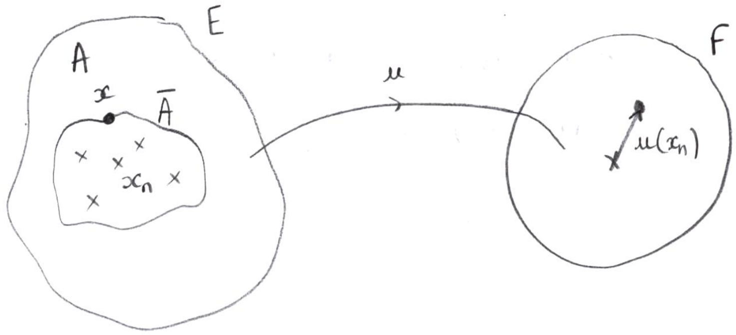
Théorème de prolongement des applications uniformément continue

(E, d) espace métrique. $A \subset E$

(F, d') espace métrique complet.

Si $u : A \to F$ est uniformement continue, $\exists! \ \tilde{u} : \bar{A} \to F$ prolongement continu

(cad $\tilde{u}|_A = u$) et de plus, $\tilde{u}$ est uniformement continue sur $\bar{A}$.



Démonstration :

Soit $x \in \bar{A}$. $\exists$ suite (x_n) dans A tq $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$

u uniformement continue.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(u(x), u(y)) < \varepsilon$

$(u(x_n))$ est une suite de Cauchy.

$\delta > 0, \exists N, p, q \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \delta$

$\Rightarrow d'(u(x_p), u(x_q)) < \varepsilon$

On pose $\tilde{u}(x) = \lim_{n \to +\infty} u(x_n)$

Si on prend une autre suite d'approximations: $\lim_{n \to +\infty} x_n' = x$. On a

$d(x_n, x_n') \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \underset{\text{car } u \text{ unif. continue}}{\Longrightarrow} d(u(x_n), u(x_n')) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a donc bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n')$.

$\tilde{u}$ est bien définie."

- Unicité de $\tilde{u}$

$\tilde{u}$ continue $\Rightarrow \tilde{u}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{u}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n)$ (car $\tilde{u}|_A = u$)

- $\tilde{u}$ uniformément continue. u l'est : $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x,y \in A, d(x,y)<\delta \Rightarrow d(u(x),u(y))<\varepsilon$. Je prends $x,y \in \bar{A}$ avec $d(x,y)<\delta$.

$x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $x_n \in A$

$y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, $y_n \in A$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y) < \delta$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $d(x_n,y_n)<\delta$ pour $n \geq n_0$. Ceci implique $d(u(x_n),u(y_n))<\varepsilon$ pour $n \geq n_0$ à la limite $d(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) \leq \varepsilon$. CQFD.

<u>Attention</u>: Totalement faux si u seulement continue.

$$u : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \tan(x)$$

continue sur $A = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mais ne peut se prolonger à $\bar{A}$ ($\underset{\text{thm}}{\Rightarrow}$ u n'est pas uniformément continue).

<u>Cas particulier important</u> :

$(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ espaces normés.

On suppose
- F complet
- $A \subset E$ s.e.v.

Si $u : A \to F$ linéaire continue, $\exists!\ \tilde{u} : \bar{A} \to F$ prolongement continu et linéaire.

De plus, $|||\tilde{u}|||$ (dans $\mathcal{L}_c(\bar{A}, F)$) coincide avec $|||u|||$ (dans $\mathcal{L}_c(A,F)$)

Ceci s'applique notamment lorsque $F = \mathbb{K}$ ou $F = \mathbb{K}^n$.

Chapitre 5 : Notion de compacité et applications

I/ Définitions et principales propriétés

Soit (E, d) un espace métrique.

Définition : On dit que E est un espace compact si toute suite (x_n) dans E admet une valeur d'adhérence dans E $\Leftrightarrow$ $\forall$ suite (x_n) de E, $\exists a \in E$, $\exists$ ss-suite (x_{s_k}) qui converge vers a.

Complément : Une partie A de E est dite compacte si toute suite (x_n) dans A admet une valeur d'adhérence dans A.

Propriété des parties compactes :

(i) Toute partie compacte est bornée (tout espace compact est borné)

Supposons A non bornée. Prenons $x_0 \in A$ quelconque. $\exists x_1 \in A$ tq $d(x_0, x_1) \geq 1$. Par récurrence sur n, $\exists x_n \in A$ tq $d(x_0, x_n) \geq \left(\max\limits_{i \leq n-1} d(x_0, x_i)\right) + 1 \Rightarrow$ $\forall p, q$, $p \neq q$ $d(x_p, x_q) \geq 1$. Il est donc impossible d'extraire une ss-suite CV.

Donc A non bornée $\Rightarrow$ A non compacte

Donc A compacte $\Rightarrow$ A bornée

(ii) A compacte $\Rightarrow$ A complète.

$$\begin{cases} (x_n) \text{ de Cauchy dans } A \\ A \text{ compact} \Rightarrow \exists \text{ v.a } \lim\limits_{k \to +\infty} x_{s_k} = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n = a$$

Donc la partie A est complète.

(ii') A compacte $\Rightarrow$ A complète $\Rightarrow$ A fermée

$$\left.\begin{array}{l}\text{(iii) } E \text{ espace compact} \\ \quad A \subset E \text{ partie fermée}\end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ compacte}$$

Corollaire : Dans un espace compact E, les parties compactes sont les parties fermées.

Démonstration : (iii) Soit (x_n) une suite dans A. C'est aussi une suite dans E.

E compact $\Rightarrow \exists$ ss-suite $x_{S_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} x \in E$.

$$\left.\begin{array}{l} x_{S_k} \in A \\ A \text{ fermée}\end{array}\right\} \Rightarrow x \in A$$

Propriété (suite)

(iv) $E_1, \dots, E_p$ compacts $\Rightarrow E = E_1 \times \dots \times E_p$ compact

(x_n) suite de $E = E_1 \times \dots \times E_p$. $\quad x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p})$

$\exists \underset{\text{infinie}}{S_1 \subset \mathbb{N}} \quad (x_{n,1})_{n \in S_1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_1$

$\exists \, S_2 \underset{\text{infinie}}{\subset} S_1 \quad (x_{n,2})_{n \in S_2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_2$

$\vdots$

$\exists \, S_p \underset{\text{infinie}}{\subset} S_{p-1} \quad (x_{n,p})_{n \in S_p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_p$

$$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \xrightarrow[\substack{n \in S_p \\ n \to +\infty}]{} a = (a_1, \dots, a_p)$$

Corollaire : Dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathbb{C}^n$ (avec la distance $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$), les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Démonstration :
- En général, A compacte $\Rightarrow A$ fermée et bornée
- $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ intervalle fermé borné

I compact : (x_n) suite dans I

$$\alpha = \limsup_{n\to+\infty} x_n \in [a,b] \text{ est une v.a.}$$

$[0,+\infty[$ pas compact : $x_n = n$ n'a pas de v.a. dans $[0,+\infty[$.

- Un pavé dans $\mathbb{R}^n$, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ est donc compact (produit de compacts).

- A fermée bornée dans $\mathbb{R}^n$, $m = \sup_{x\in A} \|x\| \Rightarrow A \subset \underbrace{[-m,+m]^n}_{\text{compact}}$

A fermée $\subset$ compact $\Rightarrow$ A compacte.

- $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. $|z| \sim \max(|x|,|y|)$

II/ Caractérisations topologiques de la compacité

Théorème (Borel-Lebesgue) : Soit (E,d) espace métrique compact. Alors pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de E, on peut extraire un recouvrement fini $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$

Lemme 1 : Soit (E,d) compact et $(U_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert. Alors $\exists\, \delta > 0$ appelé " constante de Lebesgue du recouvrement " telle que toute boule $B(x,\delta)$ de E est contenue dans l'un des U_i.

Démonstration : Par contradiction. Supposons $U_i \neq \emptyset$ (les ouverts vides n'interviennent pas).

$\forall \delta > 0, \exists x \in E$, tq $\forall i$, $B(x,\delta) \not\subset U_i$.

$\delta = 2^{-n}$, $\exists x_n \in E$ tq $\forall i$, $B(x_n, 2^{-n}) \not\subset U_i$.

E compact $\Rightarrow \exists$ v.a $\lim_{k\to+\infty} x_{\varphi_k} = a$

On $\exists i$ tq $a \in$ l'un des U_i

U_i ouvert donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $B(a, 2^{-p}) \subset U_i$

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{\varphi_k} = a$ $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $d(x_{\varphi_k}, a) < 2^{-p-1}$

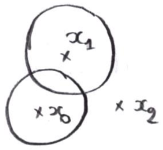
On a $B(x_{\varphi_k}, 2^{-p-1}) \subset B(a, 2^{-p}) \subset U_i$

Contradiction pour $\varphi_k \geqslant p+1$ $\Rightarrow$ Lemme 1

Lemme 2: (E, d) espace compact. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \in E$ en nb fini tq

$E = \bigcup\limits_{1 \leq k \leq p} B(x_{i_k}, \varepsilon)$.

Démonstration: Si c'est faux, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tq on ne peut recouvrir un nb fini de boules. $x_0 \in E$. $B(x_0, \varepsilon_0)$ ne recouvre pas. $\exists x_1 \in E$, $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon_0)$



$B(x_0, \varepsilon_0) \cup B(x_1, \varepsilon_0)$ ne recouvre pas.

Par récurrence, $B(x_0, \varepsilon_0) \cup B(x_1, \varepsilon_0) \cup \dots \cup B(x_{n-1}, \varepsilon_0)$ ne recouvre pas. $\exists x_n \in \complement (B(x_0, \varepsilon_0) \cup \dots \cup B(x_{n-1}, \varepsilon_0))$. On a $d(x_p, x_q) \geqslant \varepsilon_0$ $\forall p \neq q$.

Contradiction $\Rightarrow$ Lemme 2.

Démonstration du thm Lemme 1 + Lemme 2 $\Rightarrow$ Thm

(E, d) compact

$\exists \delta > 0$ toute boule $B(x, \delta) \subset$ l'un des U_i (lemme 1)

lemme 2: avec $\varepsilon = \delta$. E recouvert par $\underset{\substack{\cap \\ U_{i_1}}}{B(x_1, \delta)}, \dots, \underset{\substack{\cap \\ U_{i_p}}}{B(x_p, \delta)}$ donc E

recouvert par $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$ CQFD.