Chap 7 : Elements d'analyse fonctionnelle

Analyse fonctionnelle : . etude des espaces de fonctions
. analyse et geométrie en dim infinie

I - Approximation des fonctions continues.

1/ Theoreme de Dini

theoreme : Soit (E, d) un espace metrique compact.
On considere $f_n : E \to \mathbb{R}$ continues, $n \in \mathbb{N}$ formant une suite monotone.
On suppose $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ continue.
Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformement vers f.

demo : . On se place dans le cas d'une suite $\searrow$
(sinon $f_n \rightsquigarrow -f_n$, $f \longrightarrow -f$)
. On suppose donc $f_n \geq f$, et $f_n \downarrow f$
Posons $g_n = f_n - f$ continue et $g_n \downarrow 0$
. On peut donc supposer $(f_n) \searrow$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 0$
Prenons $x \in E$,
CV simple $\forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon}$, $n \geq N_{x,\varepsilon} \Rightarrow 0 \leq f_n(x) < \varepsilon$
Considerons $f_{N_{x,\varepsilon}}$ qui est continue et $< \varepsilon$ au point x
$\exists$ voisinage ouvert $V_{x,\varepsilon}$ sur lequel $f_{N_{x,\varepsilon}}(y) < \varepsilon$
[$V_{x,\varepsilon} = \underbrace{f^{-1}_{N_{x,\varepsilon}}}_{\text{continue}} (]-\infty, \varepsilon[)$ ouvert contenant x]

$E = \bigcup\limits_{x \in E} V_{x,\varepsilon}$

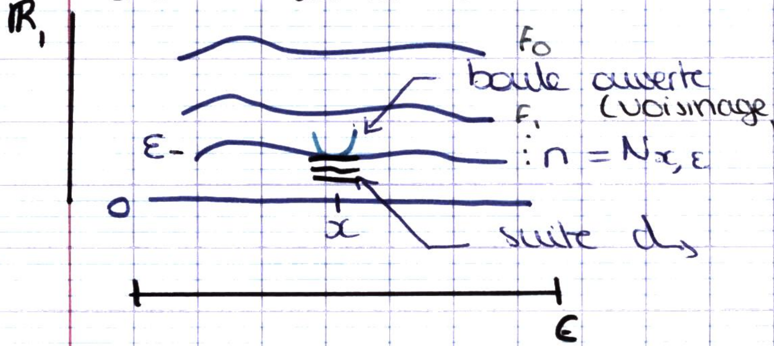
Borel Lebesgue $\Rightarrow$ recouvrement fini $V_{x_1,\varepsilon}, \dots, V_{x_p,\varepsilon}$
On a les entiers correspondants $N_{x_1,\varepsilon}, \dots, N_{x_p,\varepsilon}$
Prenons $N = \max(N_{x_1,\varepsilon}, \dots, N_{x_p,\varepsilon})$

Pour $n \geq N$ et $y \in E$ quelconque, $\exists i, y \in V_{x_i,\varepsilon} \Rightarrow$
$\Rightarrow f_{N_{x_i,\varepsilon}}(y) < \varepsilon$
$n \geq N \geq N_{x_i,\varepsilon} \Rightarrow 0 \leq f_n(y) \leq f_{N_{x_i,\varepsilon}}(y) < \varepsilon$
$\forall n \geq N \quad \forall y \in E \quad 0 \leq f_n(y) < \varepsilon$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{y \in E} |f_n(y)| \leq \varepsilon$$

($< \varepsilon$ sup atteint)

donc CV uniforme.

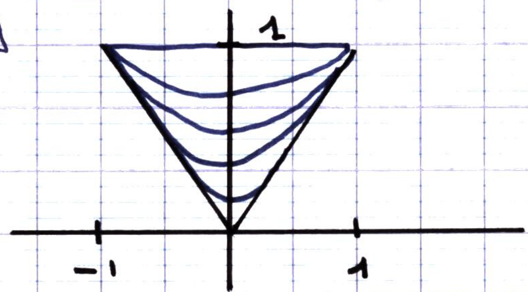


$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$
↳ où ma fonction est en dessous pour 1 pt en utilisant BL ca devient vrai sur tt l'ensemble

<u>Conséquence</u>: Il existe une suite décroissante de fonctions polynômes P_n $[-1;1] \to \mathbb{R}$ tq

- $0 \leq P_n(x) \leq 1$
- $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = |x|$ avec CV uniforme

[comme $x \mapsto |x|$ continue, la CV uniforme est automatiq- par Dini]



<u>Construction</u>:
- $P_0(x) = 1$
- Par récurrence

$P_{n+1}(x) = P_n(x) - \frac{1}{2}(P_n(x)^2 - x^2)$ C'est bien un polynome

<u>démo</u>: Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x| \leq P_n(x) \leq 1 \quad (*)$

- Vrai pour $n = 0$

Hyp. Vrai pour $n \Rightarrow$ vrai pour $n+1$

$$P_n(x) \geq |x| \Rightarrow P_n(x)^2 \geq |x|^2 = x^2$$
$$\Rightarrow P_n(x)^2 - x^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$$

$$P_{n+1}(x) - |x| = (P_n(x) - |x|) - \frac{1}{2}(P_n(x) - |x|)(P_n(x) + |x|)$$
$$= \underbrace{(P_n(x) - |x|)}_{\geq 0}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + |x|)\right)}_{\geq 0 \text{ car } P_n(x) \leq 1 \text{ et } |x| \leq 1}$$

Par recurrence $(*)$ est vrai
de plus (P_n) suite decroissante.

$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \downarrow P_n(x)$, on a $|x| \leq f(x) \leq 1$ $(**)$

$P_{n+1}(x) = P_n(x) - \frac{1}{2}(P_n(x)^2 - x^2)$
à la limite

$$\boxed{f(x) = f(x) - \frac{1}{2}(f(x)^2 - x^2)}$$

$\Rightarrow f(x)^2 = x^2 \underset{\text{grâce à } (**)}{\Rightarrow} f(x) = |x|$

CV uniforme par Dini.

2) theoreme de Stone - Weierstraß.

theoreme: Soit (E, d) un espace metrique compact
$\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ evn, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ (f continues)
On considère une sous algebre
$A \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
hypothèse: " A sépare les points de E "
$\forall x, y \in E, x \neq y, \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$
Conclusion: A dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ pour la cvg uniforme
$\forall \varepsilon > 0$ $\forall u \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, $\exists f \in A$, tq $\|u - f\|_\infty < \varepsilon$

Application fondamentale:

K partie compacte de $\mathbb{R}^n$ ($\Leftrightarrow$ fermée bornée)
$A = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polynomes $\subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$
restreints à K

- A sous algèbre
- A sépare les points, $x \neq y \Rightarrow \exists i \; x_i \neq y_i$

<u>Corollaire</u>: Sur un espace compact $K \subset \mathbb{R}^n$, on peut approcher uniformement toute fonction cont $u \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ par des polynomes $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

$$\sup_{x \in K} |u(x) - P(x)| < \varepsilon$$

"Densité des polynomes dans les fonctions cont"

demo du Thm de SW:

$\bar{A}$ adherence de A ds $(\mathcal{C}(E, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

① $\bar{A}$ est encore une sous algebre

$f \in \bar{A}$ $\quad f = \lim f_n$ uniforme, $f_n \in A$

$g \in \bar{A}$ $\quad g = \lim g_n$ uniforme, $g_n \in A$

- $f + g = \lim (f_n + g_n)$ uniforme

$$\|f + g - (f_n + g_n)\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|g - g_n\|_\infty$$

- $f \times g = \lim f_n \times g_n$

$$fg - f_n g_n = (f - f_n) g + f_n (g - g_n)$$

$$\|fg - f_n g_n\| \leq \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\to 0} \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \underbrace{\|g - g_n\|_\infty}_{\to 0}$$

- $f \in \bar{A} \Rightarrow \lambda f \in \bar{A}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda f = \lim \lambda f_n \qquad \lambda f_n \in A$

② $f \in \bar{A} \Rightarrow |f| \in \bar{A}$

Quitte à remplacer f par λf avec λ petit, on peut supposer $\|f\|_\infty \leq 1$ autrement dit $-1 \leq f_n(x) \leq 1$ sur E

$\exists \; P_n(t) \qquad P_n : [-1; 1] \to [0, 1]$

$P_n(t) \xrightarrow[\text{unif}]{} |t|$ sur $[-1,1]$

$\delta_n = \sup_{t \in [-1;1]} |P_n(t) - |t|| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

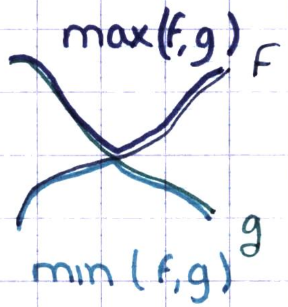
$\sup_{x \in E} |P_n(f(x)) - |f(x)|| \leq \delta_n \longrightarrow +\infty$

$|f| = \lim P_n(f)$ uniforme $\quad P_n(f) \in \bar{A}$

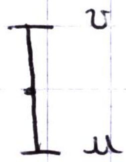
$|f| \in \bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (demontre bien ②)

③ $f, g \in \bar{A} \Rightarrow \max(f,g)$ et $\min(f,g) \in \bar{A}$

$h = \max(f,g) \qquad h(x) = \max(f(x), g(x))$



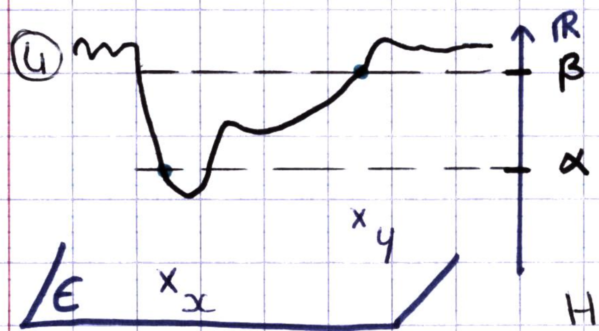
$u, v \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \max(u,v) = \dfrac{u+v}{2} + \dfrac{|u-v|}{2} \\ \min(u,v) = \dfrac{u+v}{2} - \dfrac{|u-v|}{2} \end{cases}$



$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|g-f| \in \bar{A}$ (car Algebre)

$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|g-f| \in \bar{A}$

④



$\forall x, y \in E, x \neq y$

$\exists f \in A$ tq $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$

<u>Hyp</u> : $\exists g \in A \quad g(x) \neq g(y)$

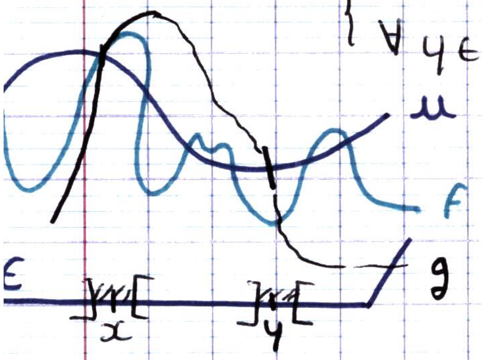
$F = \lambda \mathbb{1} + \mu g \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

je veux $\begin{cases} \lambda + \mu g(x) = \alpha \\ \lambda + \mu g(y) = \beta \end{cases}$

$\mu = \dfrac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}$ $\qquad$ $\lambda = \alpha - \dfrac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}\, g(x)$

(5) $\forall u \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R}), \forall x \in E$

$\exists f \in \bar{A}$ $\begin{cases} f(x) = u(x) \\ \forall y \in E \quad f(y) < u(y) + \varepsilon \end{cases}$



u fonction qu'on veut atteindre
on va trouver une fonction qui passe par u
en un pt (au point x ok)
(Pr 2 pt qcq on arrive à passer où on veut

Prenons $y \in E$, $y \neq x$

$\exists g_y \in \bar{A}$ tq $\begin{cases} g_y(x) = u(x) \\ g_y(y) = u(y) \end{cases}$
(étape 4)

g : on sait où va
passe que au pt x et y
après on contrôle rien du tt

$\exists V = B(x,r)$ assez petite sur laquelle $|u(z) - u(x)| < \varepsilon$
$K = E \setminus V$ (complementaire d'ouvert ds un compact
= fermé dans un compact)

$K = E \setminus V$ fermé ds E compact, donc Compact.
$\forall y \in K$, $y \neq x$ et $\exists W_y$ voisinage ouvert de y sur lequel
$|g_y(z) - u(z)| < \varepsilon$
(continuité de $g_y - u$ qui est nulle en y)
K recouvert par les W_y
BL $\Rightarrow$ $\exists$ recouvrement $K \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_p}$
$f = \min(g_{y_1}, \dots, g_{y_p}, u(x)\mathbb{1})$
On a bien $f(z) < u(z) + \varepsilon$ sur $K = E \setminus V$