L3B – Topologie **Contrôle continu du 8 décembre 2014** **10h30-12h30**

Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [4 points]

1) Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

a) Donner une définition d'une partie compacte A de E.

b) Soit $f : (E, ||.||) \to \mathbb{R}$ continue et une partie compacte K de E. Montrer que $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

2) Soit A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$ ($||(x,y)||_\infty = \max(|x|, |y|)$). En admettant le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, montrer que A est compacte.

Exercice 1. [8 points] On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$: le plan complexe $\mathbb{C}$ muni de la norme donnée par le module défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Pour $0 \leq t \leq 2$, on définit la partie $A_t \subset \mathbb{C}$ par $A_t = B_f(i, 1) \cup]t, 2]$
(A_t est donc la réunion de la boule fermé $B_f(i, 1)$ et de l'intervalle de réels $]t, 2]$).

1) Dessiner A_t dans les deux cas particuliers $t = 0$ et $t = 1$.

2) Déterminer selon la valeur de $t \in [0, 2]$ l'intérieur $\overset{\circ}{A_t}$.

3) Faire la même chose pour l'adhérence $\bar{A}_t$. Pour quels $t \in [0, 2]$, la partie A_t est-elle compacte ?

4) Soit la fonction $f(z) = \sup\limits_{a \in A_0} |z - a|$.

a) Pourquoi $f(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$?

b) Montrer que f est continue.

c) Justifier l'existence de $\delta = \sup\limits_{a \in A_0} f(z)$.

d) Est-ce que δ est atteint ? Que vaut δ ?

Exercice 2. [6 points] Soit $E = C^0[0, 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme $||.||_\infty$ définie par $||f||_\infty = \sup\{|f(t)| \,\big|\, t \in [0, 1]\}$.

On considère l'application $\varphi\colon f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que φ est linéaire et continue. Est-ce que $F = \operatorname{Ker} \varphi$ est fermé ? complet ?

2) Montrer que l'ensemble $A = \{f \in E \mid -2 < \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt < 2\}$ est ouvert.

3) Donner son adhérence $\overline{A}$ et sa frontière ∂A.

4) Montrer que $\overline{A}$ n'est pas compacte [on pourra montrer que A n'est pas borné].

5) Donner un nombre $r > 0$ pour lequel $B_f(0, r) \subset A$.

6) Est-ce que la partie $B = \overline{A} \cap \{f \in E \mid \|f\|_\infty \leq 3\}$ est compacte ?

Exercice 3. [4 points] On note $E = l^1$ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles dont la série $\sum |u_n|$ converge muni de la norme $|| \cdot ||_1$ définie par $||(u_n)||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.
On considère l'application $\varphi : (u_n) \in (E, ||.||_1) \mapsto (v_n) \in (E, ||.||_1)$, où $v_n = u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que φ est une application linéaire continue et déterminer la norme $|||\varphi|||$.

2) On considère l'application linéaire $\psi = \varphi - id$. Déterminer la norme $|||\psi|||$.
[on pourra considérer pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la suite $u_{k,n} = (-1)^n$ si $n \leq k$ et $u_{k,n} = 0$ si $n > k$].

L3B – Topologie **Corrigé du contrôle continu du 8 décembre 2014**

Questions de cours Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1)a) Une partie A de E est compacte si et seulement si de toute suite (a_n) d'éléments de A on peut extraire une suite convergente c'est-à-dire : il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(a_{\varphi(n)})$ converge.
La compacité est aussi équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert $O_i, i \in I$ (i.e. les $O_i \subset E$ sont ouverts et $A \subset \cup_{i\in I} O_i$) on peut extraire un sous-recouvrement fini (i.e. $\exists$ un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $A \subset \cup_{i\in J} O_i$).

1)b) Soit K une partie compacte de E. Soit (y_n) une suite de $f(K)$, par définition pour chaque n, on peut choisir x_n tel que $f(x_n) = y_n$. La proprité de Bolzano-Weierstrass satisfaite par K dit qu'on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ ($\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) convergeant vers $x \in K$. La continuité de f entraine que $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x) \in f(K)$. La proprité de Bolzano-Weierstrass est donc satisfaite par $f(K)$ qui est bien compact.

2) Soit une suite $u_n = (x_n, y_n) \in A$. Comme A est bornée, les suites de réels x_n et y_n sont bornées. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, on peut extraire une suite convergente $x_{\varphi(n)}$. Par le même théorème, de la suite bornée $y_{\varphi(n)}$, on peut extraire une suite $y_{\varphi(\psi(n))}$ convergente. La suite $x_{\varphi(\psi(n))}$ extraite de la une suite convergente $x_{\varphi(n)}$ reste convergente. Au total, la suite $u_{\varphi(\psi(n))} = (x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})$ est une suite extraite de u_n convergente. Sa limite est dans A car A est fermé. Donc la propiété de Bolzano-Weierstrass est satisfaite par A et donc A est compacte.

Exercice 1. 1)

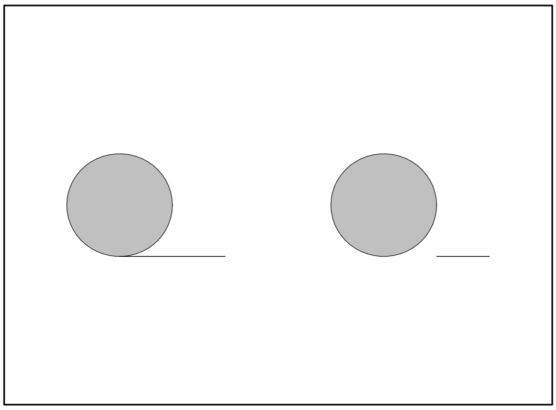

FIGURE 1 – Les parties A_0 et A_1.

2) Pour tout $t \in [0, 2]$ l'intérieur $\overset{\circ}{A_t} = B(i, 1)$. En effet, on a toujours que l'intérieur d'une réunion de deux ensembles contient la réunion des intérieurs et on vérifie sans difficulté que pour un point z du cercle $\partial\bar{B}(i, 1)$ il n'y a aucune boule ouverte $B(z, \varepsilon)$ centrée en ce point incluse dans A_t.

3) De manière générale l'adhérence d'une réunion de deux ensembles est la réunion des adhérences de ces ensembles. Donc pour tout $t \in [0, 2]$ l'adhérence $\bar{A}_t = B_f(i, 1) \cup [t, 2]$.

Dans $(\mathbb{C}, |.|)$ la partie bornée A_t explicitement $|a| \leq 2$ pour tout $a \in A$ est compacte ssi elle est fermée c'est à dire si $\bar{A}_t = B_f(i, 1) \cup [t, 2] = A_t = B_f(i, 1) \cup]t, 2]$ ce qui revient à $t \in B_f(i, 1)$ et donc $t = 0$.

4)a) Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $|z - a| \leq |z| + |a| \leq |z| + 2$ pour tout $a \in A_0$ donc $f(z) = \sup_{a\in A_0} |z - a|$ est bien défini et $f(z) \leq |z| + 2$.

4)b) Montrons que f est 1-lipschitzienne. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, par définition des bornes supérieures,
$\forall\varepsilon > 0$, $\exists a, a' \in A_0$ tels que $f(z) - \varepsilon \leq |z - a|$ et $f(z') - \varepsilon \leq |z' - a'|$ donc on a
$\forall\varepsilon > 0$, $f(z)-\varepsilon \leq |z-a| = |(z-z')+(z'-a)| \leq |z-z'|+|z'-a| \leq |z-z'|+f(z')$ donc $f(z) \leq |z-z'|+f(z')$ en changeant le rôle de z et z' de même $f(z') \leq |z - z'| + f(z)$ qui donne $|f(z) - f(z')| \leq |z - z'|$. Donc f est 1-lipschitzienne et donc continue.

4)c) Comme f est continue et A_0 compact $\delta = \sup_{a\in A_0} f(z)$ existe et est atteint.

4)d) Déterminons le diamètre $\delta = \sup_{u,v\in A_0} |u-v|$: il est clair géométriquement (et justifiable à l'aide de l'inégalité triangulaire) que tout point de l'ensemble A_0 est contenu dans le disque D de diamètre ab où $a = 2$ et $b = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} + (1+\dfrac{1}{\sqrt{5}})i$ qui donne $\delta = 1+\sqrt{5}$.

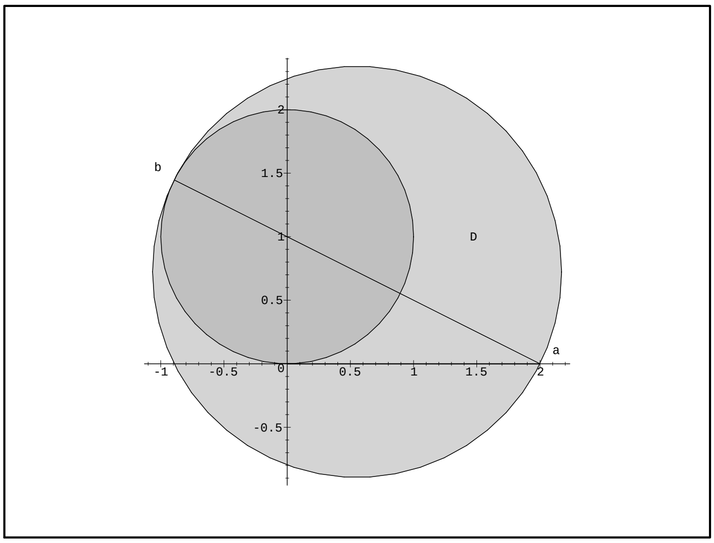

FIGURE 2 – Détermination de δ.

Exercice 2. 1) φ est clairement une forme linéaire et on a
$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 ||f||_\infty\,dt = ||f||_\infty$ donc φ est continue.
Donc $F = \operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme d'après le cours, $(E, ||.||_\infty)$ est complet il en est de même du sous espace fermé F.

2) $A = \{f \in E \mid -2 < \int_0^1 f(t)\,dt < 2\} = \varphi^{-1}(]-2,2[)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

3) $A \subset \varphi^{-1}([-2,2])$ qui est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Donc $\overline{A} \subset A' = \varphi^{-1}([-2,2])$. Montrons qu'on a aussi $A' \subset \overline{A}$. En effet, si $f \in A'$, pour tout entier $n > 0$ on a $f_n = (1-1/n)f \in A$ du fait que
$-2 \leq \varphi(f) \leq 2 \Rightarrow -(1-1/n) \leq \varphi(f_n) = (1-1/n)\varphi(f) \leq (1-1/n) \Rightarrow -2 \leq \varphi(f_n) \leq 2$.
Or $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ donc $f \in \overline{A}$. On a donc $\partial A = \varphi^{-1}(\{-2,2\})$.

4) Le sous espace vectoriel F est inclus dans $\overline{A}$ et $\dim F > 0$ (par exemple la fonction $f(x) = 2x-1$ est dans $F \setminus \{0\}$) et donc F n'est pas borné donc $\overline{A}$ n'est pas compacte.

5) D'après 1) $|\varphi(f)| \leq ||f||_\infty$ donc si $f \in B_f(0,1)$ alors $|\varphi(f)| \leq 1$ donc $f \in A$. On a donc $B_f(0,1) \subset A$.

6) $B_f(0,1) \subset B = \overline{A} \cap \{f \in E \mid \|f\|_\infty \leq 3\}$. Si B était compact, $B_f(0,1)$ qui est fermé le serait aussi. Or comme E est de dimension infinie, le théorème de Rietz assure que la boule fermée $B_f(0,1)$ n'est pas compacte donc B n'est pas compact.

Exercice 3. 1) On a $||(v_n)||_1 = \sum_{n=0}^\infty |u_{n+1}| = \sum_{n=0}^\infty |u_{n+1}| = \sum_{n=1}^\infty |u_n| \leq ||(u_n)||_1$ donc φ qui est évidemment linéaire est continue de norme $|||\varphi||| \leq 1$. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, on a $||(v_n)||_1 = \sum_{n=1}^\infty |u_n| = ||(u_n)||_1$ donc $|||\varphi||| = 1$.

2) On a $|||\psi||| \leq |||\varphi||| + |||id||| = 2$ (inégalité triangulaire satisfaite par $|||.|||$ norme sur l'espace des applications continues de $(E, ||.||_1)$ dans lui-même).
Considérons pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la suite $u_{k,n} = (-1)^n$ si $n \leq k$ et $u_{k,n} = 0$ si $n > k$.
Pour k fixé, $||(u_{k,n})||_1 = k+1$ et $||\psi((u_{k,n}))||_1 = \sum_{n=0}^{k-1} |u_{k,n+1} - u_{k,n}| + |u_{k,k}| = 2k+1 \leq ||(u_n)||_1$ donc $|||\psi||| = \sup \dfrac{||\psi(u)||_1}{||u||_1} \geq \dfrac{2k+1}{k+1}$ pour tout entier k et donc finalement $|||\psi||| = 2$.