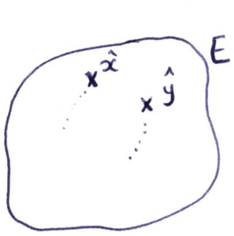
Théorème : Il existe un espace métrique $(\hat{E}, \hat{d})$ tq

- $(\hat{E}, \hat{d})$ complet
- il y a une injection $j : E \hookrightarrow \hat{E}$
- $\hat{d}/_E = d$



$$\hat{E} = S/_{\mathcal{R}}$$

S = suite de Cauchy de E

$(u_n)\mathcal{R}(v_n) \iff \lim d(u_n, v_n) = 0$

classe d'équivalence de x $\hat{x}$ = " $\lim u_n$ " . $\hat{y}$ = " $\lim v_n$ " classe d'équivalence de y .

On a $\hat{x} = \hat{y}$ dans ce cas

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \underset{\text{def}}{=} \lim_{n \to +\infty} d(u_n, v_n)$$

Observation: $(d(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$.

$\delta_n = d(u_n, v_n)$

$|\delta_p - \delta_q| = |d(u_p, v_p) - d(u_q, v_q)|$

$d(u_p, v_p) \leq d(u_p, u_q) + d(u_q, v_q) + d(v_q, v_p)$

$\Rightarrow |d(u_p, v_p) - d(u_q, v_q)| \leq d(u_p, u_q) + d(v_p, v_q)$

$\Rightarrow |\delta_p - \delta_q| \leq d(u_p, u_q) + d(v_p, v_q)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \quad p, q \geq N_1 \Rightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon/2$

$\exists N_2 \quad p, q \geq N_2 \Rightarrow d(v_p, v_q) < \varepsilon/2$

$p, q \geq \max(N_1, N_2) \Rightarrow |\delta_p - \delta_q| < \varepsilon$

$x \in E$

$E \ni x \longmapsto j(x)$ = classe d'equivalence de la suite cste $u_n = x$.

$E \ni y \longmapsto j(y)$ = " " " " " " $v_n = y$.

$\hat{d}(j(x), j(y)) = \lim\limits_{n \to +\infty} d(u_n, v_n) = d(x, y)$.

Detail à vérifier, par exemple, $\hat{x}$ = classe d'equivalence de (u_n),
= classe d'equivalence de (u_n')

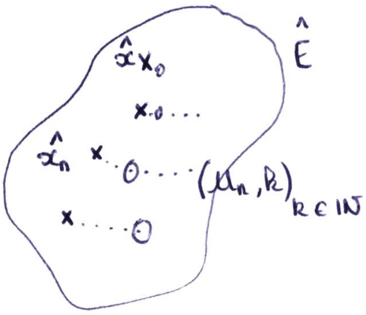
$\hat{y}$ = classe d'equivalence de (v_n)
= " " " (v_n')

$\lim d(u_n, v_n) = \lim d(u_n', v_n')$

$(u_n) \mathcal{R} (u_n') \Leftrightarrow \lim d(u_n, u_n') = 0$

$(v_n) \mathcal{R} (v_n') \Leftrightarrow \lim d(v_n, v_n') = 0$

Point essentiel : $(\hat{E}, \hat{d})$ est complet



$(\hat{x}_n)$ suite de Cauchy de $\hat{E}$

$\hat{x}_n$ = classe d'equivalence d'une suite $(u_n, k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Cauchy.

Fixons $\varepsilon = 2^{-n}$ appliqué à la suite $(u_n, k)_{k \in \mathbb{N}}$.

$\exists$ rang K_n tq $p, q \geqslant K_n \Rightarrow d(u_{n,p}, u_{n,q}) \leqslant 2^{-n}$.

Je prends ("suite entourée") $V_n = u_n, K_n$.

Affirmation : (V_n) de Cauchy.

$\varepsilon = 2^{-s}$ $\quad s \in \mathbb{N}$

$(\hat{x}_n)$ de Cauchy.

$\exists\, N_s$ tel que $i, j \geqslant N_s \Rightarrow \hat{d}(\hat{x}_i, \hat{x}_j) \leqslant \varepsilon = 2^{-s}$

Observation : $\hat{d}(\hat{x}_n, j(V_n)) = \lim\limits_{k \to +\infty} d(u_{n,k}, V_{n,K_n}) \leqslant 2^{-n}$

$$d(v_i, v_j) = \hat{d}(j(v_i), j(v_j)) \leqslant \hat{d}(j(v_i), \hat{x}_i) + \hat{d}(\hat{x}_i, \hat{x}_j) + \hat{d}(\hat{x}_j, j(v_j))$$
$$\leqslant 2^{-i} + 2^{-s} + 2^{-j} \quad \text{dès que } i, j \geqslant N_s$$

Si je prends $i, j \geqslant \max(s, N_s)$, alors $d(v_i, v_j) \leqslant 3 \cdot 2^{-s}$.

Le point limite cherché est $\hat{x}$ = classe d'equivalence de (V_n). On vérifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$

$\boxtimes$

Cas des espaces normés

$(E, \|\cdot\|)$ espace normé non complet

Theoreme : Il existe un espace normé $(\hat{E}, \|\cdot\|)$ qui contient E et qui est complet avec la même norme induite sur E.

A vérifier : $\hat{E}$ est un e.v.

$\hat{x}$ = classe eq (u_n)

$\hat{y}$ = classe eq (v_n)

Je prends $\hat{x} + \hat{y}$ = classe eq $(u_n + v_n)$

$\lambda . \hat{x}$ = classe eq (λu_n)

$\|\hat{x}\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n\|$

A vérifier (exercice)

$(u_n), (v_n)$ de Cauchy $\Rightarrow$ $(u_n + v_n)$ de Cauchy

(u_n) de Cauchy $\Rightarrow$ (λu_n) de Cauchy

(u_n) de Cauchy $\Rightarrow$ $(\|u_n\|)$ de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$

Séries normalement convergente dans un espace normé complet

Théorème : Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé complet. Si $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série tq $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|$ CV dans $\mathbb{R}_+$, autrement dit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$. Alors $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ CV dans E.

Démo : On regarde les sommes partielles.

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \in E$.

Il suffit de voir que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy. Prenons $p \geq q$ supposés assez grand. $S_p - S_q = u_{q+1} + \dots + u_p$

$\|S_p - S_q\| \leq \|u_{q+1}\| + \dots + \|u_p\|$ (*)

Considérons $\sigma_n = \|u_0\| + \|u_1\| + \dots + \|u_n\| \in \mathbb{R}_+$ qui est une suite CV par hypothèse.

(*) $\Leftrightarrow$ $\|S_p - S_q\| \leq |\sigma_p - \sigma_q|$

↑ donc de Cauchy ↑ de Cauchy car CV

$\square$

Exemples Fondamental :

$E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$f \in E$ fct cts $[a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$(E, \|.\|_\infty)$ espace normé complet.

Théorème : Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CV dans $(E, \|.\|_\infty)$ ce qui signifie qu'il y a CVU. De plus, il y a CV de $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ (CVA) et cette série est aussi uniformément continue. On dit qu'il y a CVN. (cf cours précédents).

Proposition : Soit $(E, \|.\|)$ espace normé. Il y a équivalence entre

(i) $(E, \|.\|)$ complet

(ii) $\sum \|u_n\|$ CV dans $\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$ $\sum u_n$ CV dans E.

Autrement dit, dans un espace non complet, il existe tj des séries tq $\sum \|u_n\|$ CV mais $\sum u_n$ ne CV pas.

Phenomene analogue dans $\mathbb{Q}$.

$\exists u_n \in \mathbb{Q}$ $\sum |u_n|$ CV dans $\mathbb{Q}$ (exercice)

$\sum u_n$ ne CV pas dans $\mathbb{Q}$.

Demonstration :

- (i) $\Rightarrow$ (ii) théorème précédent.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Prenons (x_n) suite de Cauchy. $\varepsilon = 2^{-k}$

$\exists N_k$ tq $p, q \geq N_k \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}$

On peut supposer $N_{k+1} \geq N_k$

Posons $u_k = x_{N_k} - x_{N_{k-1}}$ $k \geq 1$. avec $u_0 = x_{N_0}$.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_k = \cancel{x_{N_0}} + (\cancel{x_{N_1}} - \cancel{x_{N_0}}) + (\cancel{x_{N_2}} - \cancel{x_{N_1}}) + \cancel{\dots} + (x_{N_k} - \cancel{x_{N_{k-1}}})$$

$$= x_{N_k}$$

$\|u_k\| \leq 2^{-(k-1)}$ en prenant $p = N_k$ $q = N_{k-1}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-(k-1)} = 4 < +\infty$$

$\Downarrow$ (hyp (ii))

$\sum u_k$ CV $\Rightarrow$ la suite (x_{N_k}) converge vers une limite $\ell \in E$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$

$\boxtimes$

Définition : Dans un espace complet, on dit que $\sum u_n$ est normalement CV si $\sum \|u_n\|$ CV dans $\mathbb{R}_+$.

Chapitre 4 : Notions fondamentales de la topologie

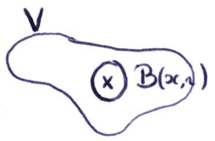
I/ Voisinages, ouverts, fermés.

Soit (E, d) un espace métrique.

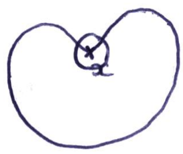
Boule ouverte : $B(x, r) = \{ y \in E \text{ tq } d(x,y) < r \}$

Boule fermée : $B_f(x, r) = \{ y \in E \text{ tq } d(x,y) \leq r \}$

Définition : On appelle voisinage d'un point $x \in E$ une partie V de E qui contient une boule ouverte $B(x, r)$ de rayon $r > 0$.



ok



pas un voisinage !

Définition : On dit qu'une partie $U \subset E$ est un ouvert si U est un voisinage de chacun de ses points, autrement dit $\forall x \in U, \exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset U$

Intuitivement, c'est une partie qui ne contient aucun de ses points sur sa frontière.

Propriété : Si $(U_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts finie ou infinie, alors $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.

Demonstration : Prenons $x \in U$. $\exists i \in I$ tq $x \in U_i$. U_i ouvert $\Rightarrow \exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset U_i \subset U$

Propriété : U, V ouvert $\Rightarrow U \cap V$ ouvert

Demonstration : Prenons $x \in U \cap V$.

$x \in U \Rightarrow \exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset U$

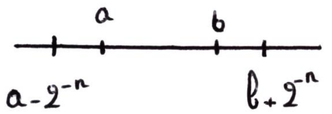
$x \in V \Rightarrow \exists r' > 0$ tq $B(x,r') \subset V$

Alors $B(x, \min(r,r')) \subset U \cap V$

Donc $U \cap V$ ouvert.

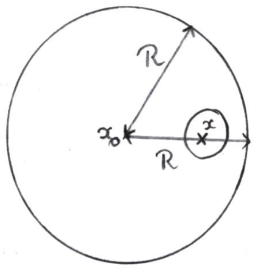
Propriété :
- $U_1, U_2, \dots, U_n$ ouverts $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ ouvert
- famille infinie : l'intersection, en général, n'est pas ouvert.

Demonstration : $E = \mathbb{R}$ $\quad U_n =]a - 2^{-n}, b + 2^{-n}[$ intervalle ouvert



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = [a,b]$$ qui n'est pas un ouvert.

Remarques :
- $\emptyset$ est considéré comme un ouvert
- E est un ouvert
- Une boule ouverte $U = B(x_0, R)$ est un ouvert.



si $x \in B(x_0, R)$, prenons $r = R - d(x_0, x)$

$B(x,r) \subset B(x_0, R)$

Attention :
- Une boule fermée peut-être un ouvert.

$E = [0,1]$ $\quad B_f(\frac{1}{2}, 5) = E$ est un ouvert

- Dans un espace vectoriel normé, une boule fermée n'est pas un ouvert.