Dans toutes les questions qui suivent (E, d) désigne un espace métrique (qui peut satisfaire certaines propriétés supplémentaires précisées à chaque question). On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r dans E. Par ailleurs, "ssi" est l'abréviation usuelle pour "si et seulement si".

1. On dit qu'un point x d'une partie A de E est un point isolé de A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(x, \varepsilon)$ se réduise au singleton $\{x\}$ (ce qui revient à dire que $\{x\}$ est un ouvert de A). Montrer l'équivalence des propriétés (a,b,c) suivantes :

(a) Tout point de A est isolé.

(b) Comme sous-espace de E, A est un espace discret.

(c) Une suite (x_n) de points de A est convergente dans A ssi elle est constante à partir d'un certain rang.

Montrer que $A = \{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est un sous-espace discret de $\mathbb{R}$ (bien que cette partie admette un point adhérent situé hors de A).

2. On désigne par K *l'ensemble triadique de Cantor*, défini comme l'ensemble des réels de la forme $x = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p 3^{-p}$ avec $a_p = 0$ ou $a_p = 2$ en base 3 (c'est-à-dire les réels de $[0, 1]$ dont le développement propre ou impropre en base 3 ne comporte pas de chiffre 1, par exemple $1 = 0,2222...$ en base 3). On désigne par K_n l'ensemble des développements propres ou impropres tels que $a_p \neq 1$ pour $1 \leq p \leq n$ et $a_p \in \{0, 1, 2\}$ pour $p > n$. Dessiner K_1, K_2, K_3. Montrer que K_n est une réunion de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} obtenus en fixant les valeurs de $a_1, ..., a_n$, et que $K = \bigcap K_n$. En déduire que K est compact pour la distance et la topologie usuelles sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que K n'a pas de point isolé (si $x \in K$, on pourra considérer le réel $x_n \in K$ obtenu en changeant le seul chiffre a_n (on remplace donc a_n par $2 - a_n$ et les autres a_p restent inchangés).

4. Montrer que l'application $\alpha_n : K \ni x \mapsto \alpha_n(x) = \frac{1}{2}a_n \in \{0, 1\}$ (a_n = n-ième chiffre en base 3 du développement de x) est continue (on pourra observer que α_n est constante sur chaque intervalle constituant K_n). En déduire que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)\, 2^{-n}$ constitue une surjection continue de K sur l'intervalle $[0, 1]$, puis que K n'est pas dénombrable.

5. Montrer que $[0, 1] \smallsetminus K$ est dense dans $[0, 1]$ (indication : changer les chiffres lointains dans le développement de $x \in [0, 1]$ pour obtenir x' proche tel que $x' \notin K$). Montrer aussi que K est totalement discontinu, c'est-à-dire que les composantes connexes de K sont toutes réduites à un seul point.

6. On suppose que E est compact. On désigne par $C_\varepsilon(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation "x et y peuvent être reliés par une ε-chaîne" ; on rappelle (résultat du cours) que ces classes sont à la fois ouvertes et fermées. On se propose de montrer ici que si $\varepsilon_n > 0$ est une suite décroissante tendant vers 0, alors l'intersection $\widetilde{C}(x) = \bigcap C_{\varepsilon_n}(x)$ coïncide avec la composante connexe $C(x)$ de x dans E.

(a) Montrer que $C(x) \subset C_\varepsilon(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ (considérer la décomposition de $C(x)$ formée par l'intersection avec $C_\varepsilon(x)$ et son complémentaire).

(b) Pour tout $\delta > 0$, soit U_δ l'ouvert des points y tels que $d(y, \widetilde{C}(x)) < \delta$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tels que $C_{\varepsilon_n}(x) \subset U_\delta$ pour $n \geq n_0$ (considérer l'intersection des fermés $C_{\varepsilon_n}(x) \cap \complement U_\delta$ dans E).

(c) Dans le résultat du (b), on choisit n tel que $\varepsilon_n < \delta$. Montrer que deux points quelconques y, z de $\widetilde{C}(x)$ peuvent être reliés par une (3δ)-chaîne dans $\widetilde{C}(x)$ (faire un dessin !). En déduire que $\widetilde{C}(x)$ est connexe et que $\widetilde{C}(x) = C(x)$.

7. (a) On suppose que E est compact et totalement discontinu. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partition de E en un nombre fini N de parties ouvertes et fermées A_i, $0 \leq i < N$, de diamètre $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ (indication : d'après 6, les parties ouvertes et fermées $C_{\varepsilon_n}(x)$ ont un diamètre aussi petit que l'on veut ; utiliser Borel-Lebesgue pour conclure).

(b) Réciproquement, si un espace compact E peut se partitionner ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il est totalement discontinu.

8. On se propose de montrer le théorème suivant : un espace métrique E est homéomorphe à l'ensemble de Cantor K ssi il est *compact*, *totalement discontinu* et *sans point isolé*.

(a) Montrer que les propriétés soulignées ci-dessus sont invariantes par homéomorphisme, et en conclure qu'un espace E homéomorphe à l'ensemble de Cantor K les vérifie.

On suppose désormais que E est un espace compact, totalement discontinu et sans point isolé.

(b) Dans les partitions (A_i) obtenues à l'exercice 7, montrer qu'un point isolé de A_i serait aussi un point isolé de E, et en déduire que chaque partie A_i est elle-même une partie compacte totalement discontinue et sans point isolé.

(c) Montrer dans le résultat de 7 que quitte à rédécouper certains A_i (ou à regrouper leurs morceaux !) on peut se ramener au cas où le nombre N de parties A_i est une puissance de 2.

(d) Montrer qu'on peut trouver par récurrence des entiers k_p et des parties A_{i_1}, $A_{i_1 i_2}$, $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $0 \leq i_p < 2^{k_p}$, ayant les propriétés suivantes : $(A_{i_1})_{0 \leq i_1 < 2^{k_1}}$ est une partition de E en parties ouvertes et fermées de diamètre $\leq 2^{-1}$, ... , $(A_{i_1 i_2 \ldots i_p})_{0 \leq i_p < 2^{k_p}}$ est une partition de $A_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}}$ en parties ouvertes et fermées de diamètre $< 2^{-p}$.

(e) On écrit chaque entier $i_s = 0, 1, ..., 2^{k_s} - 1$ de la question (d) en base 2 à l'aide de k_s chiffres binaires, en commençant si nécessaire par des 0 de manière à avoir exactement k_s chiffres (par exemple 000000101 est le codage du nombre 5 avec $k_s = 9$). La suite d'indices $i_1 i_2 ... i_p$ se code alors comme une suite de $k_1 + ... + k_p$ chiffres 0 ou 1. Par construction, chaque point $x \in E$ appartient à une unique suite de parties $(A_{i_1 i_2 \ldots i_p})_{p \in \mathbb{N}}$, et on obtient une représentation de la suite d'entiers $i_1 i_2 ... i_p ...$ par une suite infinie de chiffres binaires $a_1, a_2, \ldots, a_n, ... \in \{0, 1\}$ (les entiers i_s sont obtenus en prenant les tronçons successifs de k_s chiffres binaires). Montrer que l'application

$$\varphi : E \ni x \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 a_n 3^{-n} \in K$$

est continue (pour n fixé, et p fixé tel que $k_1 + ... + k_p \geq n$, observer que $x \mapsto u_n(x) = a_n$ est constante sur chacune des parties $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ et donc continue sur E).

(f) Montrer que si $|\varphi(x) - \varphi(y)| < 3^{-n}$ avec $n = k_1 + \ldots + k_p$, alors $d(x, y) < 2^{-p}$. En déduire que φ est injective et que φ est un homéomorphisme.

9. Montrer que $K \times K$ est homéomorphe à K (et même que pour tout n, K^n est homéomorphe à K). Trouver un homéomorphisme explicite simple de K sur $K \times K$ à l'aide des développements en base 3.