Caractérisation multiple des espaces compacts

Soit (E,d) espace métrique. Il y a équivalence entre :

(i) E compact

(ii) [Bolzano-Weierstrass] $\forall$ suite (x_n) dans E, $\exists$ ss-suite $x_{\varphi_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} a \in E$

(iii) [Borel - Lebesgue] $\forall$ recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$, on peut extraire un recouvrement fini.

(iv) $\forall$ famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$, si $\forall i_1, \dots, i_p$, $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_p} \neq \emptyset$ alors $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

(v) Pour toute suite de fermés non vides, $F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

(Les propriétés (iii), (iv) et (v) sont purement topologiques).

Demonstration: • $(i) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (ii) \underset{\text{B-L}}{\Rightarrow} (iii) \underset{\text{passage au } \complement}{\Leftrightarrow} (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (ii)$

• $\underline{(iii) \Leftrightarrow (iv)}$: $(F_i)_{i\in I} \longmapsto \mathcal{U}_i = \complement_E F_i$

$(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ recouvre $E \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \complement_E \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = E$

$\Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$

B-L : $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_p \quad F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_p} = \emptyset$

Contraposée : $\forall i_1, \dots, i_p$, $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_p} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i\in I} \neq \emptyset$

• $\underline{(iv) \Rightarrow (v)}$: $i_1 \leq \dots \leq i_p \qquad F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_p} = F_{i_p} \neq \emptyset \quad \underset{(iv)}{\Rightarrow} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

• $\underline{(v) \Rightarrow (ii)}$: $VA((x_n)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \qquad F_k = \overline{\{x_n,\ n \geq k\}}$

$(v) \Rightarrow VA((x_n)) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$ d'où (ii).

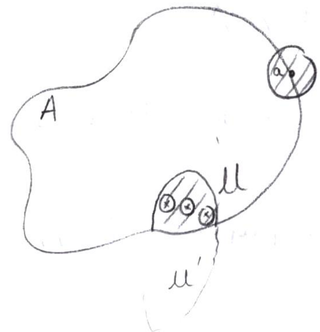
Version relative de Borel - Lebesgue

(E, d) espace métrique. A partie de E.

Alors A compact $\Leftrightarrow$ $\forall (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ ouverts de E avec $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, on peut extraire un recouvrement fini de A. $A \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_p}$.

Observation: (E, d) espace métrique. $(A, d_{|A})$ où $A \subset E$.

$B^{(A)}(a, r) = B^{(E)}(a, r) \cap A$.



$\underbrace{\mathcal{U}}_{\text{ouvert de } A} = \underbrace{\mathcal{U}'}_{\text{ouvert de } E} \cap A$ $\qquad$ $\underbrace{F}_{\text{fermé de } A} = \underbrace{F'}_{\text{fermé de } E} \cap A$

$F = A \setminus \mathcal{U} = \underbrace{(E \setminus \mathcal{U}')}_{\text{fermé de } E} \cap A$

Exemple: $E = \mathbb{R}$ $\qquad$ $A =]0, 1]$ $\qquad$ $F_n =]0, \frac{1}{n}]$ est un fermé de A

$([0, \frac{1}{n}] \cap A)$ $\qquad$ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset \Rightarrow]0, 1]$ pas compact

Attention: • Un ouvert de A n'est pas nécessairement un ouvert de E (mais c'est le cas si A est ouvert).

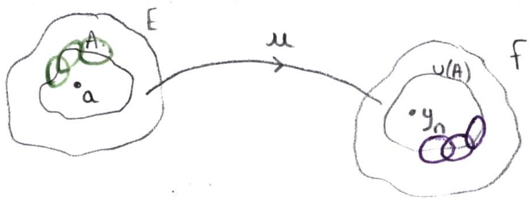
• Un fermé de A n'est pas nécessairement un fermé de E (mais c'est le cas si A est un fermé).

$A \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{\mathcal{U}_i}_{\text{ouvert de } E} \Leftrightarrow A = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(\mathcal{U}_i \cap A)}_{\text{ouvert de } A}$

III/ Relations entre compacité et continuité

Théorème fondamental : Soit $u : E \to F$ une application continue entre espaces métriques. Alors $\forall A$ partie compact de E, $u(A)$ est une partie compacte de F.

Démonstration : 1ère méthode : Par Bolzano-Weierstrass.



Soit (y_n) suite de pts de $u(A)$.

$\exists\, x_n \in A$ tq $u(x_n) = y_n$.

$\exists$ ss-suite $x_{s_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} a \in A$.

$$y_{s_k} = u(x_{s_k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} u(a) \in A \quad \text{par continuité de } u$$

$u(A)$ vérifie B-W $\Rightarrow u(A)$ compact.

2ème méthode : Par Borel-Lebesgue.

Prenons $(V_i)_{i \in I}$ ouverts de F tq $u(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$.

Posons $U_i = u^{-1}(V_i)$ ouvert de E.

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \underset{A \text{ compact}}{\Rightarrow} \exists\, i_1, \dots, i_p \text{ tq } A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_p}$$

$$\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_p \text{ tq } u(A) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_p}$$

Corollaire : $u : E \to \mathbb{R}$ tq

(i) Pour A partie compacte de E, alors $u(A)$ est une partie compacte donc fermée bornée de $\mathbb{R}$.

(ii) En particulier, u est bornée et

- $\sup u(A) = \max u(A)$ i.e. $\exists\, x_0 \in A$ tq $\sup_{x \in A} u \underset{\text{def}}{=} \sup u(A) = u(x_0)$

• $\inf u(A) = \min u(A)$ i.e. $\exists x_1 \in A$ tq $\inf\limits_{x \in A} u \underset{def}{=} \inf u(A) = u(x_1)$

Théorème des homéomorphismes sur les espaces compacts :

Soit $u : E \to F$ continue et bijective.

Si E est compact, alors u^{-1} est continue et donc u est un homéomorphisme.

Démonstration : $v = u^{-1} : F \to E$

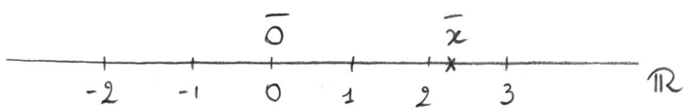
v continue $\Leftrightarrow \forall A$ fermé de E, $v^{-1}(A)$ fermé dans F

$\Leftrightarrow \forall A$ fermé de E, $u(A)$ fermé de F

A fermé dans $E \Rightarrow A$ compact $\Rightarrow u(A)$ compact $\Rightarrow u(A)$ fermé de F

Exemple : • $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ quotient de $(\mathbb{R}, +)$ par $(\mathbb{Z}, +)$

$\bar{x} = x + \mathbb{Z}$



$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{0}) = d(x, \mathbb{Z})$$

$$= \min(\mathrm{Fr}(x), 1 - \mathrm{Fr}(x))$$

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x - y, \mathbb{Z}) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y - k|$$

$$= \min(\mathrm{Fr}(x-y), 1 - \mathrm{Fr}(x-y))$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d})$ espace métrique (exercice)

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{u} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

1-lipschitzienne donc continue

$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq |x - y|$

$u([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Thm fondamental $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{d})$ compact

$\tilde{u} : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ continue et bijective

<u>Conclusion</u> : $\tilde{u}$ n'est pas un homéomorphisme (sinon $[0,1[$ serait compact).

- $\mathbb{R} \xrightarrow{v} \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

  $x \longmapsto v(x) = e^{2i\pi x}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{v}} \mathcal{C}$

$\bar{x} \longmapsto \bar{v}(\bar{x}) = e^{2i\pi x}$

$$\left| e^{2i\pi x} - e^{2i\pi y} \right| = \left| \int_x^y 2i\pi e^{2i\pi t} \, dt \right| \leqslant 2\pi |x - y|$$

Je remplace y par $y + k$, $k \in \mathbb{Z}$ et on prend le min.

$$\left| e^{2i\pi x} - e^{2i\pi y} \right| \leqslant 2\pi \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y - k| = 2\pi \, \bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$$

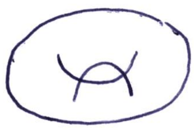
$\bar{v}$ est 2π-lipschitzienne donc continue.

<u>Conclusion</u> : $\bar{v}$ est un homéomorphisme.

<u>Remarque</u> : $\tilde{u}^{-1}$ discontinue au point $\bar{0}$.

<u>Généralisation</u> : • $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \xrightarrow{\text{homéo}} \mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n$ tore de dimension n

$(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n) \longmapsto (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$

• $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\text{homéo}}$  $\subset \mathbb{R}^2$ cts et bijective donc homéomorphisme.

$$(\theta, \varphi) \longmapsto \begin{cases} x = \cos(2\pi\theta)\,(R + r\cos(2\pi\varphi)) \\ y = \sin(2\pi\theta)\,(R + r\cos(2\pi\varphi)) \\ z = r\sin(2\pi\varphi) \end{cases} \qquad R > r > 0$$