Ensembles fermés

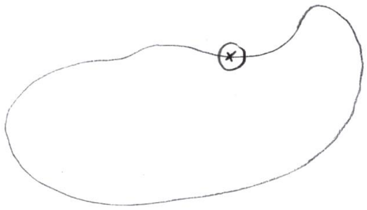
(E, d) espace métrique

Définition : Une partie A de E est dite fermée dans E si $U = \complement_E A$ est un ouvert.

$\forall x \in \complement_E A\ ,\ \exists r > 0$ tq $B(x,r) \cap A = \emptyset$

Remarque : Dans la définition des ouverts et des fermés, on pourrait utiliser des boules fermées comme voisinages.

U ouvert $\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0$ tq $B_f(x,r) \subset U$



Intuitivement, une partie fermée est une partie dans laquelle on prend tous les points frontières.

$$\complement_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \complement_E A_i \quad (*) \qquad \complement_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \complement_E A_i$$

Théorème : (i) $(A_i)_{i \in I}$ famille quelconque de fermés de E alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ fermée

(ii) $A_1, \dots, A_n$ fermés $\Rightarrow \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}_{\text{réunion finie}}$ fermé

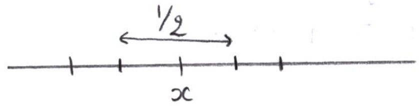
Démonstration : (i) $\bigcap_{i \in I} A_i$ fermé $\Leftrightarrow \complement_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \big(\underbrace{\complement_E A_i}_{\text{ouvert}} \big)$ cette réunion est un ouvert donc $\bigcap_{i \in I} A_i$ fermé.

(ii) Preuve analogue d'après $(*)$ mais on doit supposer I fini.

Observation : $\emptyset$ et E sont des ouverts mais ce sont aussi des fermés

Exemple : $E = \mathbb{N}$ $\qquad d(x,y) = |x - y|$ $\qquad A \subset E$ partie quelconque.

A est ouvert dans $\mathbb{N}$



$B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$

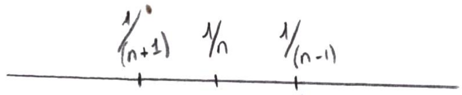
$\forall x \in A,\ B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset A$

$\complement_{\mathbb{N}} A$ ouvert aussi donc A fermé.

<u>Définition</u> : Un espace métrique (E, d) est dit <u>discret</u> si toute partie A de E est ouverte ($\Leftrightarrow$ toute partie est fermée).

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont des espaces discrets.

- $E = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$



$B(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}) = \{ \frac{1}{n} \}$

(E, d) discret.

- $E = \{0\} \cup \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$ n'est pas discret. En effet $\{0\}$ n'est pas une partie ouverte car $\underset{r>0}{B(0, r)}$ contient des elts $1/n$.

- $E = \{ a^n, a \in \mathbb{C}, 0 < |a| < 1 \}$ discret.

<u>Interieur d'une partie</u>

<u>Définition</u> : Etant donné une partie A de E, on appelle <u>interieur</u> de A dans E, noté $Int_E(A)$ (ou A°) le plus grand ouvert U contenu dans A.

$$Int_E(A) = \bigcup_{V \subset A \text{ ouvert}} V$$

$$A^\circ = (\text{union ouvert } U \subset A) = (\text{union } \underset{\text{ouverte}}{B(x, r)} \subset A)$$

<u>Adherence d'une partie</u>

<u>Définition</u> : Etant donné une partie A de E, on appelle adherence de A dans E, noté $Adh_E(A)$ (ou $\bar{A}$ ou $\bar{A}^E$) le plus petit fermé F qui contient A.

$$Adh_E(A) = \bigcap_{\substack{G \supset A \\ G \text{ fermé}}} G \text{ fermé.}$$

$$\bar{A} = \{ x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \}$$

On a $\underset{\text{ouvert}}{\mathring{A}} \subset A \subset \underset{\text{fermé}}{\bar{A}}$.

Frontière d'une partie

$$Fr_E(A) = Adh_E(A) \setminus Int_E(A) \iff \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

Propriété : ∂A est un fermé.

$$\partial A = \bar{A} \cap \complement_E \mathring{A} \quad \text{fermé}$$

Exemple : $E = \mathbb{C}$ $\quad d(z, w) = |z - w|$

$$A = D(0,1) \cup \{e^{2i\pi\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

$\mathring{A} = D(0,1)$ disque ouvert

$\bar{A} = D_f(0,1)$

$\partial A = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Propriétés : (i) $\complement_E \bar{A} = \mathring{\overbrace{\complement_E A}}$

(ii) $\complement_E \mathring{A} = \overline{\complement_E A}$

(iii) $\partial(\complement_E A) = \partial A$

Démonstration : (i) $\mathring{\overbrace{\complement_E A}} \underset{def}{=}$ réunion des ouverts $U \subset \complement_E A$

$\complement_E\left(\mathring{\overbrace{\complement_E A}}\right)$ = intersection des fermés $F = \complement_E U \supset A$

$= \bar{A}$

(ii) Idem !

(iii) On a $\underset{\text{ouvert}}{\mathring{A}} \subset A \subset \underset{\text{fermé}}{\bar{A}}$

Donc $\underset{\complement_E \bar{A}}{\underset{\|}{\mathring{\overbrace{\complement_E A}}}} \subset \complement_E A \subset \underset{\complement_E \mathring{A}}{\underset{\|}{\overline{\complement_E A}}}$

$\partial A = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$ donc $\partial(C_E A) = \overline{C_E A} \cap \bar{A}$

Caractérisations des ouverts et des fermés

- A ouvert $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$
- A fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$
- $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ a la fois ouvert est fermée

Démonstration : $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow \mathring{A} = A = \bar{A}$

Conséquence : Dans un espace discret, $\forall$ partie A, $\partial A = \emptyset$

Attention : Toutes ces notions dépendent de l'espace ambiant E.

Exemples : $A =]0, 1[_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$

A est une partie ouverte de $E = \mathbb{Q}$.

$x \in A$. $B(x, \min(x, 1-x)) \subset A$

$\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(A) = A$

$\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ toute boule $B(x,r) =]x-r, x+r[$ contient des irrationnels (densité des irrationnels) donc pas incluse dans A.

Theoreme : Soit (E, d) espace métrique et $A \subset E$ une partie. Alors

$$\mathrm{Adh}_E(A) = \{a = \text{v.a}(u_n) \text{ pour } u_n : \mathbb{N} \to A\}$$
$$= \{\ell = \lim_{n\to+\infty}(u_n) \text{ pour } u_n : \mathbb{N} \to A \text{ convergentes}\}$$

Demonstration : $F = \{a = \text{v.a}(u_n) \text{ pour } u_n : \mathbb{N} \to A\}$

$F' = \{\ell = \lim_{n\to+\infty}(u_n) \text{ pour } u_n : \mathbb{N} \to A \text{ convergente}\}$

- $F' \subset F$ car toute limite ℓ est aussi une v.a
- $F \subset F'$ $a = $ v.a de (u_n) alors $a = \lim_{k\to+\infty} u_{s_k}$ ss-suite

- $F \supset A$ $\quad \forall x \in A$, suite constante $u_n = x$ CV vers x

- $F = F'$ est fermé

$x \in \overline{F}$, $\forall r > 0$ $\quad B(x,r) \cap F = \emptyset$

$\qquad r = 2^{-k}$, $\exists x_k \in B(x, 2^{-k}) \cap F$

$x_k \in F = F' \Rightarrow x_k = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{k,n} \qquad u_{k,n} \in A$

$\exists n_k$ tq $d(x_k, u_{k,n_k}) \leq 2^{-k}$

$$\begin{aligned} d(x, u_{k,n_k}) &\leq d(x, x_k) + d(x_k, u_{k,n_k}) \\ &\leq 2^{-k} + 2^{-k} \\ &\leq 2^{1-k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

$x = \lim\limits_{k \to +\infty} u_{k,n_k} \qquad u_{k,n_k} \in A$

Donc $x \in F' = F$

Ceci montre que $\overline{F} \subset F \Rightarrow \overline{F} = F \Rightarrow F$ fermé.

- $\left.\begin{array}{l} F \text{ contient } A \\ F \text{ fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow F \supset \overline{A}$

  plus petit fermé

- $F \subset \overline{A}$?

$\overline{A} = \{x \in E \,/\, \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A = \emptyset\}$

$x \in \overline{A}$, $r = 2^{-k} \rightsquigarrow x_k \in A$ tel que $x_k \in B(x, 2^{-k}) \cap A$

$\qquad x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_k \in F' = F$

Propriété vis à vis de $\cup$ et $\cap$

A, B parties de E.

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\mathring{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Démonstration : (i) $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$ donc il contient $\overline{A \cup B}$ (qui est le plus petit tel fermé)

$\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \supset \overline{A \cup B}$

$A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{A_1} \subset \overline{A_2}$

$$\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$$

(ii) Idem.

Attention : $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ pas toujours égal

$\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

$A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ $\quad A \cap B = \emptyset$ $\quad \overline{A \cap B} = \emptyset$

$B = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ $\quad \bar{A} = [0, 1]$ $\quad \bar{A} \cap \bar{B} = [0, 1]$

$\bar{B} = [0, 1]$