Théorème d'Ascoli

Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques. On munit l'espace $\mathcal{C}(X,Y)$ des applications continues $f : X \to Y$ de la distance de la convergence uniforme

$$\delta_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d'(f(x),g(x)).$$

Ceci fait de $(\mathcal{C}(X,Y),\delta_\infty)$ un espace métrique, et le critère de Cauchy uniforme montre facilement que $(\mathcal{C}(X,Y),\delta_\infty)$ est complet dès que Y est complet. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \omega(t)$ une fonction croissante telle que $\lim_{t\to 0+}\omega(t) = 0$. On dit que $f : X \to Y$ admet ω comme *module de continuité* si on a

$$\forall x_1,x_2 \in X, \qquad d'(f(x_1),f(x_2)) \leqslant \omega\big(d(x_1,x_2)\big).$$

Cette condition entraîne que f est uniformément continue sur X [en fait il est facile de voir que l'existence d'un module de continuité ω est équivalent à l'uniforme continuité de f, mais nous n'utiliserons pas cette observation ici]. Les exemples les plus usuels sont $\omega(t) = \lambda t$ (fonction λ-lipschitzienne) et $\omega(t) = Ct^\alpha$ (fonction α-höldérienne de constante $C \geqslant 0$, avec $\alpha > 0$). On notera $\mathcal{C}_\omega(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues $f : X \to Y$ admettant ω comme module de continuité.

Théorème (Ascoli)**.** *On suppose que X,Y sont des espaces métriques* compacts. *Soit $f_n : X \to Y$ une suite d'applications continues ayant toutes le même module de continuité ω (lorsqu'il existe un tel module de continuité commun, on dit que la suite (f_n) est uniformément équicontinue). Alors on peut extraire de f_n une sous-suite f_{n_k} uniformément convergente, et la limite f admet encore ω comme module de continuité.*

Une autre manière d'exprimer le théorème d'Ascoli est la suivante.

Formulation équivalente. *Si X,Y sont compacts et si ω est un module de continuité, alors $\mathcal{C}_\omega(X,Y)$ est une partie compacte de $(\mathcal{C}(X,Y),\delta_\infty)$.*

Démonstration. On construit par récurrence des parties infinies

$$S_0 = \mathbb{N} \supset S_1 \supset \ldots \supset S_{k-1} \supset S_k \supset \ldots$$

telles que la sous-suite $(f_n)_{n\in S_k}$ ait des oscillations de plus en plus faibles.

Supposons S_{k-1} construite, $k \geq 1$. Comme X, Y sont compacts, il existe des recouvrements finis de X (resp. de Y) par des boules ouvertes $(B_i)_{i\in I}$, resp. $(B'_j)_{j\in J}$, de rayon $r = 1/k$, resp. $r' = \omega(1/k)$. Notons $I = \{1,2,\ldots,N\}$ et x_i le centre de B_i (en fait I, J, N dépendent de k, mais on n'écrira pas I_k, J_k, N_k pour ne pas alourdir les notations). Soit n un indice fixé. Pour tout $i \in I$ il existe un indice $j_n(i) \in J$ tel que $f_n(x_i) \in B'_{j_n(i)}$ (on choisit disons le plus petit indice $j_n(i)$ possible).

On considère l'application

$$\Psi : S_{k-1} \longrightarrow J^N, \qquad n \longmapsto (j_n(1),\ldots,j_n(N)).$$

On a $S_{k-1} = \bigcup_{m \in J^N} \Psi^{-1}(m)$, et d'après le principe des boîtes de Dirichlet (ou encore principe des "trous de pigeons"), du fait que S_{k-1} est infini et que J^N est fini, l'un au moins des éléments $m = (m_1, \ldots, m_N) \in J^N$ admet pour image réciproque $\Psi^{-1}(m)$ une partie infinie de S_{k-1} : on note $S_k = \Psi^{-1}(m)$ cette partie. Ceci signifie que pour tout $n \in S_k$ on a

$$\Psi(n) = m \iff (j_n(1), \ldots, j_n(N)) = (m_1, \ldots, m_N),$$

et donc par définition $f_n(x_i) \in B'_{m_i}$. En particulier, pour tous $p, q \in S_k$ on a $f_p(x_i),\ f_q(x_i) \in B'_{m_i}$ (c'est la même boule pour les deux images), donc

$$(*) \qquad \forall p, q \in S_k, \quad d'(f_p(x_i), f_q(x_i)) \le \operatorname{diam} B'_{m_i} \le 2r' = 2\,\omega(1/k).$$

Soit $x \in X$ un point quelconque. Il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$, d'où $d(x, x_i) < 1/k$. L'hypothèse que les f_n admettent toutes ω comme module de continuité entraîne

$$(**) \qquad d'(f_p(x), f_p(x_i)) \leqslant \omega(1/k), \quad d'(f_q(x), f_q(x_i)) \leqslant \omega(1/k).$$

En combinant $(*)$ et $(**)$, l'inégalité triangulaire implique alors

$$\forall p, q \in S_k, \quad d'(f_p(x), f_q(x)) \le 4\,\omega(1/k).$$

Désignons par n_k le k-ième élément de S_k (ce procédé est appelé "procédé d'extraction d'une sous-suite diagonale"). Pour $\ell \ge k$ on a $n_\ell \in S_\ell \subset S_k$, et aussi $n_k \in S_k$, donc

$$(***) \qquad d'(f_{n_\ell}(x), f_{n_k}(x)) \le 4\,\omega(1/k).$$

Ceci entraîne que $f_{n_k}(x)$ est une suite de Cauchy dans Y pour tout $x \in X$. Comme Y est compact, Y est aussi complet, donc $f_{n_k}(x)$ converge vers une limite $f(x)$. Quand $\ell \to +\infty$, $(***)$ implique à la limite $\delta_\infty(f, f_{n_k}) \le 4\,\omega(1/k)$. On voit donc que f_{n_k} converge uniformément vers f. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{C}_\omega(X, Y)$ par passage à la limite dans l'inégalité $d'(f_{n_k}(x_1), f_{n_k}(x_2)) \leqslant \omega(d(x_1, x_2))$. □

Exercice. On pose $X = [-\pi, \pi]$, $Y = [-1, 1]$, $f_n(x) = \cos nx$. Vérifier que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_p(x) - f_q(x))^2 dx = 1$$

et en déduire que $\delta_\infty(f_p, f_q) \ge 1$ si $p \ne q$. Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport $\lambda = n$, mais observer que (f_n) n'admet aucune sous-suite convergente pour δ_∞. L'espace $\mathrm{Lip}(X, Y)$ des applications lipschitziennes $X \to Y$ n'est donc pas compact en général, mais d'après le théorème d'Ascoli, si on précise la constante λ, l'ensemble $\mathrm{Lip}_\lambda(X, Y)$ des applications λ-lipschitziennes est bien compact.