L3B – Topologie **Corrigé de l'examen du lundi 5 janvier 2015** **13h00-17h00**

A. Questions de cours [5 points].

Soit (E, d) un espace métrique (on pourra si on le souhaite se restreindre au cas d'un espace normé), et A une partie de E.

1) Montrer que si A est compacte, alors A est complète.

Pour vérifier que A est complète, il faut voir que toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A est convergente dans A. Or si A est compacte, on sait par définition des compacts qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $a \in A$ (i.e. (x_n) possède une valeur d'adhérence a). On peut invoquer le résultat du cours disant que si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence a, alors elle est convergente vers a : redémontrons le ici. Le fait que $\lim x_{n_k} = a$ se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0(\varepsilon), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n_k}, a) \leq \varepsilon.$$

Comme (x_n) est de Cauchy, on par ailleurs

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_0(\varepsilon), \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p, q \geq N_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Prenons $n \geq A_0(\varepsilon) := \max(N_0(\varepsilon), k_0(\varepsilon))$. Appliquons les implications ci-dessus à $p = n$ et $q = n_k$ avec $k = A_0(\varepsilon)$. On a d'une part $q = n_k \geq k \geq k_0(\varepsilon)$ donc $d(x_{n_k}, a) \leq \varepsilon$, et d'autre part $p, q \geq N_0(\varepsilon)$, donc

$$d(x_n, x_{n_k}) = d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire montre que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \leq 2\varepsilon,$$

ceci pour tout $n \geq A_0(\varepsilon)$. Ceci montre bien que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in A$.

2) Montrer que si A est compacte, alors A est fermée et bornée.

Supposons A compacte, et soit $x \in \overline{A}$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $x = \lim x_n$. Mais par ailleurs, la compacité de A nous dit que (x_n) possède une valeur d'adhérence $a \in A$, donc une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers une limite $a \in A$. L'unicité de la limite entraîne que $x = a \in A$, on a donc bien $\overline{A} = A$ et A est fermée.

Fixons $x_0 \in A$. Si A était non bornée, on pourrait construire par récurrence sur n une suite $x_n \in A$ telle que $d(x_0, x_n)$ soit aussi grand qu'on veut ; on prend $d(x_0, x_n) \geq d(x_0, x_{n-1}) + 1$. Alors pour $p > q$, $d(x_0, x_p) \geq d(x_0, x_q) + (p - q) \geq d(x_0, x_q) + 1$ et l'inégalité triagulaire implique $d(x_p, x_q) \geq 1$. Ceci entraîne que (x_n) ne peut avoir de sous-suite convergente et contredit l'hypothèse que A soit compacte. Par conséquent A est bornée.

3) La réciproque de 2) est-elle vraie sous des hypothèses particulières pour E ? Est-elle vraie en général ? Justifier la réponse.

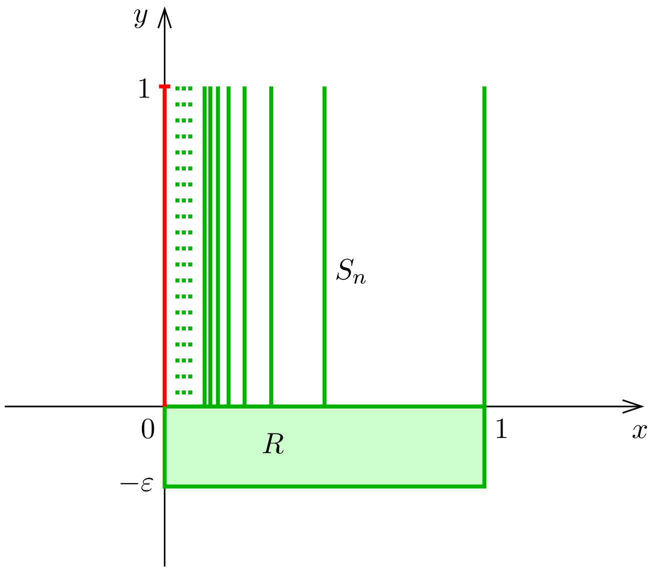
En effet, un théorème très important du cours nous dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie est compacte si et seulement si A est fermée bornée. En revanche, si E est de dimension infinie, la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est fermée et bornée, mais non compacte (c'est le théorème de Riesz, on sait qu'il existe une suite $x_n \in B_f(0, 1)$ telle que $d(x_p, x_q) \geq 1$ pour $p > q$).

4) Soit (F, d') un autre espace métrique et $h : E \to F$ une application continue. Montrer que si A est une partie connexe par arcs de E alors $h(A)$ est une partie connexe par arcs de F.

Soit $x', y' \in h(A)$ des points quelconques. Prenons x, y tels que $h(x) = x'$ et $h(y) = y'$. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to A$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors $h \circ \gamma : [0, 1] \to h(A)$ est un chemin continu tel que $h \circ \gamma(0) = h(x) = x'$ et $h \circ \gamma(1) = h(y) = y'$. Ceci montre que $h(A)$ est connexe par arcs.

B. Exercice [6 points] Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la partie P formée de la réunion du rectangle $R = [0,1] \times [-\varepsilon, 0]$ et des segments verticaux $S_n = \{2^{-n}\} \times]0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

1) Représenter graphiquement la partie P pour $\varepsilon = 1/4$.



$$P = R \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

P est figurée en vert, les petits points indiquent l'infinité des segments verticaux qui ne peuvent tous être tracés. Le segment rouge *n'est pas* dans P. C'est un "peigne infini" !

2) Déterminer l'intérieur P° et l'adhérence $\overline{P}$ de P. On justifiera les résultats.

On a $P^\circ =]0,1[\times]-\varepsilon, 0[$. En effet $U :=]0,1[\times]-\varepsilon, 0[$ est un ouvert contenu dans P donc par définition $U \subset P^\circ$. Pour vérifier que $P^\circ = U$, il nous faut montrer qu'aucun point de $P \setminus U$ n'est dans P°. Or $P \setminus U$ est constitué de la réunion des segments S_n et du bord ∂R du rectangle R. Aucun point $m = (x,y)$ des segments S_n n'est dans P° car quel que soit $\varepsilon > 0$, le disque $B(m,\varepsilon)$ contient des points $m' = (x',y') \notin P$: il suffit de prendre $y' = y \in]0,1]$ et $x' \in]x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2[$ un rationnel qui n'est pas de la forme 2^{-n}. De même, aucun point $m = (x,y)$ dans le bord ∂R du rectangle R n'est dans P° : vérifions le pour les 4 côtés du bord : si $x = 0$ (resp. $x = 1$, resp. $y = -\varepsilon$), le disque $B(m,\varepsilon)$ "déborde" dans le demi-plan $x < 0$ (resp. $x > 1$, resp. $y < -\varepsilon$) ; enfin si $y = 0$, on a des points $m' = (x', y') \in B(m,\varepsilon)$ avec $y' = \varepsilon/2$ et $x' \in]x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2[$ rationnel non de la forme 2^{-n} qui ne sont pas dans P.

L'adhérence de l'ensemble $A = \{2^n\} \subset \mathbb{R}$ est $\overline{A} = A \cup \{0\}$, constitué des valeurs de la suite (2^{-n}) et de sa limite. On voit alors facilement que l'adhérence de $\bigcup S_n = A \times [0,1]$ est l'ensemble fermé

$$\overline{A} \times [0,1] = (A \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1]) = \bigcup S_n \cup (\{0\} \times [0,1]).$$

D'autre part, le rectangle R est fermé. Comme l'adhérence d'une réunion est la réunion des adhérences, on voit que

$$\overline{P} = \overline{R} \cup \overline{\bigcup S_n} = R \cup \bigcup S_n \cup (\{0\} \times [0,1]) = P \cup (\{0\} \times [0,1]).$$

Le segment $\{0\} \times [0,1]$ qu'il faut ajouter à P pour obtenir $\overline{P}$ est figuré en rouge.

3) Comparer du point de vue de l'inclusion P, $\overline{P}$, P°, $\overline{P^\circ}$, $(\overline{P})^\circ$.

Comme P° coïncide avec l'intérieur R° du rectangle, on voit facilement que

$$\overline{P^\circ} = \overline{R^\circ} = R.$$

D'autre part $(\overline{P})^\circ = P^\circ = R^\circ$ par le même raisonnement qye celui développé au 2), car aucun point du segment "additionnel" $\{0\} \times [0,1]$ n'est dans P° (tous les disques $B(m,\varepsilon)$ centrés sur ce segment débordent sur le demi-plan $x < 0$). On en déduit la chaîne d'égalités et d'inclusions strictes

$$P^\circ = (\overline{P})^\circ = R^\circ \subset R = \overline{P^\circ} \subset P \subset \overline{P}.$$

4) P est-elle compacte ? Est-elle connexe par arcs ? On justifiera les réponses.

La partie P n'est pas compacte car P n'est pas fermée. On voit facilement que P est connexe par arcs : le rectangle R étant convexe, tous ses points peuvent être connectés par un segment à l'origine $(0,0)$. Les points $(2^{-n}, y)$ de S_n peuvent être connectés par un segment vertical au point $(2^{-n}, 0) \in R$, puis à $(0,0)$ par un segment horizontal contenu dans R.

5) Existe-t-il une application continue $f : P \to \mathbb{R}$ strictement positive sur les segments S_n et strictement négative sur le rectangle R ?

Non, car l'image $f(P)$ doit être connexe par arcs (cf. question de cours), et dans $\mathbb{R}$ les connexes par arcs sont les intervalles. Or l'hypothèse impliquerait que $f(P)$ n'est pas un intervalle, puisque $f(P)$ contiendrait des réels strictement positifs et négatifs sans contenir 0.

6) Soit P' la partie définie de la même manière que P, obtenue en remplaçant 2^{-n} par $(2^{-n})^2 = 4^{-n}$ et ε par une autre valeur $\varepsilon' > 0$. Trouver un homéomorphisme explicite $\varphi : P \to P'$ (en justifiant la propriété d'homéomorphisme).

On peut poser $\varphi(x, y) = (x^2, y)$ si $x = 2^{-n}$ et $y \geq 0$ et $\varphi(x, y) = (x^2, (\varepsilon'/\varepsilon)y)$ si $y \leq 0$. Les deux formules définissent des fonctions continues dans les deux demi-plans $\{y \geq 0\}$ et $\{y \leq 0\}$ qui se "recollent" sur l'axe $\{y = 0\}$, donc φ est bien continue. Il est trivial de vérifier que φ est une bijection de P sur P' et que sa bijection inverse est donnée par la fonction continue $\psi(x', y') = (\sqrt{x'}, y')$ si $y' \geq 0$ et $\psi(x', y') = (\sqrt{x'}, (\varepsilon/\varepsilon')y')$ si $y' \leq 0$. Ceci montre que $\varphi : P \to P'$ est un homéomorphisme d'inverse $\psi : P' \to P$. [Il y a beaucoup d'autres choix possibles. Si $f_n : [0,1] \to [0,1]$ est une bijection continue croissante quelconque, on pourrait prendre par exemple $\varphi(x, y) = (x^2, f_n(y))$ si $x = 2^{-n}$ et $y \geq 0$, ce qui donnerait $\psi(x', y') = (\sqrt{x'}, f_n^{-1}(y'))$ sur les segments verticaux de P et P'. Du côté $y \leq 0$, on pourrait de même poser $\varphi(x, y) = (g(x), h(y))$ où $g : [0,1] \to [0,1]$ et $h : [-\varepsilon, 0] \to [-\varepsilon', 0]$ sont des bijections continues croissantes avec $g(2^n) = 4^{-n}$. Ceci n'épuise d'ailleurs pas les possibilités, on peut encore "perturber" davantage φ dans le rectangle R ...]

C. Exercice [5 points] Soit $(E, \|\ \ \|)$ un espace normé. Si A, B sont des parties de E, on désigne par $A + B$ l'ensemble des points de la forme $x + y$ avec $x \in A$, $y \in B$.

1) Si l'une des parties A, B (disons A) est un ouvert, montrer que $A + B$ est un ouvert.

Prenons $x + y \in A + B$ avec $x \in A$ et $y \in B$. Comme A est ouvert, il existe une boule $B(x, \varepsilon)$ contenue dans A. Alors, par translation la boule $B(x + y, \varepsilon)$ est contenue dans $A + B$. Ceci montre que $A + B$ est ouvert.

2) On suppose que C est une partie convexe de E. Montrer que $\overline{C}$ est convexe (Indication : considérer une suite de segments $[x_n, y_n]$ avec $x = \lim x_n \in \overline{C}$ et $y = \lim y_n \in \overline{C}$, x_n, $y_n \in C$).

Soit $x, y \in \overline{C}$. Alors $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ avec $x_n, y_n \in C$. Les points du segment $[x, y]$ sont de la forme $(1 - \lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in [0, 1]$ et on a

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \lim (1 - \lambda)x_n + \lambda y_n$$

avec $(1 - \lambda)x_n + \lambda y_n \in C$. Par conséquent $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \overline{C}$ et on voit que $\overline{C}$ est convexe.

3) On suppose que C est une partie convexe de E d'intérieur non vide et soit $B(a, r)$ une boule ouverte contenue dans C. Pour tout $x \in C$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$, montrer que la boule $B((1-\varepsilon)x+\varepsilon a, \varepsilon r)$ est contenue dans C (faire un dessin – on pourra travailler dans $E = \mathbb{R}^2$ si on le souhaite).

Pour tout $x \in C$ et $y = a + u \in B(a, r) \subset C$, $\|u\| < \varepsilon$, le point $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y \in [x, y]$ est encore dans C. Or l'ensemble des points de la forme $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon a + \varepsilon u$ est précisément la boule $B((1 - \varepsilon)x + \varepsilon a, \varepsilon r)$ puisque εu est un vecteur quelconque de norme $< \varepsilon r$.

4) Déduire de 3) que $\overline{C^\circ}$ contient C, puis que $\overline{C^\circ} = \overline{C}$. Montrer aussi que C° est convexe.

Le résultat du 3) montre que C° contient les points de la forme $(1-\varepsilon)x + \varepsilon a$. En prenant $\varepsilon = 2^{-n}$ et $x = \lim_{n\to+\infty}(1-2^{-n})x + 2^{-n}a$, on voit que $x \in \overline{C^\circ}$. Ceci montre que $C \subset \overline{C^\circ}$, et donc $\overline{C} \subset \overline{C^\circ}$ en passant aux adhérences. Comme l'autre inclusion $\overline{C^\circ} \subset \overline{C}$ est triviale, on en déduit que $\overline{C^\circ} = \overline{C}$.

Vérifions enfin que C^0 est convexe. Soient $x, y \in C^\circ$. prenons une boule $B(y,r) \subset C$. Pour $\lambda \in \,]0,1]$, le point $(1-\lambda)x + \lambda y$ est encore dans C° d'après 3) appliqué à $a = y$ et $\varepsilon = \lambda$. Mais c'est encore vrai pour $\lambda = 0$, donc $[x,y] \subset C^\circ$. Ceci montre que C° est convexe.

5) Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}^2$ (non convexe !) telle que $\overline{A} = \mathbb{R}^2$ mais $\overline{A^\circ} = \emptyset$.

Il est facile de voir que $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ répond à la question. Les parties $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ et $A = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \smallsetminus (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ répondent aussi à la question.

D. Problème [7 points]. On désigne par $E = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des applications continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

On considère l'application $\Psi : E \to E$ définie par

$$\Psi(f) = f_1, \qquad f_1(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On admettra (c'est évident d'après les propriétés de l'intégrale) que Ψ est une application linéaire de E dans E.

1) On note u_0 la fonction constante égale à 1. Calculer $u_1 = \Psi(u_0)$ et par récurrence $u_n = \Psi^n(u_0)$ où Ψ^n désigne l'itérée n-ième $\Psi\circ\Psi\circ\ldots\circ\Psi$.

Par intégrations successives, on a $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x-a$, $u_2(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2$, et par récurrence on voit que $u_n(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n$.

2) Si $f_1 = \Psi(f)$, montrer que l'on a $|f_1(x)| \le C(x-a)$ où $C = \|f\|$. Montrer que Ψ est continue et déterminer la norme $|||\Psi|||$.

Une majoration de f_1 donne

$$|f_1(x)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \int_a^x |f(t)|\,dt \le \int_a^x \|f\|\,dt = (x-a)\|f\|.$$

Comme $\Psi(f) = f_1$ par définition, ceci donne en particulier

$$\|\Psi(f)\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_1(x)| \le (b-a)\|f\|,$$

donc $|||\Psi||| \le b-a$. Mais les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités pour $f(x) = u_0(x) = 1$, donc $|||\Psi||| = b-a$. Il en résulte que Ψ est une application linéaire continue.

3) On pose $f_n = \Psi^n(f)$. En utilisant 1), donner une majoration de $|f_n(x)|$ en fonction de $C = \|f\|$, et déterminer la norme $|||\Psi^n|||$.

En faisant des intégrations par parties successives à aprtir de la formule

$$f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)\,dt,$$

on voit par récurrence sur n que

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n!}(x-a)^n\|f\|.$$

On en déduit
$$\|\Psi^n(f)\| = \|f_n\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}(b-a)^n\|f\|,$$
d'où $|||\Psi^n||| \leq \frac{1}{n!}(b-a)^n$. Mais comme les inégalités précédentes sont de nouveau des égalités lorsque $f(x) = u_0(x) = 1$, on voit que
$$|||\Psi^n||| = \frac{1}{n!}(b-a)^n.$$
On notera accessoirement que l'on a ici $|||\Psi^n||| < |||\Psi|||^n$ pour $n \geq 2$.

4) On note $S = C^1([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^1 sur $[a,b]$ (c'est-à-dire continues et ayant une dérivée continue sur $[a,b]$). On prendra ici $[a,b] = [-1,1]$. Montrer que
$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$$
définit une fonction $g_n \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$. Déterminer sa limite $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et montrer que la limite est uniforme (Indication : étudier les variations de la différence $g_n - g$ sur $[0,1]$).
Le sous-espace $S = C^1([-1,1],\mathbb{R})$ est-il fermé dans $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme $\|\ \ \|$? Est-il complet ?

Il est évident que $x \mapsto g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par le théorème sur la composition d'applications dérivables, donc en particulier $g_n \in S = C^1([-1,1],\mathbb{R})$. On a
$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$
La limite g est continue et la suite $(g_n(x))$ est décroissante, donc on sait que la convergence doit être uniforme d'après le théorème de Dini. Vérifions le directement. Une étude des variations de $g_n - g$ montre que $g_n(x) - g(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x$ est de dérivée $g_n'(x) = x(x^2 + \frac{1}{n^2})^{-1/2} - 1 < 0$ sur $[0,1]$, par conséquent c'est en $x = 0$ que $g_n - g$ atteint sa valeur maximale, égale à $1/n$. Du fait que $g_n - g$ est paire, on voit que $\|g_n - g\| = 1/n$ et la convergence est bien uniforme. Cependant g n'est pas dérvable en 0, donc $g \notin S$. On en conclut que S n'est pas fermé dans E, et que S n'est pas un espace normé complet (toute partie complète étant nécessairement fermée).

5) Montrer que Ψ est une bijection de $E = C([a,b],\mathbb{R})$ sur le sous-espace $S_0 \subset S$ des fonctions $h \in S$ telles que $h(0) = 0$, et déterminer l'application linéaire inverse $\Psi^{-1} : S_0 \to C([a,b],\mathbb{R})$.

L'intégration $h = \Psi(f)$ d'une fonction continue $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ donne une fonction h telle que $h'(x) = f(x)$, donc $h \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $h(a) = 0$, par conséquent $h \in S_0$. On voit immédiatement que $\Psi : E \to S_0$ est bijective, avec $\Psi^{-1}(h) = f = h'$, donc $\Psi^{-1} : S_0 \to E$ n'est autre que l'opérateur D de dérivation des fonctions, restreint à S_0.

6) On pose $h_n(x) = (x-a)^n$, $n \geq 1$. Calculer $\Psi^{-1}(h_n)$ et comparer les normes $\|h_n\|$ et $\|\Psi^{-1}(h_n)\|$. L'application linéaire $\Psi^{-1} : S_0 \to C([a,b],\mathbb{R})$ est-elle continue si on munit S_0 et $C([a,b],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\ \ \|$?

Nous avons $\Psi^{-1}(h_n) = h_n'$ et $h_n'(x) = n(x-a)^{n-1}$, donc
$$\|h_n\| = \sup_{x\in[a,b]} |h_n(x)| = (b-a)^n, \qquad \|h_n'\| = \sup_{x\in[a,b]} |h_n'(x)| = n(b-a)^{n-1}.$$
Le rapport
$$\frac{\|\Psi^{-1}(h_n)\|}{\|h_n\|} = \frac{\|h_n'\|}{\|h_n\|} = \frac{n(b-a)^{n-1}}{(b-a)^n} = \frac{n}{b-a}$$
tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre que la norme $|||\Psi^{-1}|||$ est infinie. L'application linéaire $\Psi^{-1} = D : S_0 \to E$ n'est donc pas continue pour la norme $\|\bullet\|$.

Remarque. Nous avons ici un exemple d'application linéaire continue bijective $\Psi : E \to S_0$ entre espaces normés (E est même un espace de Banach), dont l'inverse $\Psi^{-1} : S_0 \to E$ n'est pas continue – ceci contraste avec le résultat connu pour les fonctions continues d'une variable réelle. Cela étant (théorème dû à Banach !), on démontre que cette difficulté ne se présente jamais lorsque *les deux espaces de départ et d'arrivée* sont des espaces de Banach ; l'exemple précédent ne contredit pas ce résultat, car en fait la question 4) permet de voir que S_0 n'est pas un espace de Banach : si $[a, b] = [-1, 1]$, $f_n(x) = g_n(x) - g_n(-1)$ définit une fonction $f_n \in S_0$ qui converge uniformément vers une limite $f(x) = |x| - 1$ telle que $f \notin S_0$.