant$ qui est une relation d'ordre : (i) $\forall x \in E \quad x \leqslant x$ (réflexivité).

(ii) $\forall x, y \in E \quad x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$. (antisymétrie).

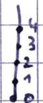
(iii) $\forall x, y, z \in E$, $x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$

Définition : Une relation d'ordre $\leqslant$ sur E est dit ordre total si

$\forall x, y \in E, \quad x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Sinon, on parle d'ordre partiel.

Exemples :

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$  relation d'ordre total.
- $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ et $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ sont aussi totalement ordonnés.

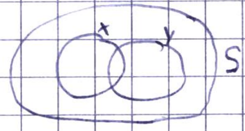
$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}_+$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \mathbb{Q}_-^* \cup \{0\}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad \left\{\begin{array}{ll} y - x \in \mathbb{Q}_+^* & x < y \\ y - x \in \mathbb{Q}_-^* & y < x \\ y - x = 0 & y = x \end{array}\right\} \Rightarrow$ ordre total.

- S ensemble.

  $E = \mathcal{P}(S)$ ensemble des parties de S.

  Prenons $X, Y \in E$, $X \subset S$, $Y \subset S$

  Je prends $X \leq Y \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} X \subset Y$ (égalité autorisée).

  C'est bien une relation d'ordre.

- $S = \{a, b, c\}$

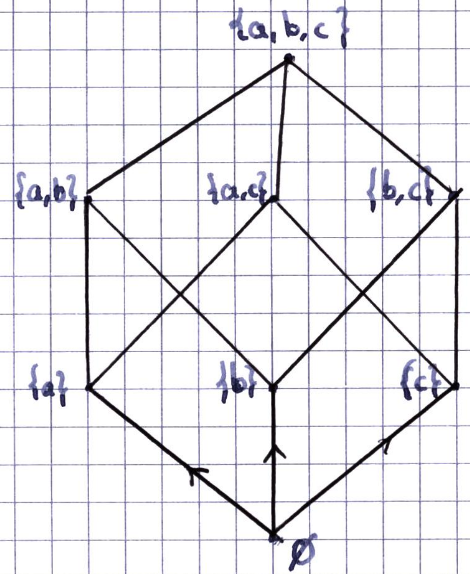
  $E = \mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Rappel : $S = \{a_1, \dots, a_n\}$.

$E = \mathcal{P}(S)$ possède 2^n éléments.

card $\mathcal{P}(S) = 2^{\text{card } S}$.

Diagramme de Hasse de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subset)$:



Relation d'ordre partiel.

Définition : plus petit élément d'une partie A dans $(E, \leq)$.

C'est un élément $x_0 \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x_0 \leq x$.

preuve unicité : x_0' autre plus petit élément.

On doit avoir $x_0 \leq x_0'$ et $x_0' \leq x_0 \Rightarrow x_0 = x_0'$.

Le plus petit élément de A est aussi appelé minimum de A, noté $\min A$.

$A = \{\{a\}, \{b,c\}\}$ dans $E = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$ n'a pas de minimum.

propriété : Si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ partie finie de $(E, \leqslant)$ et si $\leqslant$ ordre total, alors $\min A = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ existe.

preuve :

$\min A = \min(\min(\min\{x_1, x_2\}, x_3), x_4 \dots$

récurrence : $A' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ $\min A'$ existe.

$\min(A) = \min\{\min A', x_n\}$.

propriété d'ordre total $\Rightarrow$ vrai pour 2 éléments.

Remarque : $\emptyset$ n'a pas de minimum !

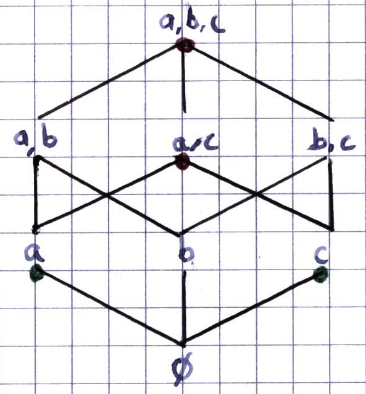
Définition : Le plus grand élément ou maximum d'une partie de A de $(E, \leqslant)$ $\max(A) = x_1 \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leqslant x_1$.

Définitions : $A \subset E$

- Majorants de A : $\mathrm{Major}(A) = \{y \in E \mid \forall x \in A, x \leqslant y\}$
- minorants de A : $\mathrm{Minor}(A) = \{z \in E \mid \forall x \in A, z \leqslant x\}$.

Exemples :

- $S = \{a, b, c\}$ $E = \mathcal{P}(S)$



$A = \{\{a\}, \{c\}\}$.

$\mathrm{Minor}(A) = \{\emptyset\}$.

$\mathrm{Major}(A) = \{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

- $(\mathbb{Q}, \leqslant)$

$A = \mathbb{N}$

$\min(A) = 0$ $\mathrm{major}(A) = \emptyset$
$\max(A)$ n'existe pas. $\mathrm{minor}(A) = \mathbb{Q}$

Définitions :

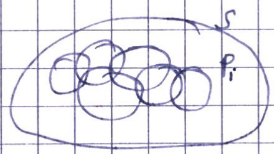
- borne supérieure : $\sup(A) = \min(\mathrm{Major}(A))$ si ceci existe
- borne inférieure : $\inf(A) = \max(\mathrm{Minor}(A))$ si ceci existe.

__Conséquences__ : • si $\text{Major}(A) = \emptyset$ alors $\sup(A)$ n'existe pas dans E.

• si $\text{Minor}(A) = \emptyset$ alors $\inf(A)$ n'existe pas dans E.

Par exemple, $\sup(\mathbb{N})$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

__Exemple__ : $E = \mathcal{P}(S)$ avec $\subset$.



$A \subset E \quad A = \{P_i, i \in I\}$ où $P_i \subset S$.

$\text{Minor}(A) = \{\text{parties } Z \text{ de } S \,;\, \forall i \in I,\ Z \subset P_i\}$

$= \{Z \in E,\ Z \subset \bigcap_{i \in I} P_i\}$.

→ $\bigcap_{i \in I} P_i = \{x \in S \,;\, \underbrace{\forall i \in I,\ x \in P_i}_{\text{propriété qui caractérise les éléments de la partie considérée.}}\}$.

$\text{Major}(A) = \{\text{parties } Z \,;\, \forall i \in I\ P_i \subset Z\}$

$= \{Z \in E \,;\, Z \supset \bigcup_{i \in I} P_i\}$.

→ $\bigcup_{i \in I} P_i = \{x \in S \,;\, \exists i \in I,\ x \in P_i\}$.

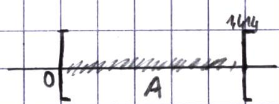
$\inf(A) = \max(\text{Minor}(A)) = \bigcap_{i \in I} P_i$.

$\sup(A) = \min(\text{Major}(A)) = \bigcup_{i \in I} P_i$.

__"Déficience" de $\mathbb{Q}$__.

$A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \,;\, x^2 < 2\}$.

$\text{Minor}(A) = \,]-\infty; 0]_{\mathbb{Q}^-}$)?



$\inf(A) = \text{Max}(\text{Minor}(A)) = 0$.

$\text{Major}(A) \overset{?}{=} \{y \in \mathbb{Q}_+ \,;\, y^2 > 2\}$

$M = \{y \in \mathbb{Q}_+ \,;\, y^2 > 2\}$.

• $M \subset \text{Major}(A)$?

$x \in A,\ x \in \mathbb{Q}_+ \quad x^2 < 2$

$y \in M,\ y \in \mathbb{Q}^+ \quad y^2 > 2$

$x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 > 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) > 0$.

$\begin{cases} y - x > 0 \\ y + x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y - x < 0 \\ y + x < 0 \end{cases} \Rightarrow y < -x$ impossible.

On a donc $x < y \Rightarrow y$ majorant de A

$\Rightarrow M \subset \text{Major}(A)$.

• $\mathrm{Major}(A) \subset M$?

$\complement_{\mathbb{Q}_+} M \overset{?}{\subset} \complement_{\mathbb{Q}_+} \mathrm{Major}(A)$?

$y \in \complement_{\mathbb{Q}_+} M$: $y \in \mathbb{Q}_+$ $y^2 \leq 2$

On a en fait $y^2 < 2$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Il faut voir que $y \in \complement_{\mathbb{Q}_+} \mathrm{Major}(A)$ i.e. pour un majorant de A.

Prenons α petit dans $\mathbb{Q}_+^*$, disons $\alpha < 1$.

$x = y + \alpha$

$x^2 = y^2 + \alpha^2 + 2y\alpha$

$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 \leq \alpha \\ y \leq 2 \Rightarrow 2y\alpha \leq 4\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 \leq y^2 + 5\alpha.$

Je veux $x^2 < 2 \Leftrightarrow y^2 + 5\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha < \frac{2-y^2}{5}$.

Prenons $\alpha = \frac{2-y^2}{6} \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow y \in \complement_{\mathbb{Q}_+} \mathrm{Major}(A)$.

$\sup(A) = \min\{\mathrm{Major}(A)\} = \min\{y \in \mathbb{Q}^+ ; y^2 > 2\}$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

Si le min existait, ce serait un y_0 tel que $y_0^2 > 2$.

$y = y_0 - \alpha$ $\xrightarrow[\text{exercice}]{}$

Conclusion : $\sup(A)$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

III. Construction des nombres réels.

1. Approximations décimales.

Soit $x \in \mathbb{Q}$.

• partie entière : $k = E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. Cet entier k est unique.

ex : $x = 3{,}21$ $E(x) = 3$
$x = -2{,}73$ $E(x) = -3$

prenons $k = (10^n x)$

$k \leq 10^n x < k+1 \Rightarrow \frac{k}{10^n} \leq x < \frac{k+1}{10^n}$

Définition : Le nombre décimal $\frac{k}{10^n} = \frac{1}{10^n} E(10^n x)$ est l'unique nombre décimal à n chiffres après la virgule vérifiant : $\frac{k}{10^n} \leq x < \frac{k}{10^n} + \frac{1}{10^n}$.

C'est l'approximation décimale de x à n chiffres par défaut qu'on note $x_{[n]}$ (dév.t décimal tronqué à n chiffres).