IV/ Espaces de Hilbert

Corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : On appelle espace préhilbertien

- sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: un espace E euclidien. E ev sur $\mathbb{R}$ muni de $(x, y) \to \varphi(x, y)$ forme bilinéaire symétrique définie positive.

- sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: un espace E hermitien cad E ev sur $\mathbb{C}$ muni de $(x, y) \to \varphi(x, y)$ sesquilinéaire symétrique définie positive.

Convention des matheux : $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$
$\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y)$

Convention des physiciens : $\varphi(\lambda x, y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y)$
$\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$

Un espace préhilbertien est muni d'une norme $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$, $\langle x, y \rangle = \varphi(x, y)$

Définition : On dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert (ou hilbertien) si l'e.v.n $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Exemple fondamental

I ensemble quelconque fini ou infini

$\ell^2(I) = \{(x_j)_{j \in I},\ x_j \in \mathbb{K},\ \sum_{j \in I} |x_j|^2 < +\infty\}$

(au plus un nombre dénombrable de $x_j \neq 0$)

$x = (x_j)_{j \in I}$ $\qquad$ $y = (y_j)_{j \in I}$

$$\langle x, y \rangle \underset{\text{def}}{=} \sum_{j \in I} x_j y_j \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

$$\langle x, y \rangle \underset{\text{def}}{=} \sum_{j \in I} x_j \overline{y_j} \qquad (\text{sur } \mathbb{C} \text{ malheur})$$

Ces sommes sont absolument convergentes

I' partie finie de I

$$\sum_{j \in I'} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j \in I'} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j \in I'} |y_j|^2} \leq \|x\| \|y\| \text{ par Cauchy - Schwarz}$$

Proposition : $(\ell^2(I), \|.\|)$ est complet c'est donc un espace de Hilbert.

(x_n) suite de Cauchy dans $\ell^2(I)$.

$x_n = (x_{n,j})_{j \in I}$ $\qquad$ $\|x_n\|^2 = \sum_{j \in I} |x_{n,j}|^2$

$|x_{p,j} - x_{q,j}| \leq \|x_p - x_q\|$

(x_n) suite de Cauchy dans $\ell^2(I) \Rightarrow (x_{n,j})$ suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

$\xi_j = \lim_{n \to +\infty} x_{n,j} \in \mathbb{K}$ existe ($\mathbb{K}$ complet)

$\xi = (\xi_j)_{j \in I} \in \ell^2(I)$?

(x_n) de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ bornée, $\|x_n\| \leq M$

$I' \subset I$ finie $\qquad$ $\sum_{j \in I'} |x_{n,j}|^2 \leq \|x_n\|^2 \leq M^2$

$\qquad \lim_{n \to +\infty} : \sum_{j \in I'} |\xi_j|^2 \leq M^2$

Donc $\xi \in \ell^2(I)$ et $\|\xi\| \leq M$

Dernière étape : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi$ dans $\ell^2(I)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, p, q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\|^2 = \sum_{j \in I} |x_{p,j} - x_{q,j}|^2 \leq \varepsilon^2$

$\left.\begin{array}{l} I' \text{ finie}, \ p \text{ fixé} \geq N \\ \qquad q \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j \in I'} |x_{p,j} - \xi_j|^2 \leq \varepsilon^2$

$\forall I'$, ceci donne $\|x_p - \xi\|^2 = \sum_{j \in I} |x_{p,j} - \xi_j|^2 \leq \varepsilon^2$ pour $p \geq N$

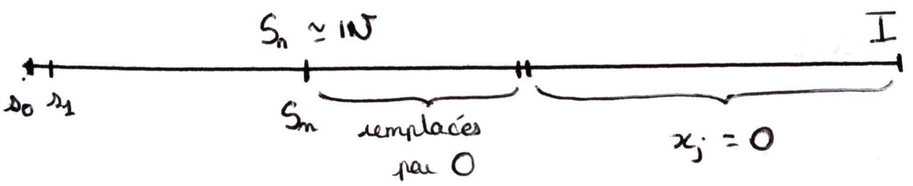
Définition: s.e.v $\ell^2_f(I) = \{(x_j)_{j \in I}$, seulement un nombre fini de $x_j \neq 0\}$

Proposition: $\ell^2_f(I)$ est dense dans $\ell^2(I)$.

$x = (x_j)_{j \in I} \in \ell^2(I)$

$\exists S = \{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\} \subset I$ tq $x_j = 0$ si $j \in I \setminus S$

$\tilde{x}_n = (\tilde{x}_{n,j})_{j \in I} \quad \begin{cases} \tilde{x}_{n,j} = x_j & \text{si } j = s_0, \dots, s_n \\ \tilde{x}_{n,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$\|x - \tilde{x}_n\|^2 = \sum_{p=n+1}^{+\infty} |x_{s_p}|^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Reste d'une série CV

$\tilde{x}_n \in \ell^2_f(I)$

Remarque: Si I ensemble infini, $\ell^2_f(I)$ espace préhilbertien qui ne peut pas être complet parce que $\overline{\ell^2_f(I)} = \ell^2(I)$ (et donc $\ell^2_f(I)$ pas fermé).

Proposition: Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien alors le complété $\hat{E}$ est muni naturellement d'une structure d'espace de Hilbert.

$(E, \|.\|) \underset{\text{complété}}{\rightsquigarrow} \hat{E}$

$x \overset{l_y}{\longmapsto} \langle x, y \rangle$ forme linéaire continue

$E \longrightarrow \mathbb{K}$

$|l_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$

$l_y(y) = \langle y, y \rangle = \|y\|^2$

Conclusion : $|||l_y||| = \|y\|$ (et l_y uniformément continue)

Par construction $E \subset \hat{E}$ et $\bar{E} = \hat{E}$

$\hat{l_y} : \hat{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, $y \in E$

$x \longmapsto \hat{l_y}(x)$

extension de $\langle , \rangle$ à $\hat{E} \times E$

$y \overset{r_x}{\longmapsto} \langle x, y \rangle$

$|||r_x||| = \|x\|$ r_x U.C.

Je la prolonge en $\hat{r_x}$ à $\hat{E}$.

Ainsi, on a un prolongement de $\langle , \rangle$ à $\hat{E}$.

$\underset{\hat{E}}{\langle \underset{\cap}{x}}, \underset{\hat{E}}{\underset{\cap}{y}} \rangle = \lim \langle x_n, y_n \rangle$ $\quad (x_n)$ suite de Cauchy dans $E \to x$

(y_n) ——————————— $\to y$

<u>Exercice</u> : $\varphi : E \times F \to G$ bilinéaire continue.

$\left.\begin{array}{l}(x_n) \text{ suite de Cauchy de } E \\ (y_n) \text{ ——————————— } F\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x_n, y_n)$ suite de Cauchy de G

<u>Exemple</u> : $\widehat{l^2_p(I)} = l^2(I)$ $\quad (x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$

$\downarrow n \to +\infty$

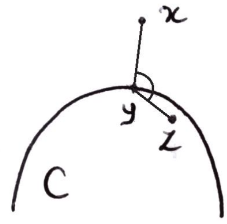
$I = \mathbb{N}$ $\quad (x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$

Methode de projection :

E espace de Hilbert

$C \subset E$ partie convexe fermée (eventuellement non bornée)

Theoreme de projection sur les convexes :



Pour C convexe fermé dans un espace de Hilbert E,

(i) $\forall x \in E$, $\exists\, y \in C$ unique tq $\|x-y\| = d(x, C)$

(ii) y est caracterisé par le fait que $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$

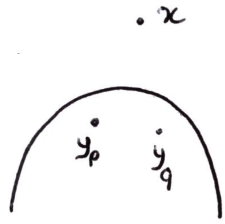
(angle $\widehat{xyz}$ obtus ou droit)

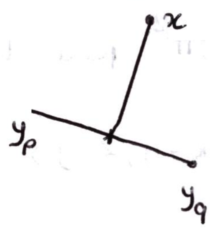
Démo : • Si $x \in C$, solution unique $y = x$

• Supposons $x \notin C$ et donc $\delta = d(x, C) > 0$ (on utilise le fait que C est fermé)

$$\delta = d(x,C) = \inf_{y \in C} \|x-y\|$$

$\exists$ suite $y_n \in C$ tq $\begin{cases} \|x-y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta \\ \|x-y_n\| \geq \delta \end{cases}$





Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy.

$$\|x - \tfrac{1}{2}(y_p+y_q)\|^2 = \|\tfrac{1}{2}(x-y_p) + \tfrac{1}{2}(x-y_q)\|^2$$

$$\|y_p - y_q\|^2 = 4\,\|\tfrac{1}{2}(x-y_p) - \tfrac{1}{2}(x-y_q)\|^2$$

Identité du parallélogramme : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Parallélogramme $\Rightarrow \|x - \frac{1}{2}(y_p + y_q)\|^2 + \frac{1}{4}\|y_p - y_q\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_q\|^2 + \|x - y_q\|^2)$

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2) - 4\|x - \frac{1}{2}(y_p + y_q)\|^2$$

$$\leq 2((\|x - y_p\|^2 - \delta^2) + (\|x - y_q\|^2 - \delta^2))$$

car $\frac{1}{2}(y_p + y_q) \in C$ et donc $\|x - \frac{1}{2}(y_p + y_q)\| \geq \delta$

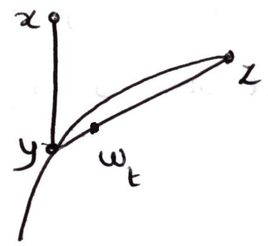
$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow \delta^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \varepsilon$

$p, q \geq N \Rightarrow \|y_p - y_q\|^2 \leq 4\varepsilon$

E Hilbert $\Rightarrow (y_n)$ CV vers $y \in E$ et on a $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = \delta = d(x, C)$

(ii) Prenons $z \in C$.

Supposons $\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle > 0$



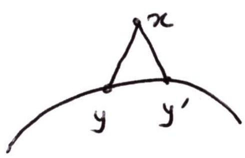
Prenons $w_t = y + t(z - y)$ avec $t \in]0, 1[$ petit.

$$\|x - w_t\|^2 = \|x - y - t(z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t\underbrace{\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle}_{>0} + t^2\|z - y\|^2$$

$< \|x - y\|^2$ pour t petit

Conclusion: on a bien $\forall z \in C, \mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$

Unicité de y :



$z = y'$ $\quad \mathrm{Re}\langle x - y, y' - y\rangle \leq 0$

Les angles $\widehat{xyy'}$ et $\widehat{xy'y}$ sont $\geq \frac{\pi}{2}$ donc en fait $= \frac{\pi}{2}$ et le triangle est plat $\Rightarrow y = y'$.

$$\|x - y'\|^2 = \|x - y - (y' - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\underbrace{\mathrm{Re}\langle x - y, y' - y\rangle}_{0} + \|y' - y\|^2 > \|x - y\|^2$$

si $y \neq y'$

Orthogonal d'un sous-espace

F s.e.v de E

$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x,y\rangle = 0\}$

Proposition: $F^\perp$ est un s.e.v. fermé de E

$x_n \in F^\perp \qquad x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

$\forall y \in F \quad \langle x_n, y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x, y\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = 0$

donc $x \in F^\perp$.

Proposition: $(\bar{F})^\perp = F^\perp$

$\bar{F} \supset F \Rightarrow (\bar{F})^\perp \subset F^\perp$ (logique)

$x \in F^\perp, \quad \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in F$

$y \in \bar{F}$, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ avec $y_n \in F$. Donc $\langle x, y\rangle = \lim \langle x, y_n\rangle = 0$

donc $x \in (\bar{F})^\perp \Rightarrow F^\perp \subset (\bar{F})^\perp$.