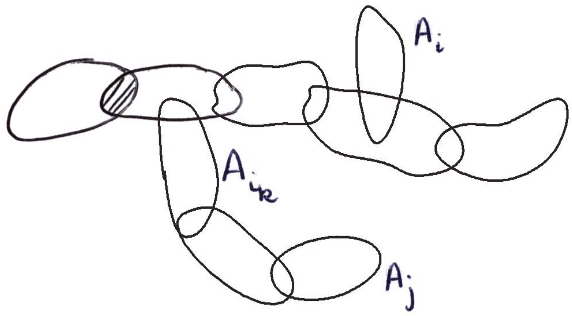
Union de connexes

Proposition : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes d'un espace E.
On suppose que $\forall i, j \in I$, $\exists$ suite $i = i_1, i_2, \dots, i_n = j$ tq $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$
Alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe

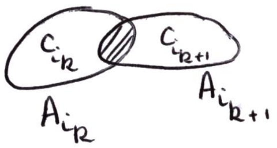


Cas simple : $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$

Demonstration : Soit $u : A \to \{0,1\}$ fonction continue.

$u_{|A_i}$ continue $\Rightarrow$ u = constante c_i sur A_i.

$\forall i,j,\ \exists\, i=i_1, i_2, \dots, i_n = j$ $\quad c_{i_k} = c_{i_{k+1}} \Rightarrow c_i = c_j$



donc $u : A \to \{0,1\}$ constante.

Passage à l'adhérence :

Propriété :

(i) A partie connexe de E $\Rightarrow$ $\bar{A}$ partie connexe de E

(ii) A partie connexe de E $\Rightarrow$ $\forall B$ avec $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe

Demonstration de ii) : Supposons A connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$.

Supposons $B = F \cup G$ disjoints $\neq \emptyset$

F, G ouverts et fermés dans B

$A = \underbrace{(A\cap F)} \cup \underbrace{(A \cap G)}$

parties ouvertes et fermées de A.

Question : A-t-on $A \cap F \neq \emptyset$ et $A \cap G \neq \emptyset$

Or $\overline{A\cap F} \cap B = F$. (*) En effet, $\overline{A\cap F} \cap B \subset \bar{F} \cap B = F$ car F fermé dans B

si $x \in F \subset B \subset \bar{A}$, $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $x_n \in A$

F ouvert dans A, x_n voisin de $x \in F \Rightarrow x_n \in F$ pour n assez grand $\geq n_0$

$x_n \in A \cap F$ pour $n \geq n_0 \Rightarrow x = \lim_{n\to+\infty} x_n \in \overline{A\cap F}$ et en fait $x \in (\overline{A\cap F}) \cap B$

(*) et l'hyp $F \neq \emptyset \Rightarrow A \cap F \neq \emptyset$

$\qquad\qquad\quad G \neq \emptyset \Rightarrow A \cap G \neq \emptyset$ $\qquad$ Contradiction car A connexe.

II/ Connexité par arcs

Définition : Un espace (E, d) est dit connexe par arcs si $\forall a, b \in E$, $\exists$ une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ ("chemin d'extrémités a, b").

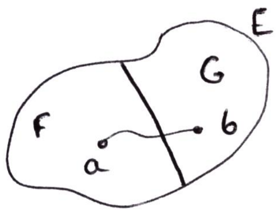
Théorème : E connexe par arcs $\Rightarrow$ E connexe.

Démonstration : $\left.\begin{array}{l}[a,b] \text{ connexe} \\ \gamma \text{ continue}\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma([a,b])$ connexe

$C_{a,b} = \gamma([a,b])$ partie connexe de E.

$E = \bigcup_b C_{a_0,b}$ et $\bigcap_b C_{a_0,b} \ni a_0$ $\quad \Rightarrow E$ connexe.

2ème méthode : F, G ouvertes, fermées $\neq \emptyset$, disjointes



$a \in F$, $b \in G$

$\gamma : [0,1] \to E$
$\quad 0 \mapsto a$
$\quad 1 \mapsto b$

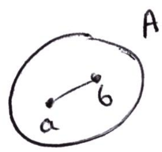
$[0,1] = \gamma^{-1}(F) \cup \gamma^{-1}(G)$

parties ouvertes et fermées disjointes de $[0,1]$ et non vides $(0 \in \gamma^{-1}(F),\ 1 \in \gamma^{-1}(G))$

Contradiction car $[0,1]$ connexe

Corollaire : $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé.

A convexe $\Rightarrow$ A connexe par arcs
$\not\Leftarrow$



$\gamma : [0,1] \to A$
$\quad t \mapsto (1-t)a + tb$

Proposition : Soit $(E, \|.\|)$ e.v.n et $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathcal{U}$ est connexe

(ii) $\mathcal{U}$ est connexe par arcs

(iii) $\mathcal{U}$ est connexe par lignes polygonales.

Demonstration : * (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) evident ou déjà ~~vu~~ connu

* (i) $\Rightarrow$ (iii) : Considerons $\mathcal{R}_{pol}$.

$a \, \mathcal{R}_{pol} \, b \iff$ je peux joindre a et b par une ligne polygonale dans $\mathcal{U}$.

$C_{pol}(a) = \{ b \in \mathcal{U} \, / \, b$ peut-être relié à a par une ligne polygonale $\}$

Lemme : $C_{pol}(a)$ est un ouvert.

$\mathcal{U}$ ouvert $\Rightarrow \exists \, \varepsilon > 0, \; B(b, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$

$x \in B(b, \varepsilon) \subset E \Rightarrow [b, x] \subset B(b, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$

$b \in C_{pol}(a) \Rightarrow B(b, \varepsilon) \subset C_{pol}(a)$

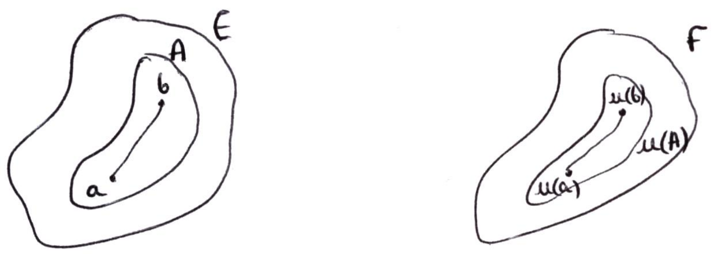
$C_{pol}(a) = \complement_{\mathcal{U}} (\cup$ autres classes$)$ fermés de $\mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ connexe $\Rightarrow C_{pol}(a) = \mathcal{U}, \; \forall a \in \mathcal{U}$.

Propriétés d'hérédité de la connexité par arcs

(i) Soit $u : E \to F$ continue et A partie de E

A connexe par arcs $\Rightarrow u(A)$ connexe par arcs.



$$\gamma : [0,1] \to A$$
$$0 \mapsto a$$
$$1 \mapsto b$$

$$u \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow u(A)$$
$$0 \longmapsto u(a)$$
$$1 \longmapsto u(b)$$

(ii) $E_1, \dots, E_n$ connexes par arcs $\Rightarrow E_1 \times \dots \times E_n$ connexe par arcs :

$a = (a_1, \dots, a_n)$ à relier à $b = (b_1, \dots, b_n)$

$$\exists\ \gamma_i : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & E_i \\ 0 & \longmapsto & a_i \\ 1 & \longmapsto & b_i \end{array}$$

On prend $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

(iii) Proposition : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'un espace E.
On suppose que $\forall i, j \in I$, $\exists$ suite $i = i_1, i_2, \dots, i_n = j$ tq $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$
Alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs

(iv) A connexe par arcs $\not\Rightarrow \bar{A}$ connexe par arcs.
(mais A convexe $\Rightarrow \bar{A}$ convexe)

$E = \mathbb{R}^2$

$$I = \,]0,1] \xrightarrow{u} \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (t, \sin \tfrac{1}{t})$$

$A = u(]0,1]) =$ graphe de $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ continue} \\ ]0,1] \text{ connexe} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ connexe}$$
$$\Rightarrow \bar{A} \text{ connexe}$$

$\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$

$\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs !

III/ Composantes connexes (resp par arcs)

Définition : (E, d) espace métrique.
On appelle composante connexe $C(x)$ d'un pt $x \in E$ la réunion de toutes les parties connexes A de E qui contiennent x. C'est le plus grand connexe qui contient x.

Définition analogue pour les composantes connexes par arcs $C_{arc}(x)$.

$y \in C(x)$: " y est connecté à x "

$y \in C_{arc}(x)$: " y est connecté à x par arc "

sont des relations d'équivalence.

<u>Conséquence</u> : Les composantes connexes (resp les composantes connexe par arcs) de E forment une partition de E.

<u>Remarque</u> : • $C(x)$ est une partie <u>fermée</u> de E.

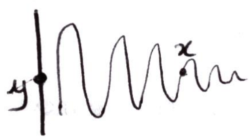
$\overline{C(x)}$ est encore connexe donc $\overline{C(x)} = C(x)$

• Si l'espace E admet seulement un nombre fini de composantes connexes, celle-ci sont à la fois ouvertes et fermées.

$$C_i = \complement_E \underbrace{\left(\bigcup_{j \neq i} C_j \right)}_{\text{autres classes}} \qquad \bigcup \text{ finie de fermés}$$

• Les $C_{arc}(x)$ ne sont pas nécessairement fermées.

$\bar{A}$ = adh du graph A



$C_{arc}(x) = A$ pas fermé (par hasard c'est ouvert)

$C_{arc}(y) = \{0\} \times [-1, 1]$ fermé (par chance) mais pas ouvert.

• E espace discret $\Rightarrow C(x) = \{x\}$

<u>Definition</u> : On dit que E est totalement discontinu si $\forall x \in E$, $C(x) = \{x\}$.

<u>Exemples</u> : • $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ (discrets)

• $E = \mathbb{Q}$ totalement discontinu

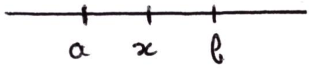
<u>Lemme</u> : $C(x) \subset \bigcap\limits_{\substack{A \text{ à la fois ouvert} \\ \text{et fermé de } E \\ A \ni x}} A$

$$C(x) = \left(C(x) \cap A\right) \cup \left(C(x) \cap \complement_E A\right)$$

$$\Rightarrow C(x) \cap \complement_E A = \emptyset$$

$$\Rightarrow C(x) \subset A$$

$x \in \mathbb{Q}$, $\exists\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ arbitrairement proches de x avec $a < x < b$



$]a,b[_{\mathbb{Q}} = [a,b]_{\mathbb{Q}}$ partie à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow C(x) = \{x\}$ fermé mais pas forcément ouvert.

<u>Exemple</u> : Ensemble de Cantor ("triadique")

$$K = \left\{ x \in [0,1],\ x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n},\ a_n = 0 \text{ ou } 2 \right\}$$

a_1

a_2

$K_n = [0,1] \setminus$ (tiers médians jusqu'au chiffre a_n)

= réunion finie de fermés

$K = \bigcap K_n$ totalement discontinu