Thm. Soit E un espace de Hilbert. Alors pour tout sous-espace vectoriel **fermé** $F \subset E$ on a $E = F \oplus F^\perp$

Rappel : (def espace de Hilbert)

- $(E, \langle , \rangle)$ espace euclidien ($\mathbb{R}$) ou hermitien ($\mathbb{C}$)
- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- complet

Dem : F est convexe et fermé.
Résultat déjà vu $\Rightarrow$
$\exists y \in F$ unique tq
- $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$

- $x - y \in F^\perp$

$\forall v \in F$ $\quad z = y + v \in F$, $\mathrm{Re}\langle x-y, z-y \rangle = \mathrm{Re}\langle x-y, v\rangle \leq 0$ (angle $\geq \frac{\pi}{2}$)
$\quad z' = y - v \in F$, $\mathrm{Re}\langle x-y, z'-y\rangle = -\mathrm{Re}\langle x-y, v\rangle \leq 0$
donc $\mathrm{Re}\langle x-y, v\rangle = 0$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad \langle x-y, v\rangle = 0$ et donc $x - y \in F^\perp$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{Im}\langle x-y, v\rangle = \mathrm{Re}(-i\langle x-y, v\rangle)$
$\quad = \mathrm{Re}(\langle x-y, iv\rangle) = 0$ car $iv \in F$

Conclusion :
$$\underset{\in E}{x} = \underset{\in F}{y} + \underset{\in F^\perp}{(x-y)}$$

- $F \cap F^\perp = \{0\}$

$z \in F$, $z \in F^\perp$ $\qquad \langle z, z \rangle = 0$
Pas de vecteur isotrope par hypothèse, donc $z = 0$

Attention ! Résultat faux si F sev non fermé

Exemple : $E = \ell^2(I)$ $\quad x = (x_i)_{i \in I}$ $\qquad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2$

$F = \ell^2_f(I)$ $\quad x = (x_i)_{\in I}$ presque nulles.

$\overline{F} = E$

$F^\perp = (\overline{F})^\perp = E^\perp = \{0\}$

$F \oplus F^\perp = F \oplus \{0\} = F \subsetneq E$

En fait, $\overline{F}$ fermé et $\overline{F}^\perp = F^\perp$

$\overline{F} \oplus F^\perp = E$

Si $F \subsetneq \overline{F}$ alors $F \oplus F^\perp \subsetneq E$

Thm : $\forall$ sev F de E, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$

- Si F est fermé, on a bien $(F^\perp)^\perp = F$
- En général $(F^\perp)^\perp = (\overline{F}^\perp)^\perp = \overline{F}$

Def : Dans un ev normé $(E, \|\ \|)$ on dit qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est "totale" si $\mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I}$ dense dans E, càd $\overline{\mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I}} = E$

Rappel : $\mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I} = \{ \text{C.L. finies } \sum \lambda_i a_i \}$

$\overline{\mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I}} = \{ \lim_{p\to+\infty} \sum_{1\leq k\leq N_p} \lambda_{i_k,p}\, a_{i_k} \}$

Critère : Dans un Hilbert E, une famille $(a_i)_{i\in I}$ est totale ssi $\forall x \in E$, $\langle x, a_i\rangle = 0$, $\forall i \in I \Rightarrow x = 0$.

Dem : $F = \mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I}$

$\langle x, a_i\rangle = 0\ \forall i \in I \iff x \in F^\perp$

Condition $(*)$ signifie $F^\perp = \{0\} \iff \overline{F} = (F^\perp)^\perp = E$

Exemple : (pas dans un Hilbert !)

$\mathcal{C}((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n, \mathbb{C})$ $\quad f(x_1, \dots, x_n)$ complexes périodique de période 1 muni de $\|f\|_\infty$.

$e_p(x) = e^{2\pi i \langle p, x\rangle}$ $\quad p \in \mathbb{Z}^n$

$(e_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ famille totale dans $\mathcal{C}((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n, \mathbb{C})$
Stone-Weierstrass $\Rightarrow \overline{\mathrm{Vect}(e_p)} = \mathcal{C}((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n, \mathbb{C})$

Def: Dans un espace de Hilbert E, on appelle base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée qui est totale (ce n'est pas nécessairement une famille génératrice algébriquement)

Thm: Si E est un espace de Hilbert quelconque, il existe toujours des bases hilbertiennes ($\emptyset$ si $E = \{0\}$)

Dem: famille finie de vecteurs indépendants $\xrightarrow[\text{de Gram-Schmidt}]{\text{orthogonalisation}}$ système orthonormé

Résultat de logique (admis) : Théorème de Zorn
$\exists$ famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ maximale
$F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$ $\quad \underset{(e_i)}{\overline{F}} \oplus F^\perp = E$

Si $F^\perp \neq \{0\}$, il existerait un vecteur $\varepsilon \in F^\perp$, $\|\varepsilon\| = 1$ et la famille $(e_i, \varepsilon)_{i\in I}$ serait orthonormée, contradiction.
Donc $F^\perp = \{0\}$ et $\overline{F} = E$.

Sous-produit de la démonstration : si $(e_i)_{i\in I}$ système orthonormé
$(e_i)_{i\in I}$ famille totale $\Leftrightarrow (e_i)_{i\in I}$ système orthonormé maximal.

Décomposition d'un vecteur x suivant une base hilbertienne
$(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne
$x_i = \langle x, e_i\rangle \in \mathbb{K}$ (matheux)
$(= \langle e_i, x\rangle)$ (physiciens)

Affirmation $\sum_{i\in I} |x_i|^2 = \|x\|^2$

Dem: • $I' \subset I$ finie

$$\sum_{i\in I'} |x_i|^2 \leq \|x\|^2$$

$$x = \left(\sum_{i\in I'} x_i e_i\right) + \underbrace{\left(x - \sum_{i\in I'} x_i e_i\right)}_{\in (F')^\perp}$$

$F' = \mathrm{Vect}\,(e_i)_{i\in I'}$

$$\langle x - \sum_{i\in I'} x_i e_i , e_j \rangle = x_j - x_j = 0$$

Pythagore $\Rightarrow \|x\|^2 = \|\sum_{i\in I'} x_i e_i\|^2 + \|x - \sum_{i\in I'} x_i e_i\|^2$

$$\geq \|\sum_{i\in I'} x_i e_i\|^2 \geq \sum_{i\in I'} |x_i|^2$$

Conséquence : il n'y a qu'un nombre au plus dénombrable de $x_i \neq 0$ $\quad (i_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad x_{i_k} \neq 0$

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{i_k} e_{i_k} \quad ?$$

Inégalité pour les sommes finies $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |x_{i_k}|^2 \leq \|x\|^2$
(passage à la limite sur les sommes finies)

$\tilde{x} \underset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{i_k} e_{i_k}$ cv dans E ?

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{N'} x_{i_k} e_{i_k} \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{N'} |x_{i_k}|^2 \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x_{i_k}|^2 = \varepsilon_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$S_N = \sum_{k=0}^{N} x_{i_k} e_{i_k}$ suite de Cauchy $\underset{E \text{ complet}}{\Longrightarrow}$ la série définissant $\tilde{x}$ cv.

$$\langle x - \tilde{x}, e_i \rangle = x_i - x_i = 0 \underset{(e_i) \text{ totale}}{\Longrightarrow} x - \tilde{x} = 0.$$

Conséquence : Dans un Hilbert, on a $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ comme série cv dans E relativement à toute base hilbertienne

Corollaire : On a un isomorphisme (d'une isométrie) d'espaces de Hilbert $\ell^2(I) \longrightarrow E$

$$(x_i)_{i\in I} \longmapsto x = \sum_{i\in I} x_i e_i$$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |x_i|^2}$$

Application aux Séries de Fourier

$E = \mathcal{C}((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n, \mathbb{C})$

- $\|f\|_\infty$
- $\|f\|_2^2 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_n)|^2 \, dx_1 \dots dx_n$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) \overline{g(x_1, \dots, x_n)} \, dx_1 \dots dx_n$$

Attention, $(E, \|.\|_\infty)$ complet

$(E, \|.\|_2)$ pas complet !!

$(\hat{E}, \|.\|_2)$ espace de Hilbert

$(e_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ totale dans $(E, \|f\|_\infty) \Rightarrow$ totale dans $(E, \|f\|_2)$

$(\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty) \Rightarrow$ totale dans $(\hat{E}, \|f\|_2)$

$\langle f, e_p\rangle = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) \, e^{-2\pi i \langle p, x\rangle} \, dx_1 \dots dx_n.$

$=$ coeff de Fourier

$(e_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ base hilbertienne de $\hat{E}$

$\|f\|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |\langle f, e_p\rangle|^2$

V. Espaces de Banach

Def : On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet

Propriétés : (1) E, F Banach $\Rightarrow E\times F$ Banach

(2) E ev normé, F Banach. $L = \mathcal{L}_c(E, F)$, $|||.|||$ est un Banach.

$u_n \in L$ suite de Cauchy pour $|||.|||$

$\|u_n(x)\| \leqslant |||u_n||| \, \|x\|$

$\|u_p(x) - u_q(x)\| \leqslant |||u_p - u_q||| \, \|x\|$

$(u_n(x))$ suite de Cauchy dans $F \Rightarrow u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$ existe.

À voir (exo) $|||u - u_n||| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Cas particulier : $A = \mathcal{L}_c(E,E)$, E Banach

A algèbre de Banach

$(A,+,\circ,\cdot)$ $|||f \circ g||| \leq |||f|||\,|||g|||$ Id_E élément unité.

Exponentielle dans une algèbre de Banach.

$f \in A$ $\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n$ CVN dans A (A complète)

$|||\frac{1}{n} f^n||| \leq \frac{1}{n!} |||f|||^n$

(Généralisation de l'exponentielle des matrices)