Caractérisation des fermés (critère pratique)

Pour montrer que A est fermé, il convient de vérifier que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers $\ell \in E$, alors $\ell \in A$.

Démonstration : Dire ceci signifie $\overline{A} \subset A \iff \overline{A} = A$.

Ensembles fermés et espaces complets

Théorème : Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

(i) Si le sous-espace $(A, d_{|A})$ est complet, alors A est une partie fermée de E.

(ii) Si (E, d) est complet et si A est fermé dans E alors $(A, d_{|A})$ est lui aussi complet.

Corollaire : Si (E, d) est complet, les sous-espaces complets sont les parties fermées.

(i) A complet $\Rightarrow$ A fermé

(ii) A fermé $\Rightarrow$ A complet

Démonstration : (i) Prenons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n \in E$ avec $u_n \in A$. (u_n) suite de Cauchy dans $A \underset{\text{hyp: A complet}}{\Rightarrow} \exists$ limite $a = \lim_{n \to +\infty} u_n \in A$. Unicité de la limite $\Rightarrow$ $\ell = a \in A$. Donc A fermé.

(ii) Prenons (u_n) suite de Cauchy dans $A \subset E$. E complet $\Rightarrow$ $\exists\, \ell = \lim_{n \to +\infty} u_n \in E$. A fermé $\Rightarrow \ell \in A$. (u_n) converge donc dans A. Donc $(A, d_{|A})$ complet.

Relation entre adhérence et valeurs d'adhérence.

$$VA((u_n)) = \{x \in E,\ x \text{ valeur d'adhérence de } (u_n)\}$$
$$= \{x \in E,\ \exists \text{ ss-suite } (u_{s_k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} x\}$$

$$\underline{VA((u_n))} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n,\ n \geq N\}}$$

En particulier, $VA((u_n))$ est un fermé de E.

Demonstration : Posons $F = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n,\ n \geq N\}}$

- $VA((u_n)) \subset F$? $VA((u_n)) \subset \overline{\{u_n,\ n \geq N\}}$? $\forall$ indice N.

$x \in VA((u_n))$ $\quad x = \lim_{k \to +\infty} u_{s_k}$ $\quad G_N = \{u_n,\ n \geq N\}$

x est une limite d'elts u_{s_k} avec $s_k \geq N$, pour k assez grand $\Rightarrow x$

$\in \overline{G_N}$ d'où $VA((u_n)) \subset \overline{G_N}$.

• $F \subset VA((u_n))$?

Prenons $x \in F$. Ceci veut dire $\forall N \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{\{u_n, n \geq N\}}$ $\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap \{u_n, n \geq N\} \neq \emptyset$. $\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et $d(x, u_n) < \varepsilon$.

Ceci implique (et même équivalent) à x est une valeur d'adhérence de (u_n).

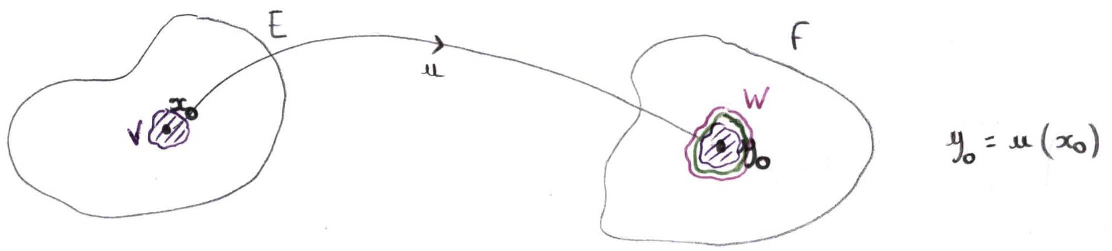
II/ Fonctions continues et homéomorphismes

1) Fonction continue en un point

(E, d) et (F, d') des espaces métriques.

Traduction topologique de la continuité d'une application $u : E \to F$ en un point $x_0 \in E$.

Notion topologique : notion qui s'exprime uniquement en termes d'ouverts (ou de fermés ou de voisinages).



Propriété : u est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall W$ voisinage de $y_0 = u(x_0)$, $\exists V$ voisinage de x_0 tel que $u(V) \subset W$.

Démonstration : ($\Rightarrow$) W voisinage de y_0. $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(y_0, \varepsilon) \subset W$

$O = B(y_0, \varepsilon)$

$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in E$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(u(x), u(x_0)) < \varepsilon$

ie $\quad x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow u(x) \in B(y_0, \varepsilon)$

ie $u(B(x_0,\delta)) \subset B(y_0,\varepsilon) \subset W$

$V = B(x_0,\delta)$ solution du problème.

($\Leftarrow$) Prenons $\varepsilon > 0$ et $W = B(y_0,\varepsilon)$ voisinage de y_0. L'hypothèse donne V voisinage de x_0 tq $u(V) \subset W$. On a une boule $B(x_0,\delta) \subset V$ avec $\delta > 0$

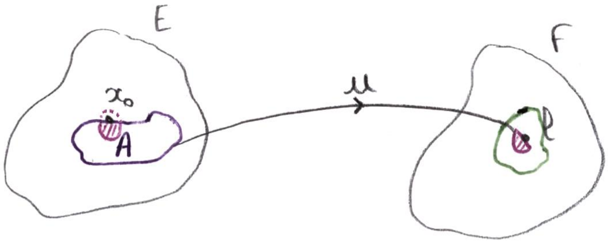
Notion de limite généralisée

(E,d) $\quad$ (F,d')

A partie de E

$u : A \to F$

$x_0 \in \bar{A}$



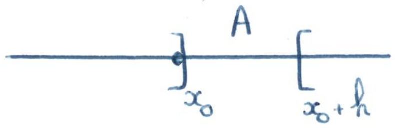
Définition : $\lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to x_0}} u(x) = \ell$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < d(x_0,x) < \delta \Rightarrow d(u(x),\ell) < \varepsilon$
($x = x_0$ exclu)

Caractérisation en termes de voisinages.

$\lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to x_0}} u(x) = \ell \iff \forall W$ voisinage de $\ell \in F$, $\exists V$ voisinage de x_0 dans E

tel que $u(A \cap (V \setminus \{x_0\})) \subset W$

$E = \mathbb{R}$



notion de limite à droite

$u : E \to F$ continue en $x_0 \iff \lim\limits_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} u(x) = u(x_0)$

(Si on ne précise pas la partie de A, on sous-entend qu'on prend $A = E$)

Propriété : Supposons $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (réunion finie)

$\lim\limits_{\substack{x \in A \\ x \to x_0}} u(x) = \ell \iff \forall i \lim\limits_{\substack{x \in A_i \\ x \to x_0}} u(x) = \ell$. En supposant que $x_0 \in \bar{A_1} \cap \dots \cap \bar{A_n}$

Demonstration : Pour A_i, on trouve un voisinage V_i. On prend $V = \cap V_i$. (A finie)

Remarque : Une $\cap$ finie de voisinages est un voisinage.

Attention : Faux pour une infinité de morceaux A_i.

Exemple : $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$A_d = \{ y = dx \ , \ d \in \mathbb{R} \}$

$A_\infty = \{ x = 0 \}$

Sur A_d : $y = dx$ $\qquad u(x,y) = u(x, dx) = \dfrac{d^2 x^3}{x^2 + d^6 x^6} = d^2 x \dfrac{1}{1 + d^6 x^4}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \in A_d \\ (x,y) \to (0,0)}} u(x,y) = \lim_{x \to 0} d^2 x \frac{1}{1 + d^6 x^4} = 0$$

$u_{|A_\infty}$ est nulle.

$$\lim_{\substack{(x,y) \in A_\infty \\ (x,y) \to (0,0)}} u(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} x = t^a \\ y = t^b \end{cases}$$

$$u(t^a, t^b) = \frac{t^{a+2b}}{t^{2a} + t^{6b}} \sim \frac{t^{a+2b}}{t^{\min(2a, 6b)}} \underset{t \to 0}{\sim} t^{a+2b-\min(2a,6b)}$$

Prenons $a = 3$ et $b = 1$, $u(t^3, t) = \dfrac{t^5}{2t^6} \sim \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty$

Continuité globale

Théorème : Soit $u : E \to F$ une application entre espaces métriques. Il y a équivalence entre :

(i) u est continue sur E tout entier

(ii) $\forall$ ouvert $\Omega \in F$, $u^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E

(iii) $\forall S$ fermé $\subset F$, $u^{-1}(S)$ est un fermé de E.

Démonstration : (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\qquad u^{-1}\left(\complement_E S\right) = \complement_E u^{-1}(S)$

$$u^{-1}\left(\complement_F S\right) = \{x \in E, \ u(x) \notin S\}$$
$$= \complement_E \{x \in E, \ u(x) \in S\}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit Ω un ouvert de F. Prenons $x_0 \in u^{-1}(\Omega)$. Alors $y_0 = u(x_0) \in \Omega$

Ω voisinage de y_0.

$\exists V$ voisinage de x_0 tel que $u(V) \subset \Omega$ (continuité en x_0).

Donc $V \subset u^{-1}(\Omega) \Rightarrow u^{-1}(\Omega)$ voisinage de x_0.

Donc $u^{-1}(\Omega)$ ouvert.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fixons $x_0 \in E$. $y_0 = u(x_0)$. $\Omega = B(y_0, \varepsilon)$ ouvert.

$u^{-1}(\Omega)$ ouvert qui contient x_0.

$u^{-1}(\Omega)$ contient donc une certaine boule $B(x_0, \delta)$.

$B(x_0, \delta) \subset u^{-1}(\Omega) \Rightarrow u(B(x_0, \delta)) \subset \Omega = B(y_0, \varepsilon)$.