Theoreme de Heine : Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques. Supposons E compact. Alors toute application continue $u : E \to F$ est uniformément continue.

Demonstration :

1ere méthode : Demonstration par l'absurde

? $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, \ d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(u(x), u(y)) < \varepsilon$

négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in E, \ d(x,y) < \delta$ et $d'(u(x), u(y)) \geqslant \varepsilon$.

Fixons un tel $\varepsilon > 0$ et prenons $\delta = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\exists x_n, y_n \in E$ tq $d(x_n, y_n) < 2^{-n}$ et $d'(u(x), u(y)) \geqslant \varepsilon$.

E compact $\Rightarrow$ $\exists$ ss-suite $x_{s_k} \longrightarrow a \in E$

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \underbrace{d(x_{s_k}, y_{s_k})}_{< 2^{-s_k}} = 0$

on a aussi $y_{s_k} \longrightarrow a \in E$

Or u est continue en a :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \rightsquigarrow \exists \eta > 0, \text{ tq } \forall x \in B(a,\eta), \ d'(u(x), u(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{Si } y \in B(a,\eta), \text{ on a aussi } d'(u(y), u(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \underset{\text{inég. }\Delta.}{\Rightarrow} d'(u(x), u(y)) < \frac{2\varepsilon}{2}$$

Ceci contredit le fait que $d'(u(x_{s_k}), u(y_{s_k})) \geqslant \varepsilon$ puisque $x_{s_k}, y_{s_k} \in B(a,\eta)$ pour k assez grand. $\square$

2ème méthode : Démonstration par Borel-Lebesgue.

Continuité : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \delta_{x,\varepsilon}$ tq $x' \in B(x, \delta_{x,\varepsilon})$ alors $d'(u(x), u(x')) < \varepsilon$.

$U_x = B(x, \delta_{x,\varepsilon})$ ouvert de E.

$(U_x)_{x \in E}$ recouvrement ouvert de E.

Lemme 1 de Borel-Lebesgue $\Rightarrow \exists \delta > 0, \forall a \in E, \exists x \in E, B(a,\delta) \subset U_x$

$\forall a, b \in E$ avec $d(a,b) < \delta$, $b \in B(a,\delta) \subset$ certain $\mathcal{U}_x$

$a, b \in \mathcal{U}_x$.

$$\left.\begin{array}{ll} x' = a & d'(u(x), u(a)) < \varepsilon \\ x' = b & d'(u(x), u(b)) < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow d'(u(a), u(b)) < 2\varepsilon$$

$\forall a, b \in E$, $d(a,b) < \delta \Rightarrow d'(u(a), u(b)) < 2\varepsilon$

$\emptyset$

IV/ Compacité dans les espaces vectoriels normés

1) Comparaison des normes dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$E \simeq \mathbb{K}^n$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad x_j \in \mathbb{K}$

$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = N_2(x)$

Prenons une autre norme $N(x) = \|x\|$

Sphère unité : $S = \{x \in \mathbb{K}^n, |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1\}$ pour $\|.\|_2$

- S bornée
- S fermée dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$

$S = N_2^{-1}(\{1\})$ $\quad N_2 : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

image inverse
d'un fermé

S est une partie compacte de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$

Lemme : $x \to N(x)$ est continue par rapport à $\|.\|_2$.

Demonstration : $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$

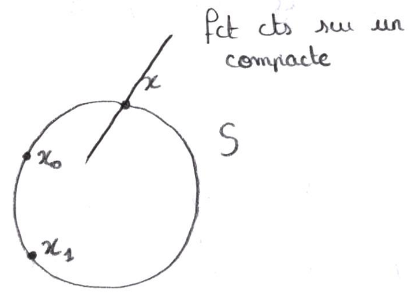
$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$$N(x) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| N(e_j) \underset{C.S}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} N(e_j)^2}$$

$N(x) \leq C \|x\|_2$ où $C = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} N(e_j)^2}$

$|N(x)-N(y)| \leq N(x-y) \leq C\,\|x-y\|_2$

ineg Δ



$$m = \min_{x\in S} N(x) = N(x_0) > 0$$

$$M = \max_{x\in S} N(x) = N(x_1) > 0$$

Je dis que $m\|x\|_2 \leq N(x) \leq M\|x\|_2$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$.

En effet, c'est vrai sur S et en général $x = \lambda x'$ $\quad \lambda = \|x\|_2 \quad x' = \dfrac{x}{\|x\|_2} \in S$

Homogénéité : $\quad N(x) = N(\lambda x') = |\lambda| N(x')$.

__Theoreme :__ Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

__Corollaire 1 :__ $(E, \|.\|)$ espace normé de dimension finie alors E est complet.

__Demonstration :__ $\mathbb{K}^n$ avec $N(x) = \max|x_j|$ est complet.

__Theoreme :__ Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E.

(i) $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F. On peut avoir F non fermé, $\overline{F} \underset{\neq}{\supset} F$

(ii) Si F est de dimension finie, alors F est fermé ie $\overline{F} = F$.

__Demonstration :__ (i) $\overline{F}$ stable par combinaisons linéaires.

$x, y \in \overline{F} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad x_n \in F$$

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n \qquad y_n \in F$$

$$\lambda x + \mu y = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\lambda x_n + \mu y_n}_{\in F} \in \overline{F}$$

(ii) $(F, \|.\|)$ restriction de la norme sur E.

F dim finie $\Rightarrow F$ complet $\Rightarrow F$ fermé

Exemple de sous-espace vectoriel non fermé en dimension infinie

- $E = \ell^2(\mathbb{N})$ $\quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2} < +\infty$

$F \subset E$ sous-espace vectoriel formé des x "presque nuls" ie $x_n = 0$ pour $n \geqslant N$ assez grand.

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)$

$x_N = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in F$

troncature à l'ordre N

$$\|x - x_N\| = \underbrace{\sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2}}_{\text{série CV}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

F dense dans E : $\overline{F} = E \supsetneq F$

Proposition : $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé de dimension finie. Alors les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Demonstration : $(E, \|.\|) \rightsquigarrow (\mathbb{K}^n, \max|x_i|)$

Cas particulier : $B_F(a,r)$ sont compactes

$S(a,r) = \{x, \|x-a\| = r\}$ compacte.

Propriété : Soit $(E, \|.\|)$ de dimension infinie.

$\exists (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|e_n\| = 1$ tq si $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$, alors $d(e_n, F_n) = 1$.

$\dim F_n = n$

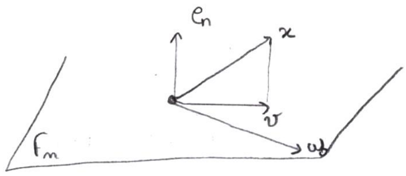
$F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$

Demonstration :

- Je prends e_0 quelconque. $F_1 = \mathbb{K}e_0$

- Supposons $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ construits (et linéairement indépendants)

$F_n = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ de dim n.



$F_n = \overline{F_n} \subset E$

Prenons $x \in E$, $x \notin F_n = \overline{F_n}$

Cherchons s'il existe $v \in F_n$ tq $\|x - v\| = d(x, F_n) = \inf\limits_{w \in F_n} d(x, w)$

Fixons $w_0 \in F_n$.

Je m'interesse uniquement aux w tq $\|x - w\| \leq \|x - w_0\|$

$$\Rightarrow \|w\| \leq \|x\| + \|x - w_0\|$$

$$\Rightarrow w \in B_f(0, R) \quad \text{avec } R = \|x\| + \|x - w_0\|$$

$$\inf_{w \in F_n} d(x, w) = \inf_{w \in \underbrace{F_n \cap B_f(0,R)}_{\text{compact}}} d(x, w)$$

$w \longmapsto d(x, w)$ continue.

Je prends $v \in F_n \cap B_f(0, R)$ où l'inf est atteint.

Je prends $e_n = \dfrac{x - v}{\|x - v\|}$

$$\|x - v\| = d(x, F_n) = \inf_{w \in F_n} \|x - w\| = \inf_{w \in F_n} \|x - v - w\| = d(x - v, F_n)$$

$d\left(\frac{1}{\|x - v\|}(x - v), F_n\right) = 1$ par homogénéité.

Theoreme de Riesz

(i) Dans un espace vectoriel normé E de dimension infinie, la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ n'est jamais compacte.

(ii) Boules fermées compactes $\Leftrightarrow$ E de dimension finie

Démonstration :

① Prenons la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la proposition précédente.

On a $d(e_n, e_p) \geq 1$ pour $n > p$ par construction.

(e_n) n'a pas de ss-suite convergente $\Rightarrow B_f(0,1)$ non compacte

Exemple : $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites bornées, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$

(C'est un espace complet).

• $B_f(0,1)$ = hypercube $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ de côté 2.

$e_n = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } n}}{1}, 0, \dots)$

$\|e_n - e_p\|_\infty = 1$ pour $n \neq p$.

Hypercube non compact !

• "Hyperparallélépipède".

multi-rayons : $r = (r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ $r_n > 0$

$P(r) = \{x = (x_n), |x_n| \leq r_n\}$ fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$

$= \prod_{n\in\mathbb{N}} [-r_n, r_n]$ côtés $2r_n$

$R = \limsup_{n\to+\infty} r_n \in [0, +\infty]$.

→ Si $R = +\infty$, $P(r)$ non borné donc non compact

→ Si $R < +\infty$, $P(r)$ fermé borné dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$

→ Si $R > 0$, R est une valeur d'adhérence

$R = \lim_{k\to+\infty} r_{s_k}$

Pour $k \geq k_0$, $r_{s_k} \geq \frac{R}{9}$

$\frac{R}{2} e_{s_k} \in P(r)$ distance mutuelle $\frac{R}{2}$

$R > 0 \Rightarrow P(r)$ non compact

$\rightarrow \limsup_{n \to +\infty} r_n = 0 = \lim_{n \to +\infty} r_n$ Alors $P(r)$ est compact

$x_k = (x_{k,0}, x_{k,1}, \dots, x_{k,n}, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ dans $P(r)$

$\mathbb{N} \supset S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset \underset{\text{infinie}}{S_n} \supset \dots$