L3B – Topologie **Mercredi 22 octobre 2014**

Preuve de l'inégalité de Hölder

On appelle exposants conjugués des nombres $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Trouver les exposants conjugués q respectivement de $p = 1$, $p = 3/2$, $p = 2$, $p = 4$, $p = +\infty$.

2. En observant que la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier, montrer que pour tous a, $b \in \mathbb{R}_+$ on a
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$
[*Indication.* Commencer par traiter le cas où a, $b > 0$ et appliquer la fonction exponetielle à un barycentre convenable de $x_1 = p \ln a$, $x_2 = q \ln b$.]

3. Soit $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$. Montrer que pour tout $t > 0$ on a
$$\left| \sum_{1 \leq j \leq n} t x_j y_j \right| \leq \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{p} t^p |x_j|^p + \frac{1}{q} |y_j|^q \right)$$
puis que
$$\left| \sum_{1 \leq j \leq n} x_j y_j \right| \leq t^{p-1} A + t^{-1} B$$
avec des quantités A, $B \in \mathbb{R}_+$ que l'on précisera.

4. Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t^{p-1} A + t^{-1} B$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire l'inégalité de Hölder
$$\left| \sum_{1 \leq j \leq n} x_j y_j \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
[On pourra au choix faire un calcul général lorsque $x \neq 0$, $y \neq 0$, ou commencer par supposer $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_q = 1$ puis raisonner par homogénéité].

5. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $x \mapsto \|x\|_p$. Déterminer la norme $|||\ell|||$ de la forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\ell(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j x_j$ en fonctions des coefficients $a = (a_j)_{1 \leq j \leq n}$.