Université Joseph Fourier **20 décembre 2013**
L3B – Topologie **Corrigé du devoir libre de préparation à l'examen**

1. On dit qu'un point x d'une partie A de E est un point isolé de A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(x, \varepsilon)$ se réduise au singleton $\{x\}$ (ce qui revient à dire que $\{x\}$ est un ouvert de A). Montrons l'équivalence des propriétés (a,b,c) suivantes :

(a) Tout point de A est isolé.

(b) Comme sous-espace de E, A est un espace discret.

(c) Une suite (x_n) de points de A est convergente dans A ssi elle est constante à partir d'un certain rang.

(a) $\Rightarrow$ (b). Dire que $x \in A$ est isolé signifie qu'il existe $\varepsilon = \varepsilon_x > 0$ assez petit tel que la boule ouverte $B_A(x, \varepsilon_x) = \{y \in A\,;\ d(x, y) < \varepsilon_x\}$ se réduise à $\{x\}$. Par conséquent, pour toute partie U de A et tout $x \in U$ on a $B_A(x, \varepsilon_x) = \{x\} \subset U$, et U est un ouvert. Par définition E est donc un espace discret.

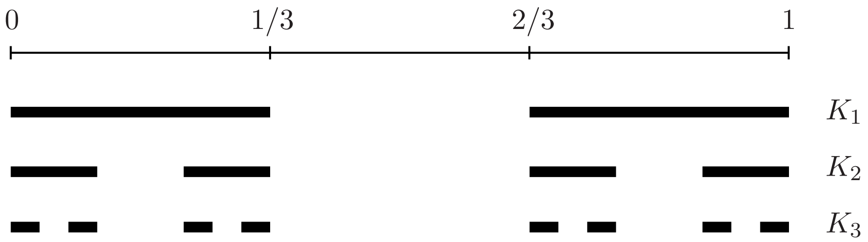
(b) $\Rightarrow$ (c) Supposons que A soit une partie discrète de E, et soit (x_n) une suite de points de A qui converge vers un point $a \in A$. L'ensemble $\{a\}$ étant ouvert dans A, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_A(a, \varepsilon) = \{a\}$. La convergence de la suite (x_n) nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $d(x_n, a) < \varepsilon$, c'est-à-dire $x_n \in B_A(a, \varepsilon)$. On a donc $x_n = a$ pour $n \geq N$.

(c) $\Rightarrow$ (a). S'il existait un point $x \in A$ non isolé, on pourrait trouver par récurrence pour tout entier n un point $x_n \in A$, $x_n \neq x$, avec $d(x_n, x)$ aussi petit qu'on veut, disons $d(x_0, x) < 1$ et $d(x_n, x) < \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x)$. Mais alors $d(x_n, x) < 1/2^n$ et (x_n) serait une suite convergeant vers x, formée de points tous distincts, ce qui contredit (c).

Notons que la partie $A = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est un sous-espace discret de $\mathbb{R}$, puisque la boule ouverte $B_A(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)})$ se réduit à $\{\frac{1}{n}\}$ $\big[$ le point de A le plus proche de $\frac{1}{n}$ est $\frac{1}{n+1}$, qui est à distance $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1}$ $\big]$. Cependant la suite $n \mapsto x_n = \frac{1}{n}$ converge vers $0 \notin A$ sans pour autant être constante à partir d'un rang quelconque.

2. On désigne par K *l'ensemble triadique de Cantor*, définie comme l'ensemble des réels de la forme $x = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p 3^{-p}$ avec $a_p = 0$ ou $a_p = 2$ en base 3 (c'est-à-dire les réels de $[0, 1]$ dont le développement propre ou impropre en base 3 ne comporte pas de chiffre 1, par exemple $1 = 0,2222...$ en base 3). On désigne par K_n l'ensemble des développements propres ou impropres tels que $a_p \neq 1$ pour $1 \leq p \leq n$ et $a_p \in \{0, 1, 2\}$ pour $p > n$.

Si on écrit $x = y + z$, $y = \sum_{p=1}^{n} a_p 3^{-p}$, $a_p \in \{0, 2\}$, et $z = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p 3^{-p}$, $a_p \in \{0, 1, 2\}$, alors on voit que $z = 3^{-n} \times 0, a_{n+1} a_{n+2}...$ est un réel quelconque de $[0, 3^{-n}]$ et que $x \in [y, y + 3^{-n}]$. Il est donc clair que K_n est la réunion des 2^n intervalles fermés $J_{y,n} = [y, y + 3^{-n}]$ où y décrit l'ensemble des 2^n nombres admettant un développement triadique fini $y = 0, a_1 \ldots a_n$ avec $a_p = 0$ ou $a_p = 2$. On obtient ainsi :



D'autre part on a par définition $K = \bigcap K_n$ (on notera que l'écriture triadique d'un élément de K est unique si on impose $a_p \in \{0, 2\}$, car on ne peut avoir à la fois un développement propre et impropre formés tous de 0 et de 2, puisque la substitution d'un développement impropre $a_j...0222...$ par un développement propre ferait apparaître un 1). Comme $(K_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de parties fermées de $[0, 1]$, leur intersection K est une partie fermée de l'espace compact $[0, 1]$, par conséquent K est compact.

3. Montrons que K n'a pas de point isolé.

Si $x \in K$, considérons le réel $x_n \in K$ obtenu en changeant le seul chiffre a_n (on remplace donc a_n par $2 - a_n$ et les autres a_p restent inchangés). Par définition $x_n = x \pm 2 \times 3^{-n} \in K$. La suite (x_n) forme une suite de points deux à deux distincts de K tels que $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$, par conséquent le point $x \in K$ n'est pas isolé.

4. Montrer que l'application $\alpha_n : K \ni x \mapsto \alpha_n(x) = \frac{1}{2}a_n \in \{0,1\}$ (a_n = n-ième chiffre en base 3 du développement de x) est continue. En déduire que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)\, 2^{-n}$ constitue une surjection continue de K sur l'intervalle $[0,1]$, puis que K n'est pas dénombrable.

Pour cela on observe que α_n est constante sur chaque intervalle constituant K_n ; comme ces intervalles sont fermés et sans bornes communes, la continuité de α_n en résulte de façon triviale. En déduire que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)\, 2^{-n}$ est la somme d'une série normalement convergente en norme $\|\ .\ \|_\infty$ sur K, puisque $\|x \mapsto \alpha_n(x)\, 2^{-n}\|_\infty = 2^{-n}$. On en déduit d'après le cours que f est continue sur K. De plus, si $x = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p 3^{-p}$ avec $a_p \in \{0,2\}$, et si $b_p = \frac{1}{2}a_p \in \{0,1\}$ est le chiffre binaire correspondant, alors $\alpha_n(x) = b_n$, donc $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n}$ est un développement binaire arbitraire d'un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$. On en conclut que $f : K \to [0,1]$ est surjective, puis que $\operatorname{card} K \geq \operatorname{card}\,[0,1] > \operatorname{card} \mathbb{N}$ (d'après le cours, $[0,1]$ n'est pas dénombrable).

5. Montrer que $[0,1] \smallsetminus K$ est dense dans $[0,1]$. Montrer aussi que K est totalement discontinu, c'est-à-dire que les composantes connexes de K sont toutes réduites à un seul point.

Montrer que $[0,1] \smallsetminus K$ est dense dans $[0,1]$ revient à voir que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in [0,1] \smallsetminus K$ tel que $|x - x'| < \varepsilon$. Soit $x = 0, a_1 a_2 ... a_n ... = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p 3^{-p}$ le développement triadique propre de x. Posons par exemple $x' = 0, a_1 a_2 ... a_n 111111....$ Il s'agit d'un développement propre (sans développement impropre associé) et qui comporte des 1, donc $x' \in [0,1] \smallsetminus K$. Par ailleurs $|x - x'| \leq 3^{-n}$ puisque les chiffres de x et de x' coïncident jusqu'à l'ordre n, il suffit de prendre n tel que $3^{-n} < \varepsilon$.

On en conclut en particulier que pour tout $x \in K$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $a < x < b$ avec $b - a < \varepsilon$ et $a, b \notin K$ (si $x \in]0,1[$, on applique ce qui précède en prenant des approximations $a = x_1'$, $b = x_2'$ à $\varepsilon/5$ près de $x_1 = x + \varepsilon/4$, $x_2 = x - \varepsilon/4$; si $x = 0$, on prend $a = -\varepsilon/4$ et si $x = 1$ on prend $b = 1 + \varepsilon/4$). On en déduit que $K \cap]a,b[= K \cap [a,b]$ est une partie à la fois ouverte et fermée de K contenant x, donc d'après le cours la composante connexe de x est contenue dans $K \cap [a,b]$. Comme $b - a < \varepsilon$ est arbitrairement petit, ceci implique $C(x) \subset \bigcap [a,b] = \{x\}$. Par conséquent K est totalement discontinu.

6. On suppose que E est compact. On désigne par $C_\varepsilon(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation "x et y peuvent être reliés par une ε-chaîne". On se propose de montrer ici que si $\varepsilon_n > 0$ est une suite décroissante tendant vers 0, alors l'intersection $\widetilde{C}(x) = \bigcap C_{\varepsilon_n}(x)$ coïncide avec la composante connexe $C(x)$ de x dans E.

(a) Il est très facile de voir (résultat du cours) que les classes $C_\varepsilon(x)$ sont des ouverts de E. Ce sont donc aussi des fermés puisque chaque classe est le complémentaire de la réunion des autres. Or, nous avons

$$C(x) = F \cup G, \qquad F = C(x) \cap C_\varepsilon(x), \quad G = C(x) \cap \complement C_\varepsilon(x),$$

et F, G sont des parties fermées disjointes de $C(x)$ avec $x \in F \neq \emptyset$. Par conséquent, comme $C(x)$ est connexe, nous avons nécessairement $G = \emptyset$, ce qui signifie que $C(x) \subset C_\varepsilon(x)$. On obtient donc $C(x) \subset \widetilde{C}(x) = \bigcap C_{\varepsilon_n}(x)$.

(b) Pour tout $\delta > 0$, soit U_δ l'ouvert des points y tels que $d(y, \widetilde{C}(x)) < \delta$. Considérons les ensembles fermés $F_n = C_{\varepsilon_n}(x) \cap \complement U_\delta$ dans E. Il s'agit d'une suite décroissante de fermés telle que $\bigcap F_n = \widetilde{C}(x) \cap \complement U_\delta = \emptyset$, donc par compacité de E on en conclut que l'un des fermés F_n est vide. Ceci signifie que $C_{\varepsilon_n}(x) \subset U_\delta$, ou encore que pour tout point $p \in C_{\varepsilon_n}(x)$, il existe $q \in \widetilde{C}(x)$ tel que $d(p,q) < \delta$.

(c) Dans le résultat du (b), on choisit n tel que $\varepsilon_n < \delta$. Étant donné deux points quelconques y, z de $\widetilde{C}(x)$, on a en particulier $y, z \in C_{\varepsilon_n}(x)$, donc (par transitivité en passant par x) il existe une chaîne de points $y_i \in C_{\varepsilon_n}(x)$, $0 \leq i \leq N$, telle que $y_0 = y$, $y_N = z$ et $d(y_i, y_{i+1}) < \varepsilon_n$. D'après b appliqué avec $p = y_i$, $0 < i < N$, on peut trouver $q_i \in \widetilde{C}(x)$ tel que $d(y_i, q_i) < \delta$; on choisit par ailleurs $q_0 = y$ et $q_N = z$ puisque ces points sont déjà dans $\widetilde{C}(x)$. On a alors

$$d(q_i, q_{i+1}) \leq d(q_i, y_i) + d(y_i, y_{i+1}) + d(y_{i+1}, q_{i+1}) < \delta + \varepsilon_n + \delta < 3\delta.$$

Comme $\delta > 0$ est aussi petit qye l'on veut, on voit que $\widetilde{C}(x)$ est bien enchaîné. Comme $\widetilde{C}(x) = \bigcap C_{\varepsilon_n}(x)$ est fermé dans l'espace compact E, l'eensemble $\widetilde{C}(x)$ est un compact bien enchaîné. On en déduit d'après le cours que $\widetilde{C}(x)$ est connexe, et comme $x \in \widetilde{C}(x)$ on a donc $\widetilde{C}(x) \subset C(x)$ ($C(x)$ est le plus grand connnexe contenant x). D'après (a), nous obtenons $\widetilde{C}(x) = C(x)$.

7. (a) On suppose que E est compact et totalement discontinu. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partition de E en un nombre fini N de parties ouvertes et fermées A_i, $0 \le i < N$, de diamètre $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$.

Soit $x \in E$ quelconque. Par hypothèse $C(x) = \{x\}$. D'après 6 c), nous avons

$$\bigcap C_{\varepsilon_n}(x) = \widetilde{C}(x) = C(x) = \{x\},$$

et d'après 6 b), pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\nu(x)$ tel que

$$C_{\varepsilon_n}(x) \subset U_\delta = \big\{y \in E\,;\ d(y, \widetilde{C}(x)) < \delta\big\} = B(x, \delta)$$

dès que $n \ge \nu(x)$. Choisissons $\delta = \varepsilon/3$. On a alors $\operatorname{diam} C_{\varepsilon_n}(x) \le 2\delta = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ pour $n = \nu(x)$. L'ensemble $V_x = C_{\varepsilon_{\nu(x)}}(x)$ est un voisinage ouvert (et aussi fermé) de x, donc d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut extraire de la famille $(V_x)_{x \in E}$ un recouvrement fini V_{x_i}, $0 \le i < N$, de E. On obtient une partition finie de E en parties A_i ouvertes et fermées en posant

$$A_0 = V_{x_0}, \quad A_1 = V_{x_1} \setminus V_{x_0}, \quad \ldots \quad , \quad A_i = V_{x_i} \setminus (V_{x_0} \cup \ldots \cup V_{x_{i-1}}), \quad 1 \le i < N.$$

(si $x \in E$ et si i est le plus petit indice tel que $x \in V_{x_i}$, on bien que $x \in A_i$). De plus $\operatorname{diam} A_i \le \operatorname{diam} V_{x_i} = \operatorname{diam} C_{\varepsilon_{\nu(x_i)}}(x_i) < \varepsilon$.

(b) Réciproquement, supposons que l'espace compact E admette pour tout $\varepsilon > 0$ une partition finie en parties ouvertes et fermées A_i de diamètre $< \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in E$, la composante connexe $C(x)$ est contenue dans l'unique partie A_i telle que $x \in A_i$, et on a donc $\operatorname{diam} C(x) \le \operatorname{diam} A_i < \varepsilon$. Ceci montre que $\operatorname{diam} C(x) = 0$, par conséquent $C(x) = \{x\}$ et E est totalement discontinu.

8. On se propose de montrer le théorème suivant : un espace métrique E est homéomorphe à l'ensemble de Cantor K ssi il est *compact*, *totalement discontinu* et *sans point isolé*.

(a) Les propriétés soulignées ci-dessus sont invariantes par homéomorphisme (si E vérifie l'une d'elles et si $\varphi : E \to E'$ est un homéomorphisme, alors E' la vérifie). Il suffit pour cela que ces propriétés ne s'expriment qu'en termes d'ouverts de fermés, et c'est bien le cas des notions de compacité (propriété de Borel-Lebesgue), de connexité (par définition) et de point isolé (x est isolé ssi $\{x\}$ est un ouvert). Par conséquent tout espace E homéomorphe à l'ensemble de Cantor K est bien compact (question 2), totalement discontinu (question 5) et sans point isolé (question 3).

On suppose désormais que E est un espace compact, totalement discontinu et sans point isolé.

(b) Dans les partitions (A_i) obtenues à l'exercice 7, montrer qu'un point isolé de A_i serait aussi un point isolé de E, et en déduire que chaque partie A_i est elle-même une partie compacte totalement discontinue et sans point isolé.

Si x était un point isolé de A_i, alors $\{x\}$ serait ouvert dans A_i, mais comme A_i est ouvert dans E on en conclurait que $\{x\}$ serait un ouvert de E, autrement dit que x serait un point isolé de E, contradiction. Par ailleurs, A_i est fermé dans E, donc compact, et des composantes connexes sont des connexes contenus dans E, donc réduites à des singletons. On voit par conséquent que chaque A_i est une partie compacte totalement discontinue et sans points isolés.

(c) Montrer dans le résultat de 7 que quitte à rédécouper certains A_i (ou à regrouper leurs morceaux !) on peut se ramener au cas où le nombre N de parties A_i est une puissance de 2.

Soit 2^p la plus petite puissance de 2 telle que $2^p \ge N$. Si $2^p > N$, l'exercice 7 et la remarque 8 a) montrent qu'on peut certainement redécouper A_N en un certain nombre de parties $A_{N,k}$ ouvertes et fermées de diamètre $\operatorname{diam} A_{N,k} \le \frac{1}{2} \operatorname{diam} A_N$, $0 \le k < s$ (de sorte qu'on a certainement $s \ge 2$). Quitte à remplacer A_N par $A'_N = A_{N,0}$ et à poser $A'_{N+1} = A_{N,1} \cup \ldots \cup A_{N,s-1}$, on voit qu'on peut changer N en $N' = N + 1$ (noter que $\operatorname{diam} A'_N \le \operatorname{diam} A_N < \varepsilon$ et $\operatorname{diam} A'_{N+1} \le \operatorname{diam} A_N < \varepsilon$). On continue jusqu'à ce que N' atteigne la valeur 2^p.

(d) Montrer qu'on peut trouver par récurrence des entiers k_p et des parties A_{i_1}, $A_{i_1 i_2}$, $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $0 \le i_p < 2^{k_p}$, ayant les propriétés suivantes : $(A_{i_1})_{0 \le i_1 < 2^{k_1}}$ est une partition de E en parties ouvertes et fermées de diamètre $\leq 2^{-1}$, ... , $(A_{i_1i_2...i_p})_{0\leq i_p<2^{k_p}}$ est une partition de $A_{i_1i_2...i_{p-1}}$ en parties ouvertes et fermées de diamètre $< 2^{-p}$.

Ceci résulte de ce qui précède, sauf peut-être le fait que l'on puisse découper les parties $A_{i_1i_2...i_{p-1}}$ en *exactement le même nombre* 2^{k_p} de parties $(A_{i_1i_2...i_p})_{0\leq i_p<2^{k_p}}$. Mais il résulte de la question 7) que l'on peut trouver des familles de parties qui dépendent a priori des $A_{i_1i_2...i_{p-1}}$, soit $0 \leq i_p < N_p(i_1, i_2, ..., i_{p-1})$. Or, on peut toujours choisir une puissance 2^{k_p} qui est supérieure ou égale à tous les entiers $N_p(i_1, i_2, ..., i_{p-1})$ en nombre fini, et procéder à un redécoupage comme dans 8 c) pour atteindre le nombre voulu 2^{k_p}.

(e) On écrit chaque entier $i_s = 0, 1, ..., 2^{k_s} - 1$ de la question (d) en base 2 à l'aide de k_s chiffres binaires, en commençant si nécessaire par des 0 de manière à avoir exactement k_s chiffres (par exemple 000000101 est le codage du nombre 5 avec $k_s = 9$). La suite d'indices $i_1i_2...i_p$ se code alors comme une suite de $k_1 + ... + k_p$ chiffres 0 ou 1. Par construction, chaque point $x \in E$ appartient à une unique suite de parties $A_{i_1i_2...i_p}$ pour tout p, et on en obtient une représentation de $i_1i_2...i_p...$ par une suite infinie de chiffres binaires $a_1, a_2, \ldots, a_n, ... \in \{0, 1\}$ (les entiers i_s sont obtenus en prenant les tronçons successifs de k_s chiffres binaires).

Montrons que l'application

$$\varphi : E \ni x \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n 3^{-n} \in K$$

est continue. Pour n fixé, et p fixé tel que $k_1 + ... + k_p \geq n$, on observe que $x \mapsto u_n(x) = a_n$ est constante sur chacune des parties $A_{i_1i_2...i_p}$ et donc continue sur E (la condition $k_1 + ... + k_p \geq n$ fait que le chiffre binaire a_n est l'un des chiffres des entiers $i_1, i_2, ..., i_p$, il ne dépend donc pas des indices i_s, $s > p$). On en conclut que

$$\varphi(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\, 3^{-n}$$

est continue comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues sur K.

(f) Montrons que si $|\varphi(x) - \varphi(y)| < 3^{-n}$ avec $n = k_1 + \ldots + k_p$, alors $d(x, y) < 2^{-p}$, puis que $\varphi : E \to K$ est un homéomorphisme.

En effet, la condition $|\varphi(x) - \varphi(y)| < 3^{-n}$ entraîne que les chiffres triadiques des développements de $\varphi(x)$ et de $\varphi(y)$ coïncident jusqu'à l'ordre n. Si on prend $n = k_1 + ... + k_p$, les entiers $i_1, i_2, ..., i_p$ du codage précédent sont entièrement fixés, ce qui signifie par définition de φ que les points x et y sont situés dans la même partie $A_{i_1i_2...i_p}$. On a donc $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A_{i_1i_2...i_p} < 2^{-p}$. Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, ce qui précède est vrai avec p et n aussi grands qu'on veut, donc $d(x, y) = 0$ et $x = y$. Ceci montre que φ est injective. Comme l'application $\varphi : E \to K$ est une bijection continue entre espaces compacts, on sait d'après le cours que c'est automatiquement un homéomorphisme [autre raisonnement possible : l'implication $|\varphi(x) - \varphi(y)| < 3^{-(k_1+\cdots+k_p)} \Rightarrow d(x, y) < 2^{-p}$ montre en fait directement que $\varphi^{-1} : K \to E$ est uniformément continue, si on pose $z = \varphi(x)$, $w = \varphi(y) \in K$, $x = \varphi^{-1}(z)$, $y = \varphi^{-1}(w)$].

9. Il est immédiat que pour tout entier $n \geq 1$, l'espace K^n est encore un espace compact, totalement discontinu et sans points isolés : la compacité d'un produit de compacts est connue, et d'autre part chaque point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ est limite d'une suite de points 2 à 2 distincts $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})$. Enfin les composantes connexes d'un produit sont les produits des composantes connexes des facteurs, comme on le voit par projection, de sorte que K^n est totalement discontinu. Le théorème général obtenu à la question 8) montre que K^n est homéomorphe à K. En fait, il est très facile de voir que

$$K : x = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\, 3^{-p} \mapsto (x_0, x_1) \in K \times K, \qquad \text{avec} \quad x_0 = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\, 3^{-p}, \quad x_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p-1}\, 3^{-p}$$

est un homéomorphisme de K sur $K \times K$ (mais il y en a beaucoup d'autres, il suffit par exemple de partitionner $\mathbb{N}^*$ en deux parties infinies qui ne sont pas nécessairement les entiers pairs et impairs). Pour obtenir un homéomorphisme de K sur K^n, il suffirait de partitionner $\mathbb{N}^*$ en n parties infinies, par exemple les n classes de congruence modulo n, soit $p \mapsto np - r$, $0 \leq r < n$, $p \in \mathbb{N}^*$; on poserait ainsi

$$K \ni x \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in K^n, \qquad x_r = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{np-r}\, 3^{-p}.$$