Prenons $y \in E$, $y \neq x$.

$\exists\, g_y \in \mathcal{T}$ tq $\begin{cases} g_y(x) = u(x) \\ g_y(y) = u(y) \end{cases}$

$\exists\, V = B(x,r)$ assez petite sur laquelle $|u(z) - u(x)| < \varepsilon$ ⊛

$K = E \setminus V$ fermé dans E compact donc compact.

$\forall y \in K$, $y \neq x$ et $\exists\, W_y$ voisinage de y sur lequel $|g_y(z) - u(z)| < \varepsilon$ ⊛⊛

(continuité de $g_y - u$ qui est nulle en y)

K recouvert par les W_y

Borel-Lebesgue $\Rightarrow$ $\exists$ rec fini $K \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_p}$

$f = \min(g_{y_1}, \dots, g_{y_p}, u(x)\mathbb{1}) \in \mathcal{T}$

$f(z) = \min(g_{y_1}(z), \dots, g_{y_p}(z), u(x))$ $\forall z \in E$

On a bien $f(z) < u(z) + \varepsilon$ sur $K = E \setminus V$ par ⊛⊛ et sur V par ⊛

⑥ $\forall u \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, $\exists f \in \mathcal{T}$ tq $\forall x \in E$, $u(x) - \varepsilon < f(x) < u(x) + \varepsilon$

⑤ $\Rightarrow$ $\forall x \in E$, $\exists\, h_x \in \mathcal{T}$ tq $\begin{cases} h_x(x) = u(x) \\ h_x(y) < u(y) + \varepsilon, \ \forall y \in E \end{cases}$

$\exists\, V_x$ tq $\forall y \in V_x$ $|h_x(y) - u(y)| < \varepsilon$

V_x voisinage ouvert de x (continuité de $h_x - u$ qui est nulle en x)

Borel-Lebesgue $\Rightarrow$ $\exists$ rec fini $E = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$.

On prend $f = \max(h_{x_1}, \dots, h_{x_m}) \in \mathcal{T}$ car sur V_{x_i}

$$\underbrace{u(y) - \varepsilon <}_{\text{sur } V_{x_i}} h_{x_i}(y) \underbrace{<}_{\text{partout sur } E} u(y) + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $u(y) - \varepsilon < f(y) < u(y) + \varepsilon$ vrai sur $E = \bigcup V_{x_i}$

Cas des algebres sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

E espace compact

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$, $\|.\|_\infty$

(i) On suppose que $\mathcal{A}$ est un ss-algebre sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ stable par $+$ et $\times$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f \in \mathcal{A}$, $\lambda f \in \mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison : $f \in \mathcal{A}$, $\bar{f} \in \mathcal{A}$

(iii) $\mathcal{A}$ sépare les pts de E, $\forall x, y \in E$ avec $x \neq y$, $\exists f \in \mathcal{A}$ tq $f(x) \neq f(y)$

Theoreme (S.W sur $\mathbb{C}$) (stone) Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), on a $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$

cad $\forall u \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$, $u = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$, $f_n \in \mathcal{A}$ (limite uniforme).

Demonstration: $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$

- $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ ss-algebre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$
- $f \in \mathcal{A}$ $\quad f = g + ih$

$g = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$

$h = \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$

- Separation :

$x \neq y$.

Hyp $\exists f = g + ih$ avec $f(x) \neq f(y)$ $\Rightarrow g(x) \neq g(y)$ ou $h(x) \neq h(y)$ et $g, h \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sépare les pts.

S-W sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$

$u \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$

$u = v + iw \quad \begin{cases} v = \lim g_n, & g_n \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \\ w = \lim h_n, & h_n \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \end{cases}$

$u = \lim (g_n + ih_n)$ $\quad g_n + ih_n \in \mathcal{A}$.

Application aux polynomes trigonométriques

Polynômes trigo de plusieurs variables.

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\text{finie}} c_{p_1, \dots, p_n} e^{2\pi i (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \qquad p_j \in \mathbb{Z} \qquad (*)$$

$$= \text{pol}\left(e^{\pm 2i\pi x_1}, \dots, e^{\pm 2i\pi x_n}\right)$$

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Roméo}} \Gamma \text{ cercle unité de } \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto e^{2i\pi x}$$

$$E = \mathbb{R}/\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\text{Roméo}} \mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(e^{2i\pi x_1}, \dots, e^{2i\pi x_n}\right)$$

$\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ = algebre des fcts cts périodiques de période 1 en chaque variable x_i.

$\mathcal{P} = \{$polynôme trigo définis par $(*)\}$

$\mathcal{P}$ ss-algebre complexe de $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$

Notation "multi-indice"

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$$

$$P(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^n \\ \text{finie}}} c_p e^{2i\pi \langle p, x \rangle}$$

$$\overline{P(x)} = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_p}\, e^{-2i\pi \langle p, x \rangle}$$

$$= \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_{-p}}\, e^{2i\pi \langle p, x \rangle} \in \mathcal{P}$$

Les n fcts $x \mapsto e^{2i\pi x_1}, \dots, x \mapsto e^{2i\pi x_n}$ separent les pts de E.

Theoreme: Toute fonction continue $u \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ s'écrit $u = \lim\limits_{n \to +\infty} P_k$ uniforme avec P_k polynome trigo complexe.

II / Theoreme du pt fixe

(E, d) espace métrique complet.

On considere une application $\varphi : E \to E$ qu'on suppose "contractante", cad λ-lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$.

$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d(x,y)$ (en particulier si $x \neq y$, $d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y)$)

Suite itérée : $x_0 \in E$ pt initial. On pose par récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Thm du pt fixe : Sous les hyp précédentes, la suite (x_n) converge vers un pts $a \in E$ tq $\varphi(a) = a$. De plus, ce "pt fixe" est unique.

Demonstration :

- Unicité

Supposons a, b pts fixes. $\varphi(a) = a$
$\varphi(b) = b$

Si $a \neq b$ $d(a,b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) < d(a,b)$ Contradiction.

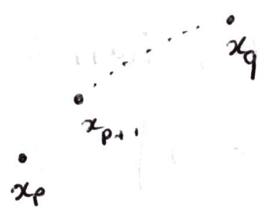
- Existence.

MQ (x_n) est une suite de Cauchy.

$p \leq q$.

$d(x_p, x_q) = d(\varphi^p(x_0), \varphi^q(x_0))$

$\varphi^p = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ "itérée p-ieme"



$d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi^p(x_0), \varphi^p(x_1))$
$\leq \lambda^p d(x_0, x_1)$

$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q)$
$\leq (\lambda^p + \lambda^{p+1} + \dots + \lambda^{q-1}) d(x_0, x_1)$

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{\lambda^p (1 - \lambda^{q-p})}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$$

$$\boxed{d(x_p, x_q) \leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_0, x_1)}$$

$\varepsilon > 0$, $\exists N$ tq $\dfrac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \varepsilon$

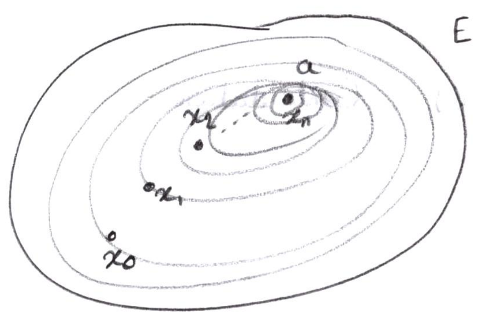
$q \geq p \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

(x_n) suite de Cauchy donc CV

$a = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

φ continue $\Rightarrow$ à la limite $a = \varphi(a)$



Vitesse de convergence :

$d(x_n, a)$

$d(x_{n+1}, a) = d(\varphi(x_n), \varphi(a)) \leq \lambda d(x_n, a)$

$\boxed{d(x_n, a) \leq \lambda^n d(x_0, a)}$ CV exponentielle en distance

$\log_{10} d(x_n, a) \leq n \log_{10} \lambda + \log_{10} d(x_0, a)$ " linéaire " en termes de nb de décimales correctes.

nb de décimales correctes $\geq n |\log_{10} \lambda| - C$

Exemple : Itération du cosinus

$\cos x \in [-1, 1]$

$E = [-1, 1] \quad \varphi(x) = \cos x$

$\varphi(E) \subset E$ (Pt essentiel à vérifier)

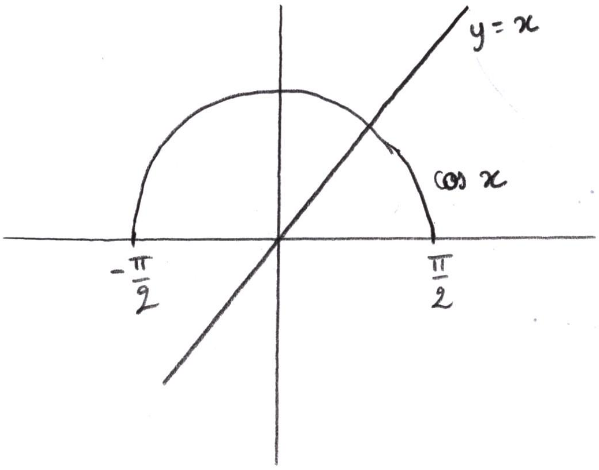
$\cos x - \cos y = \varphi(x) - \varphi(y) \underset{A.F}{=} \varphi'(c)(x-y)$

$\varphi'(x) = -\sin x$

$|\varphi'(x)| \leq \sin 1$

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d\,|x-y|$ avec $d = \sin 1 \simeq 0,84 < 1$

$\forall x_0 \in [-1, 1] \quad x_n \to a \simeq 0,74$



Compléments :

① Le thm est vrai plus généralement si on suppose que
- φ est continue
- $\varphi^p = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ est contractante pour un certain $p \geq 1$.

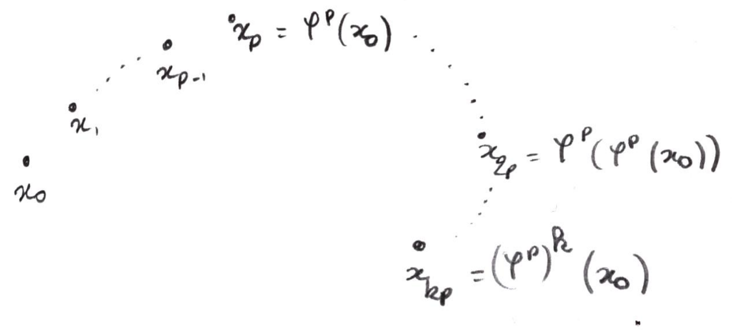
Je remplace φ par $\psi = \varphi^p$.

ψ admet un pt fixe unique a $\quad \psi(a) = a \iff \varphi^p(a) = a$

Ceci implique : $\varphi^{p+1}(a) = \varphi(\varphi^p(a)) = \varphi(a)$

$\varphi(a)$ est aussi un pt fixe de $\varphi^p \Rightarrow \varphi(a) = a$ par unicité

$\Rightarrow$ pt fixe de φ.



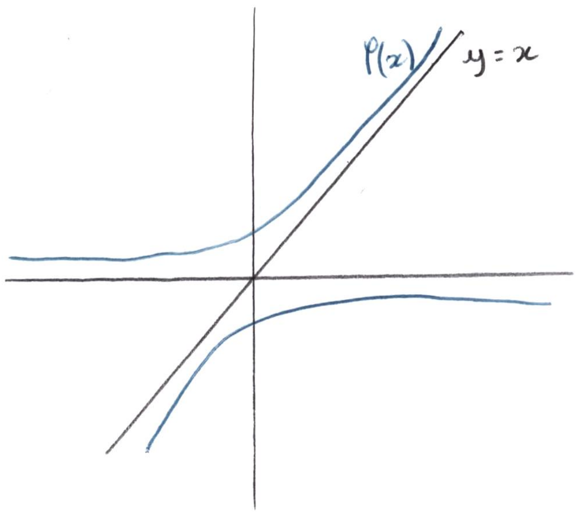
$x_{kp} \longrightarrow a$

$n = kp + r \qquad 0 \leq r \leq p-1 \qquad x_n = (\varphi^p)^k(x_r)$

$x_n \xrightarrow[n]{} a$

② Il ne suffit pas en general que φ soit faiblement contractante, ie

$\forall x, y \in E,\ x \neq y$ on ait $d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y)$



$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) =$ branche superieure d'une hyperbole d'asymptotes $y = 0$, $y = x$

Résoudre $y(y-x) = 1$.

$0 < \varphi'(x) < 1$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ φ faiblement contractante.

A.F

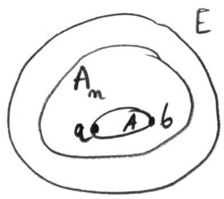
③ Si E est compact et si $\varphi : E \to E$ est faiblement contractante alors

$\exists$ un pt fixe unique $a \in E$ et $\forall x_0 \in E$, la suite itérée $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

CV vers a.

φ^n continue et E compact

Donc $A_n = \varphi^n(E)$ compact



$$A_{n+1} = \varphi(A_n) = \varphi^n(\varphi(E)) \subset \varphi^n(E) = A_n$$

(A_n) suite décroissante de fermés de E

$A_n \neq \emptyset$ donc $A = \bigcap_{x \in A} A_n \neq \emptyset$

$\varphi(A) \subset \bigcap \varphi(A_n) \subset A$

On va montrer que $\varphi(A) = A$ et $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{diam} A_n = \operatorname{diam} A = 0$

d'où $A = \{a\}$ et a point fixe de φ.