$\ell^{\infty}(\mathbb{N}) = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ / \ \|x\|_{\infty} = \sup |x_n| < +\infty \}$

$P(r) = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ / \ |x_n| \leq r_n \}$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$ alors $P(r)$ compact

Suite de pts de $P(r)$

$k \mapsto x_k = (x_{k,0}, x_{k,1}, \dots, x_{k,n}, \dots)$ $\qquad |x_{k,n}| \leq r_n$

$|x_{k,0}| \leq r_0 \Rightarrow \exists \underset{\text{infinie}}{S_0} \subset \mathbb{N} \qquad x_{k,0} \xrightarrow[\substack{k \in S_0 \\ k \to +\infty}]{} \ell_0$

$[-r_0, r_0]$ compact

Par récurrence, on construit des parties infinies $S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_0 \subset \mathbb{N}$ tq

$x_{k,n} \xrightarrow[\substack{k \in S_n \\ k \to +\infty}]{} \ell_n$, et on a $|\ell_n| \leq r_n$

$\ell = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n, \dots) \in P(r)$

"Astuce de la ss-suite diagonale"

p_m = m-ième elt de S_m ordonné par ordre croissant.

Suite strictement croissante.

$x_{p_j, n} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \ell_n$ car si $j \geq n$ on a $p_j \in S_j \subset S_n$

$x_{p_j} = (x_{p_j,0}, \dots, x_{p_j,n}, \dots) \xrightarrow[\|.\|_\infty]{} \ell = (\ell_0, \dots, \ell_n, \dots)$ quand $j \to +\infty$

$\varepsilon > 0$ fixé.

$\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$ donc $\exists N_\varepsilon$ tq $0 \leq r_n < \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$.

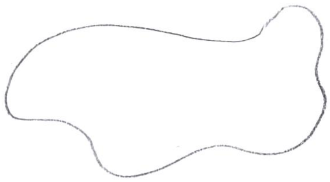
$x_{p_j,n} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \ell_n$, $\exists J_{n,\varepsilon}$ tq $j \geq J_{n,\varepsilon} \Rightarrow |x_{p_j,n} - \ell_n| < \varepsilon$

$K_\varepsilon = \max\limits_{n \leq N_\varepsilon - 1} J_{n,\varepsilon} \in \mathbb{N}$

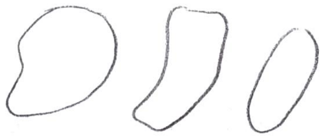
$j \geq K_\varepsilon \quad \|x_{p_j} - \ell\|_\infty = \sup\limits_n \underbrace{|x_{p_j,n} - \ell_n|}_{n \leq N_\varepsilon - 1 \,|\, n \geq N_\varepsilon}$ $\begin{cases} < \varepsilon & \text{si } n \leq N_\varepsilon - 1 \\ 2r_n < 2\varepsilon & \text{si } n \geq N_\varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow \|x_{p_j} - \ell\|_\infty \leq 2\varepsilon$

Chapitre 6 : Connexité



connexe



pas connexe

I/ Définitions et principales propriétés

(E, d) espace métrique.

Définition : i) On dira que E est connexe si on ne peut pas écrire $E = F \cup G$, F, G, parties fermées, disjointes non vides de E.

F $\quad$ G

$F = \complement_E G \qquad G = \complement_E F$

$\Leftrightarrow$ ii) $\nexists$ $E = U \cup V$, U, V ouverts disjoints non vides.

$\Leftrightarrow$ iii) $\nexists$ partie $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $A \neq E$, A à la fois ouverte et fermée

$\Leftrightarrow$ iii') A partie ouverte et fermée, $A \neq \emptyset \Rightarrow A = E$

$\Leftrightarrow$ iv) $\nexists$ A partie de E, $A \neq \emptyset$, $A \neq E$ tq $Fr_E(A) = \emptyset$

$Fr_E(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} = \mathring{A}$

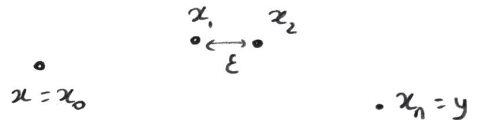
$\Leftrightarrow$ A à la fois ouverte et fermée.

Exemples :

- E espace fini (ou plus généralement discret) est connexe $\Leftrightarrow$ card $E \leq 1$
- $\mathbb{Q} =]-\infty, \sqrt{2}[_{\mathbb{Q}} \cup]\sqrt{2}, +\infty[_{\mathbb{Q}}$ partition en deux ouverts ou en 2 fermés
  $\mathbb{Q}$ non connexe
- $E = \underbrace{[0, 1[}_{F} \cup \underbrace{]3, 4]}_{G}$ $\qquad$ F fermé dans E (pas dans $\mathbb{R}$)
  G fermé dans E

  E non connexe.

Définition : (E, d) est dit bien enchaîné si : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x, y \in E$, $\exists$ ss-suite fini $x_0, x_1, \dots, x_n$ avec $\forall i, 0 \leq i < n$, $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ et $x_0 = x$, $x_n = y$



Relation de ε - chaîne : $x \mathcal{R}_\varepsilon y$ s'il existe une ε-chaîne reliant x à y.

$\mathcal{R}_\varepsilon$ relation d'equivalence.

$C_\varepsilon(x)$ = classe d'equivalence de x

$= \{ y$ que l'on peut relier à x par un ε-chaîne $\}$

Lemme : $C_\varepsilon(x)$ est un ouvert

$y \in C_\varepsilon(x) \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset C_\varepsilon(x)$

Remarque : Si une relation d'équivalence a des classes d'equivalences toutes ouvertes, elles sont aussi fermées.

Chaque classe $C = \complement_E \big(\underbrace{\bigcup \text{ autres classes}}_{\text{ouvert}} \big)$

Conclusion : $C_\varepsilon(x)$ partie ouverte et fermée

$C_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ car $x \in C_\varepsilon(x)$

Theoreme : Tout espace (E, d) connexe est bien enchaîné.

Demonstration : $\forall \varepsilon > 0$, $C_\varepsilon(x) = E$ si E est connexe

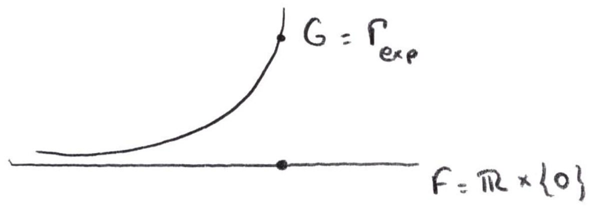
Attention : Connexe $\not\Leftarrow$ bien enchaîné

Exemples : • $\mathbb{Q}$ bien enchaîné mais non connexe, $h = \dfrac{y - x}{N} < \varepsilon$ pour N assez grand

$x_n = x + nh$

- $E \subset \mathbb{R}^2$

$E = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \Gamma_{exp}$ $\qquad$ $\Gamma_{exp} = \{(x, e^x),\ x \in \mathbb{R}\}$



bien enchaîné mais non connexe

Theoreme: Soit (E, d) un espace compact. Alors E connexe $\Leftrightarrow$ E bien enchaîné.

Démonstration:

$(\Rightarrow)$ Toujours vrai

$(\Leftarrow)$ Contraposée : E non connexe $\Rightarrow$ E non bien enchaîné ?

E non connexe : $E = F \cup G$ fermés disjoints $\neq \emptyset$

$\delta = d(F, G) > 0$

$d(F, G) = \inf \{ d(x,y),\ x \in F,\ y \in G\}$

$\qquad = \inf \{ d(x, G),\ x \in F\}$

$x \longmapsto d(x, G)$ fct continue > 0 $\quad$ (G fermé $\Rightarrow d(x, G) > 0$ si $x \notin G$)

F fermé dans E compact $\Rightarrow$ F compact

$\exists\, x_0 \in F$, $\inf d(x, G) = d(x_0, G)$ $(= d(x_0, y_0)$ $\ y_0 \in G)$

$\delta = d(x_0, G) > 0$

Si on prend $\varepsilon < \delta$, il n'y a pas de ε-chaîne entre un pt $x \in F$ et un pt $y \in G$, donc E n'est pas bien enchaîné.

Corollaire: $[a, b]$ intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors $[a, b]$ est connexe

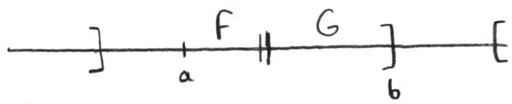
Demonstration: $[a, b]$ compact et bien enchaîné.

Théorème : Dans $\mathbb{R}$, les parties connexes sont les intervalles.

Démonstration : • I intervalle $\Rightarrow$ I connexe

$I = F \cup G$ fermés, non vides, disjoints de I

$a \in F$, $b \in G$



$[a,b] = \underbrace{([a,b] \cap F)}_{\substack{\text{fermé de} \\ [a,b] \neq \emptyset}} \cup \underbrace{([a,b] \cap G)}_{\substack{\text{fermé de} \\ [a,b] \neq \emptyset}}$ pas possible car $[a,b]$ connexe.

• I pas un intervalle $\Rightarrow$ I pas connexe

Critère I intervalle $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in I$, $[a,b] \subset I$

I pas un intervalle $\Leftrightarrow$ $\exists\, a,b \in I$, $\exists c$, $a < c < b$, $c \notin I$

$I = \underbrace{(I \cap]-\infty, c[)}_{\substack{\text{ouvert} \\ \text{de } I}\ \ni a} \cup \underbrace{(I \cap]c, +\infty[)}_{\substack{\text{ouvert} \\ \text{de } I}\ \ni b}$

$\Rightarrow$ I non connexe.

Propriétés d'hérédité des connexes

Théorème : $u : E \to F$ application continue

A partie connexe de E $\Rightarrow$ $u(A)$ partie connexe de F

Démonstration : $u(A)$ pas connexe $\Rightarrow$ A pas connexe ?

On peut supposer $A = E$, sinon je remplace E par A, u par $u_{|A}$.

$u(E)$ pas connexe $\Rightarrow$ E pas connexe.

$u(E) = B \cup C$ fermés disjoints de $u(E)$ non vides

$B = u(E) \cap B'$ $\qquad$ B' fermé de F

$C = u(E) \cap C'$ $\qquad$ C' fermé de F

$u(E) \cap B' \cap C' = \emptyset$.

$P = u^{-1}(B) = u^{-1}(B')$ fermé de E

$Q = u^{-1}(C) = u^{-1}(C')$ ——————

P, Q disjoints car si $x \in P \cap Q$ alors $u(x) \in B \cap C$ donc E pas connexe.

Remarque : E non connexe $\Leftrightarrow \exists\, u : E \longrightarrow \{0,1\}$ continue surjective

$E = F \cup G$ fermés disjoints $\quad u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F \\ 1 & \text{si } x \in G \end{cases}$

$\Rightarrow$ ok

$\Leftarrow$ $F = u^{-1}(\{0\})$ fermé $\neq \emptyset$

$G = u^{-1}(\{1\})$ fermé $\neq \emptyset$

Reformulation : E connexe $\Leftrightarrow \forall\, u : E \to \{0,1\}$ continue alors $u \equiv 0$ ou $u \equiv 1$.

Exercice : Plus généralement $u : E \to F$ continue avec E connexe et F discret alors u est constante.

Théorème : $E_1, \dots, E_n$ connexes $\Rightarrow E_1 \times \dots \times E_n$ connexe

Démonstration : $u : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow \{0,1\}$ continue.

$x_1 \mapsto u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{x_2, \dots, x_n}$ constante $\in \{0,1\}$

u constante par rapport à chaque variable $\Rightarrow u$ constante.