PROPPIÉTÉS DES NOMBRES RÉELS.

I. Nombres entiers et rationnels.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \right\}.$

$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$

Représentation d'un entier dans une base b.

$n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire sous forme unique $n = \sum_{i=0}^{s} a_i b^i$ ← chiffres en base b avec $a_i = 0, 1, \dots, b-1$.

bases usuelles :
- $b = 2$ chiffres $0, 1$.
- $b = 10$ $0, 1, \dots, 9$
- $b = 8$ octal
- $b = 16$ hexadécimal $0, 1, \dots, 9, a, b, c, d, e, f$.

$n = \sum_{i=0}^{s} a_i b^i$ $\quad a_s\, a_{s-1} \dots a_1\, a_0$ ($a_s \to b^s$, $a_1 \to b^1$, $a_0 \to$ unité b^0)

Exemple : • $b = 1361$ en base 16. ⇝ en hexadécimal ?

$$\begin{array}{r|l} 1361 & 16 \\ 081 & \overline{85} \\ 1 & \end{array} \qquad 1361 = 16 \times 85 + 1$$
$$= 16 \times (16 \times 5 + 5) + 1.$$
$$= 5 . 16^2 + 5 \times 16 + 1.$$

$$\begin{array}{r|l} 85 & 16 \\ 5 & \overline{5} \end{array}$$

$n = 551$ en base 16.

• $n = 227$ en base 10.

$$\begin{array}{r|l} 227 & 16 \\ 67 & \overline{14} \\ 3 & \end{array} \qquad n = 14 \times 16 + 3$$

$n = e3$ en base 16.

Décimaux.

$$x = \frac{a}{10^n} = \frac{a_s a_{s-1} \dots a_1 a_0}{10^n} = \frac{\sum_{i=0}^{s} a_i 10^i}{10^n} = \sum a_i 10^{i-n}.$$
$$= a_s a_{s-1} \dots a_n, a_{n-1} \dots a_0 \quad \text{si } n \leq s$$
$$= 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n-s-1} a_s a_{s-1} \dots a_0$$

Nombres b-adiques $\mathbb{D}_b$.

$x = \frac{a}{b^n} = \sum_{i=0}^{s} a_i b^{i-n}$ en base b.

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ anneau commutatif unitaire.

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ corps commutatif.

Définition: Un corps est un anneau unitaire dans lequel tout $x \neq 0$ a un inverse pour la multiplication.

Théorème: Un nombre donné par une progression décimale illimitée

$\pm\, a_s a_{s-1} \dots a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} \dots$ éventuellement infini

$a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ base 10

$a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

Si la progression est finie $x = \sum_{i=-N}^{+s} a_i b^i$

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ la progression est périodique à droite à partir d'un certain rang.

Démonstration:

• $x = \frac{3}{7}$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 7 \\ \;\;20 & \overline{0{,}428571\,428\dots} \\ \;\;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;30 & \end{array}$$

• $x = \frac{a}{b}$

* si ça "tombe juste" : il se produit un reste nul (c'est le cas si b est de la forme $2^\alpha 5^\beta$).

$\rightsquigarrow$ nombre décimal $a_{-1} a_{-2} \dots a_{-\beta} 000 \dots$

* si ça "ne tombe pas juste" : restes possibles $1, 2, \dots, b-1$.

Au plus, à la b-ième tentative, on retombe sur un reste déjà trouvé

$\Rightarrow$ période de longueur $\leq b-1$.

On a démontré $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ développement décimal est périodique.

Réciproque: développement périodique $\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$.

$x = -4,27\underbrace{1305}\underbrace{1305}\underbrace{1305}\ldots$

$x = -4,27 - 0,001305\,1305\ldots$

$= -\frac{427}{100} - \frac{1}{100} \times 0,\underbrace{1305}\underbrace{1305}\ldots$

$0,13051305\ldots = 1305 \times 0,\underbrace{0001}\underbrace{0001}\underbrace{0001}\ldots$

$100 \,|\, 99$
$100 \,|\, 0,\boxed{01}01$

$0,\underbrace{00\ldots1}_{p \text{ chiffres}}\underbrace{00\ldots1}\ldots = \frac{1}{99\ldots9}$ avec p chiffres 9.

$x = -\frac{427}{100} - \frac{1}{100}\,\frac{1305}{9999} \in \mathbb{Q}$

$\forall x \in \mathbb{Q}$ il existe une écriture $x = \frac{a}{b}$ avec $b = 10^q \times \underbrace{99\ldots9}_{p \text{ fois}}$

$\frac{3}{7} = 0,\underbrace{428571}\underbrace{428571}\ldots = \frac{428571}{999999}$

Factorisation en nombres premiers.

$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

Théorème : Tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ se factorise de manière unique sous la forme

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$. p_i nombres premiers distincts
$a_i \in \mathbb{N}^*$

$n = \prod_p p^{a_p}$ $a_p \in \mathbb{N}$ presque tous nuls.

ex : $15 = 2^0 . 3^1 . 5^1 . 7^0 . 11^0 \ldots$

Rem : unicité à permutation près des facteurs.

Corollaire : Tout rationnel $x \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit de manière unique

$x = \pm \prod_{p \text{ premier}} p^{a_p}$ $a_p \in \mathbb{Z}$ presque tous nuls.

ex : $x = -\frac{72}{221} = -\frac{2^3 . 3^2}{13 \times 17} = -2^3 3^2 5^0 7^0 11^0 13^{-1} 17^{-1} 19^0 \ldots$

exercice : prouver l'unicité en "chassant" les dénominateurs et se ramener aux entiers.

Racines k-ièmes.

$x \in \mathbb{Q}_+^*$

$\exists ?\ y \in \mathbb{Q}_+^*$ tq $y^k = x$.

Si oui on note $y = \sqrt[k]{x}$

condition nécessaire et suffisante : $y = \prod p^{b_p}$ $b_p \in \mathbb{Z}$ (unique).
(CNS)

$x = \prod p^{a_p}$ $a_p \in \mathbb{Z}$ (unique).

$y^k = \prod p^{kb_p}$

$kb_p = a_p \Leftrightarrow b_p = \frac{1}{k} a_p$ possible ssi $k \mid a_p$.

CNS : pour qu'on puisse trouver $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{Q}_+^*$, il faut et il suffit que les exposants a_p de la décomposition en facteurs premiers soient multiples de k.

Alors $\sqrt[k]{x} = \prod_p p^{\frac{a_p}{k}}$

En particulier $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Conséquence : si $x \in \mathbb{N}^*$ et s'il existe $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{N}$.

Dém : $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_p \geq 0$.

II. Rappels et compléments sur les ensembles ordonnés.

Définition : On appelle ensemble ordonné un ensemble E muni d'une relation binaire $\leq$ qui est une relation d'ordre : (i) $\forall x \in E$ $x \leq x$ (réflexivité).

(ii) $\forall x, y \in E$ $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$. (antisymétrie).

(iii) $\forall x, y, z \in E$, $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Définition : Une relation d'ordre $\leq$ sur E est dit ordre total si
$\forall x, y \in E$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Sinon, on parle d'ordre partiel.

Exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$ relation d'ordre total
- $(\mathbb{Z}, \leq)$ et $(\mathbb{Q}, \leq)$ sont aussi totalement ordonnés.