<u>Observation facile</u> : Pour une suite décroissante de fermés (A_n) d'un espace compact, $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{ \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \text{ possibles}, x_{n_k} \in A_{n_k}, n_k \nearrow \}$

<u>Démo</u> : $\subset$ $x \in A$ $\quad x_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N}$ suite constante

$\supset$ $x = \lim x_{n_k}$. $\forall n, \exists k_0, k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n \Rightarrow x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_n$

$\Rightarrow x = \lim x_{n_k} \in A_n$ qui est fermé,

Donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$

Ici, j'en déduis que $\varphi(A) = A$

- $\varphi(A) \subset A$.

$$A \subset A_n \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(A_n) = A_{n+1} \subset A_n$$

$$\Rightarrow \varphi(A) \subset \bigcap A_n = A$$

- $A \subset \varphi(A)$? $\quad x \in A$.

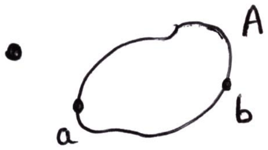
$x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$ avec $x_{n_k} \in A_n = \varphi^{n_k}(E)$

$x_{n_k} = \varphi^{n_k}(y_k) = \varphi(\underbrace{\varphi^{n_k - 1}(y_k)}_{z_k \in A_{n_k - 1}})$

$x = \lim\limits_{k \to +\infty} \varphi(z_k)$ $z_k \in A_{n_k - 1}$.

E compact $\Rightarrow \exists$ ss-suite convergente $(z_{k_\ell}) \to z \in A$ (observation).

On a $x = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(z_{k_\ell}) = \varphi(z) \in \varphi(A)$

- 

diam $A = \sup\limits_{x, y \in A} d(x,y) \underset{\text{atteint}}{=} d(a, b)$

$A \times A \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto d(x,y)$ continue sur $A \times A$ qui est compact

$a \in A = \varphi(A)$ $a = \varphi(\alpha)$ avec $\alpha \in A$
$b \in A = \varphi(A)$ $b = \varphi(\beta)$ avec $\beta \in A$

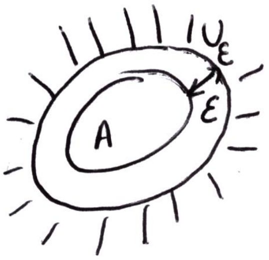
Si $a \neq b$, diam $A = d(a,b) = d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) < d(\alpha, \beta) \leq$ diam A
Contradiction.

Conclusion : $a = b \Rightarrow$ diam $A = 0$. donc $A = \{a\}$ et $\varphi(a) = a$

Proposition : Si $A = \bigcap A_n$ décroissante et fermés dans un espace compact alors diam $A = \lim\limits_{n \to +\infty}$ diam A_n (attention, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (\underbrace{\{0\} \cup [n, +\infty[}_{\text{fermés de } \mathbb{R} \text{ de diam } +\infty}) = \{0\}$)

Demonstration : $\emptyset \neq A \subset A_n \Rightarrow$ diam $A \leq$ diam A_n

$U_\varepsilon = \{x \in E,\ d(x,A) < \varepsilon\} = u^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)$ ouvert $\quad u : x \mapsto d(x,A)$ continue.



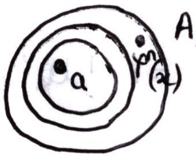
diam $U_\varepsilon \leq$ diam $A + 2\varepsilon$ (ineg triangulaire)

$A = \cap A_n$ est tq $\cap \underbrace{(A_n \cap \complement_E U_\varepsilon)}_{\text{suite décroissante de fermés}} = \emptyset$

$\exists n \in \mathbb{N}$ tq $A_n \cap \complement U_\varepsilon = \emptyset \Rightarrow A_n \subset U_\varepsilon \Rightarrow$ diam $A_n \leq$ diam $A + 2\varepsilon$.

<u>Theoreme</u> : Si $\varphi : E \to E$ est faiblement contractante sur E compact, alors il existe un point fixe unique $a \in E$ et de plus, les itérées $x \mapsto \varphi^n(x)$ CVU vers la constante $x \mapsto a$

$d(\varphi^n(x), a) = d(\varphi^n(x), \varphi^n(a)) \leq$ diam $A_n \longrightarrow$ diam $A = 0$ car $A = \{a\}$



$A_n = \varphi^n(E)$.

<u>Remarque</u> : L'existence du pt fixe a s'obtient facilement comme suit

Regardons $u(x) = d(x, \varphi(x))$

u 2-lipschitzienne

$$|d(x,\varphi(x)) - d(y,\varphi(y))| \underset{\substack{\text{ineg triangulaire} \\ \text{2 fois}}}{\leq} d(x,y) + d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq 2d(x,y)$$

u continue sur E compact $\Rightarrow \inf\limits_{x \in E} u(x) \underset{\text{atteint}}{=} u(a) = d(a, \varphi(a))$

Si $a \neq \varphi(a)$, $d(\varphi(a), \varphi(\varphi(a))) < d(a, \varphi(a))$

Contradiction car alors en $x = \varphi(a)$, on a $u(x) = u(\varphi(a)) < u(a)$

Donc $a = \varphi(a)$ CQFD.

III/ Théorème d'Ascoli

(E, d) et (F, d') deux espaces compacts

$\mathcal{C} : \mathcal{C}(E, F) = \{ \text{appl. cts } u : E \to F \}$

$u, v \in \mathcal{C}$

distance uniforme $\delta_\infty (u, v) = \sup\limits_{x \in E} d'(u(x), v(x))$

$$= \max_{x \in E} d'(u(x), v(x))$$

$(\mathcal{C}, \delta_\infty)$. espace métrique.

<u>Question:</u> $(\mathcal{C}, \delta_\infty)$ est-il compact ?

$E = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ $\quad F = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ compacts

$u_n(x) = \cos(nx)$ $\quad u_n'(x) = -n \sin(nx) \Rightarrow |u_n'(x)| \leq n$

u_n n-lipschitzienne

$$\|u_p - u_q\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_p(x) - u_q(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(px) - \cos(qx))^2 \, dx$$

$= 1$ (exercice sur les séries de Fourier)

$$\leq \|u_p - u_q\|_\infty^2 = \Big(\sup_{x \in [0, 2\pi]} |u_p(x) - u_q(x)| \Big)^2$$

$\forall p, q, \; p \neq q \Rightarrow \|u_p - u_q\|_\infty \geq 1$.

$\Rightarrow$ IMP d'extraire de (u_n) une ss-suite CVU

$\Rightarrow (\mathcal{C}, \delta_\infty)$ non compact.

Théorème d'Ascoli (cas particulier)

E, F espaces métriques compacts, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ fixé.

$\mathcal{L}_\lambda = \{u : E \to F$ qui sont λ-lipschitziennes $\}$.

Alors $(\mathcal{L}_\lambda, \delta_\infty)$ partie compacte de $(\mathcal{C}, \delta_\infty)$

Autrement dit, si (u_n) suite de fcts λ-lipschitziennes, $\exists$ ss-suite (u_{s_k}) qui CVU vers une limite $u \in \mathcal{L}_\lambda$.

Demonstration: On va construire par récurrence sur k des parties infinies

- $S_k \subset S_{k-1} \subset \dots \subset S_1 \subset S_0 \subset \mathbb{N}$ tq si $p, q \in S_k$ alors $\delta_\infty(u_p, u_q) \leq C\, 2^{-k}$ où C = constante

- Si on arrive à faire ça, on prendra s_k = k-ième elt de S_k.

J'aurai $\delta_\infty(u_{s_k}, u_{s_{k+1}}) \leq C\, 2^{-k}$

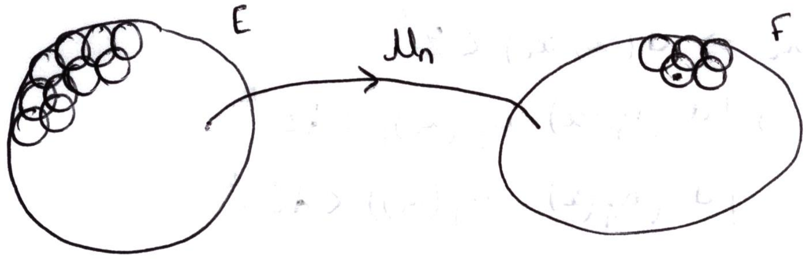
Si $l > k$, $\delta_\infty(u_{s_k}, u_{s_l}) \leq C\,(2^{-k} + 2^{-(k+1)} + \dots + 2^{-(l-1)}) \leq 2.C.2^{-k}$

suite de Cauchy uniforme.

$u = \lim\limits_{k \to +\infty} u_{s_k}$ existe

$d'(u(x), u(y)) = \lim\limits_{k \to +\infty} d'(u_{s_k}(x), u_{s_k}(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$

Idée: On "pixelise" les espaces E et F



$(B_i)_{i\in I}$ famille finie de boules ouvertes de rayon $< 2^{-k}$ (recouvrement de E)

$(B_j)_{j\in J_k}$ boules ouvertes de rayon $< 2^{-k}$ (recouvrement de F)

$u_n : E \to F$ j'associe $v_n : I_k \longrightarrow J_k$

$i \longmapsto v_n(i) = j$

x_i centre de $B_i \overset{u_n}{\longmapsto} u_n(x_i) \in B'_j$ (plus petit j s'il y en a plusieurs)

$\mathcal{F}_k = (\text{appl } I_k \to J_k)$

$\mathcal{F}_k$ ensemble fini de cardinal $(\text{card } J_k)^{\text{card } I_k}$

$S_k \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}_k$

$n \longmapsto v_n \in \mathcal{F}_k$

$k=0$, $\exists v \in \mathcal{F}_0$ et partie infinie $S_0 \subset \mathbb{N}$ tq $\forall n \in S_0, v_n = v$

("trous de pigeons")

Si S_k continue, $\underbrace{S_k}_{\text{infinie}} \subset \mathbb{N} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{F}_{k+1}}_{\text{finie}}$ S_{k+1} partie infinie de S_k qui est envoyée sur la m̂ fct $v \in \mathcal{F}_{k+1}$.

<u>Argument final</u> : majoration des distances.

- x_i centre de B_i

$p, q \in S_k$ $u_p(x_i), u_q(x_i)$ tombent dans la m̂ boule B'_j

$d'(u_p(x_i), u_q(x_i)) < 2 \times 2^{-k}$

- $x \in E$ pt quelconque

$\exists i, x \in B_i$ de centre $x_i \Rightarrow d(x, x_i) < 2^{-k}$

u_p, u_q λ-lipschitziennes $\Rightarrow \begin{cases} d'(u_p(x), u_p(x_i)) < \lambda 2^{-k} \\ d'(u_q(x), u_q(x_i)) < \lambda 2^{-k} \end{cases}$

$$d'(u_p(x), u_q(x)) \leq d'(u_p(x), u_p(x_i)) + d'(u_p(x_i), u_q(x_i)) + d'(u_q(x_i), u_q(x))$$
$$< d \cdot 2^{-k} + 2 \cdot 2^{-k} + d 2^{-k}$$
$$= (2d + 2) 2^{-k}$$

$C = 2d + 2$