2) Notion d'homéomorphisme

Définition : • Etant donné (E, d) et (F, d'), on dit que $u : E \to F$ est un <u>homéomorphisme</u> si u est bijective et "bicontinue". (cad u cts et u^{-1} continue)

• On dit que E et F sont <u>homéomorphes</u> s'il existe un homeomorphisme $u : E \to F$.

<u>Exemples</u>: • $[a,b]$ et $[a',b']$ de longueur >0 sont homéomorphes (suffit u affine)

• $[a,b[$ et $]a',b']$ homéomorphes par une application affine décroissante.

• $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

$]0,1[\xrightarrow[\text{affine}]{}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\xrightarrow[\tan]{} \mathbb{R}$ (composée d' homéomorphismes est un homéomorphisme)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ [a,b] \text{ et }]a',b'[\\ \ \ [a,b] \text{ et } [a',b'[\end{array}\right\} \text{pas homéomorphes}$$

$u : I \to J$ bijective cts entre intervalles de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ u strictement monotone.

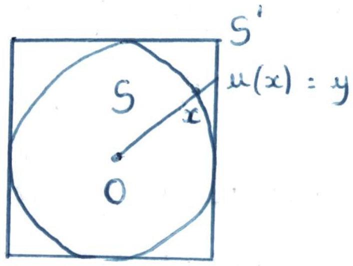
• E ev normé. $\|.\|$, $\|.\|'$ equivalentes. Sphères unités associés:

$S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$

$S' = \{x \in E,\ \|x\|' = 1\}$

Par exemple, $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\|x\|' = \max(|x_1|, |x_2|)$



En général, $S \xrightarrow{u} S'$

$x \longmapsto u(x) = \dfrac{x}{\|x\|'}$

$S' \xrightarrow{u^{-1}} S$

$y \longmapsto x = u^{-1}(y) = \dfrac{y}{\|y\|}$

A montrer : u cts

$$(S, \|.\|) \longrightarrow (S', \|.\|')$$

$\|x\|' \leq C \|x\|$

$\|x-y\|' \leq C \|x-y\|$

$$u(x+h) - u(x) = \frac{x+h}{\|x+h\|'} - \frac{x}{\|x\|'}$$

$$= \frac{x+h}{\|x+h\|'} - \frac{x}{\|x+h\|'} + \frac{x}{\|x+h\|'} - \frac{x}{\|x\|'}$$

$$= \frac{h}{\|x+h\|'} + x \left(\frac{\|x\|' - \|x+h\|'}{\|x\|' \, \|x+h\|'} \right)$$

$\|u(x+h) - u(x)\| \leq \ldots$ exercice

Remarque culturelle

3) Distance d'un pts à une partie, diamètre

(E, d) espace métrique.

A partie de E.

Diametre : $\operatorname{diam}(A) = \sup \{ d(x,y),\ x, y \in A \} \in [0, +\infty[$

Définition : On dit que A est bornée si $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

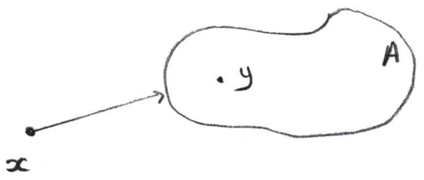
• $\delta = \text{diam}(A) < +\infty$

$x_0 \in A$, $\forall x \in A \quad d(x_0, x) \leq \delta \Rightarrow A \subset B_f(x_0, \delta)$

• Inversement, si $A \subset B_f(x_0, R)$ alors $\text{diam}(A) \leq 2R$

Propriété : A bornée $\Leftrightarrow \exists$ boule $B_f(x_0, R)$ contenant A.

Distance d'un point à une partie



$A \neq \emptyset$

Définition : $d(x, A) = \inf \{ d(x,y),\ y \in A \} \in \mathbb{R}_+$

Propriété : $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto d(x, A) \end{array}$ est une application 1 lipschitzienne donc cts.

Démonstration : $x_1, x_2 \in E \quad y \in A$.

$d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y)$

On prend l'inf : $d(x_1, A) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, A)$

$\Rightarrow \quad d(x_1, A) - d(x_2, A) \leq d(x_1, x_2)$

$\Rightarrow \quad |d(x_1, A) - d(x_2, A)| \leq d(x_1, x_2)$ en échangeant x_1, x_2

Propriété : (i) $d(x, A) = d(x, \bar{A})$

(ii) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$

Démonstration : (i) $A \subset B \Rightarrow d(x, B) \leq d(x, A)$

$d(x, \bar{A}) \leq d(x, A)$

$d(x, \bar{A}) = \inf \{ d(x,y),\ y \in \bar{A} \}$

$\forall y \in \bar{A}$, $\forall \varepsilon > 0$, $B(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

$\exists z \in A$ tq $d(y, z) < \varepsilon$

$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \leqslant d(x,y) + \varepsilon$ avec $z \in A$ et $y \in \bar{A}$

Si $\delta = d(x, \bar{A})$, $\exists\, y \in \bar{A}$ tq $d(x,y) \leqslant \delta + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, z \in \bar{A}$ tq $d(x,z) \leqslant \delta + 2\varepsilon$

$\Rightarrow d(x,A) \leqslant \delta + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow d(x,A) \leqslant \delta = d(x, \bar{A})$

(ii) $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, y \in A$ tq $d(x,y) < \varepsilon \Leftrightarrow x \in \bar{A}$

Conséquence : Si A est une partie fermée et $x \in \complement_E A$ alors $d(x,A) > 0$

Propriété de séparation des fermés dans un espace métrique

Soient A, B parties fermées de (E,d) avec $A \cap B = \emptyset$. Alors $\exists$ fct cts $u : E \to [0,1]$ avec $u(x) = 0$ sur A et $u(x) = 1$ sur B.

Démonstration : Posons $u(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$.

Le dénominateur s'annule ssi $d(x,A) = d(x,B) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bar{A} = A \\ x \in \bar{B} = B \end{cases}$

Impossible !

Attention : $d(A,B) = \inf\{d(x,y),\ x \in A,\ y \in B\}$ peut très bien être 0 pour A, B fermés disjoints.

$A_\varepsilon = \{x \in E,\ u(x) \leqslant \varepsilon\}$

$B_\varepsilon = \{x \in E,\ u(x) \geqslant 1 - \varepsilon\}$ avec $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$A_\varepsilon = u^{-1}([0,\varepsilon])$ fermé $\supset A$

$B_\varepsilon = u^{-1}([1-\varepsilon, 1])$ fermé $\supset B$

$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$

En faite, $A \subset A_\varepsilon$

$$A = u^{-1}(\{0\}) \subset \underbrace{u^{-1}(]1-\varepsilon, 1[)}_{\text{ouvert}} = u^{-1}([0, \varepsilon[\subset A_\varepsilon$$

Donc $\subset \mathring{A}_\varepsilon$.

De même pour $B \subset \mathring{B}_\varepsilon$.

Existence de partitions de l'unité

Definition: Une famille d'ouverts (finie ou infinie) $(U_i)_{i \in I}$ est appelé recouvrement ouvert de E si $\bigcup_{i \in I} U_i = E$

Partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i \in I}$ recouvrement fini :

$\varphi_i : E \to [0,1]$ cts

$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in I$

$\mathrm{Supp}(\varphi_i) = \overline{\{x \in E, \varphi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$

Theoreme: Il existe toujours des partitions de l'unité.

Démonstration: (pour des recouvrements finis)

- deux ouverts $\quad E = U_1 \cup U_2$

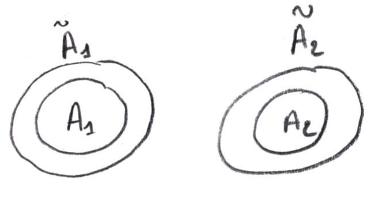
$A_1 = \complement_E U_1$

$A_1 \cap A_2 = \complement_E (U_1 \cup U_2) = \emptyset$

$A_2 = \complement_E U_2$

$\exists$ fermées $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ disjoints avec $A_1 \subset \mathrm{Int}_E(\tilde{A}_1)$

$A_2 \subset \mathrm{Int}_E(\tilde{A}_2)$



$\exists\, u : E \to [0,1]$ cts

$u(x) = 0$ sur $\tilde{A}_1$

$u(x) = 1$ sur $\tilde{A}_2$

$\varphi_1(x) = u(x)$

$\varphi_2(x) = 1 - u(x)$

Evidemment $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$

$u(x) > 0 \Rightarrow x \in \complement \tilde{A}_1 \Rightarrow x \in \complement \mathring{\tilde{A}}_1$ fermé $\subset \complement A_1 = \mathcal{U}_1$

$\text{Supp}(\varphi_1) = \text{Supp}(u) = \overline{\{u(x) > 0\}} \subset \mathcal{U}_1$

De même $\text{Supp}(\varphi_2) \subset \mathcal{U}_2$

- Récurrence pour $n \geq 3$ ouverts (on suppose $n-1$ démontré)

$E = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2'$, $\quad \mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$

$\exists\, \varphi_1, \varphi_2'$, $\varphi_1 + \varphi_2' = 1$ sur E, $\text{Supp}(\varphi_1) \subset \mathcal{U}_1$, $S_2' = \text{Supp}(\varphi_2') \subset \mathcal{U}_2'$

$E' = \mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$

$\exists\, \psi_2, \dots, \psi_n$, $\psi_2 + \dots + \psi_n = 1$ sur $\mathcal{U}_2'$, $\text{Supp}(\psi_i) \subset \mathcal{U}_i$, $i \geq 2$

avec ψ_i continue sur $\mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$, $i \geq 2$.

On pose $\varphi_i = \begin{cases} \varphi_2' \psi_i & \text{sur } \mathcal{U}_2' \quad \text{(ouvert de } E) \\ 0 & \text{sur } \mathcal{U}_1 \setminus S_2' \quad \text{(ouvert de } E, \text{ car } S_2' \text{ fermé)} \end{cases}$
(si $i \geq 2$)

On a bien φ_i continue sur $E = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2' = (\mathcal{U}_1 \setminus S_2') \cup \mathcal{U}_2'$

$$1 = \varphi_1 + \varphi_2' = \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2'(\psi_2 + \dots + \psi_n) = \varphi_1 + \dots + \varphi_n & \text{sur } \mathcal{U}_2' \\ \varphi_1 = \varphi_1 + \dots + \varphi_n & \text{sur } \mathcal{U}_1 \setminus S_2' \end{cases}$$

3) Prolongement d'application uniformément continue

Théorème : Soit (E, d) et (F, d') espaces métrique et A une partie de E.

On suppose que
- (F, d') est complet
- $u : A \to F$ est uniformement continue.

Alors $\exists!\, \tilde{u} : \overline{A} \to F$ prolongement continu de u cad $\tilde{u}_{|A} = u$

Démonstration : $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \qquad x_n \in A$

u uniformement continue.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(u(x), u(y)) < \varepsilon$

$(u(x_n))$ est une suite de Cauchy.

$$\delta > 0, \exists N, p, q \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \delta$$
$$\Rightarrow d'(u(x_p), u(x_q)) < \varepsilon$$

On pose $\tilde{u}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u(x_n)$