V/ Convergence des suites dans les espaces métriques. Notion d'espace complet.

1) Définitions principales

(E, d) espace métrique (par exemple une partie d'un espace normé). $(F, \|.\|)$

Convergence d'une suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite à valeurs $u_n \in E$. On écrit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in E$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(u_n, \ell) < \varepsilon$.

Suite de Cauchy : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N}$,

$p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon$.

Théorème : (u_n) converge $\Rightarrow$ (u_n) de Cauchy

Définition : (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente dans E.

Exemples: (1) $\mathbb{R}$ est complet

(2) $\underset{d_j}{E_j}$ complets, $1 \leq j \leq k \Rightarrow E_1 \times \dots \times E_k$ complet (d = distance max)

$u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,k}) \in E_1 \times \dots \times E_k$

$d(u_p, u_q) = \max\limits_{1 \leq j \leq k} d_j(u_{p,j}, u_{q,j})$

(u_n) converge dans $E_1 \times \dots \times E_k \Leftrightarrow$ chaque $(u_{n,j})$ converge dans E_j.

(u_n) de Cauchy dans $E_1 \times \dots \times E_k \Leftrightarrow$ chaque $(u_{n,j})$ de Cauchy dans E_j.

Conséquence: $\mathbb{C}$ est complet

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$z \leftrightarrow (a, b)$ $\quad z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \max(|a|, |b|)$ normes équivalentes

$\max(|a|, |b|) \leq |z| \leq \sqrt{2} \max(|a|, |b|)$

- Tout espace de dimension finie $F = \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'une des normes $\|.\|_p$ est complet.

- $F = \mathbb{R}[X]$ $\quad P(X) = \sum a_i X^i$, $\|P\|_\infty = \max |a_i|$

$P_n(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} 2^{-i} X^i$ degré n.

$\underset{p \geq q}{d}(P_p, P_q) = \| \sum\limits_{i=q+1}^{p} 2^{-i} X^i \|_\infty = 2^{-q-1}$

$p \geq q \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow d(P_p, P_q) < \varepsilon$

C'est une suite de Cauchy.

La seule limite possible serait $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} X^i$ qui n'est pas un polynôme, donc la suite (P_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}[X]$.

<u>Observation importante</u> : Un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas forcément complet.

- $F = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ fct cts $[a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Suite de Cauchy de $(F, \|.\|_\infty)$.

Suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N_\varepsilon \Rightarrow$ $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$. On sait que (f_n) CVU vers une limite f cts cad $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$

2) Valeur d'adhérence

(E, d) espace métrique.

<u>Définition</u> : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $a \in E$ comme <u>valeur d'adhérence</u>, s'il existe une sous-suite infinie $(U_n)_{n \in S \subset \mathbb{N}}$ $S = \{s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots\}$ tq $\lim\limits_{k \to +\infty} U_{s_k} = a$

<u>Caractéristique</u> : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $a \in E$ comme V.A. ssi $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$ et $d(U_n, a) < \varepsilon$.

<u>Théorème</u> : Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy admet $a \in E$ comme V.A. alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$

<u>Propriété de Bolzano-Weierstrass dans un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty$.</u>

(i) Toute suite bornée dans un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^k$ admet au moins une V.A.

(ii) S'il y a qu'une seule V.A, c'est une limite.

Démonstration :

(i) $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$. Raisonnons le cas de $\mathbb{R}^k$.

$u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,k}) \in \mathbb{R}^k$ avec $|u_{n,j}| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $j = 1, 2, \dots, k$

$(u_{n,1})$ suite de réels dans $[-M, +M]$.

B-W vrai dans $\mathbb{R}$, donc $\exists$ ss-suite $(u_{n,1})_{n \in S_1 \subset \mathbb{N}}$ avec

$\lim\limits_{\substack{n \to S_1 \\ n \to +\infty}} u_{n,1} = a_1 \in [-M, +M]$.

On considère $(u_{n,2})_{n \in S_1}$ suite dans $[-M, M]$

B-W $\Rightarrow \exists$ $S_2 \subset S_1$ tq $\lim\limits_{\substack{n \to S_2 \\ n \to +\infty}} u_{n,2} = a_2$

Par récurrence, je construis : $S_k \subset S_{k-1} \subset \dots \subset S_2 \subset S_1$ avec

$\lim\limits_{\substack{n \in S_k \\ n \to +\infty}} u_{n,k} = a_k \in [-M, M]$.

On a alors $\lim\limits_{\substack{n \in S_k \\ n \to +\infty}} u_{n,j} = a_j$ $\forall j = 1, 2, \dots, k$ donc $\lim\limits_{\substack{n \in S_k \\ n \to +\infty}} u_n = a =$

$(a_1, \dots, a_k) \in [-M, M]^k$ CQFD

En faite, si $E_1, \dots, E_k$ satisfait B-W alors $E_1 \times \dots \times E_k$ aussi

(ii) Supposons la V.A unique $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k \Rightarrow a_j$ unique V.A.

de $(u_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$. Sinon $a_j = \lim\limits_{\substack{n \in S \\ n \to +\infty}} u_{n,j}$ $a'_j = \lim\limits_{\substack{n \in S \\ n \to +\infty}} u_{n,j} \neq a_j$

Par extraction comme dans (i) on fabriquerait 2 V.A, $a \neq a'$. CONTRADICTION

Ceci ramène la démo au cas de dim 1, ie $\mathbb{R}$ et là c'est connu :

$\liminf\limits_{n \to +\infty} u_n = \limsup\limits_{n \to +\infty} u_n \in [-M, +M]$ est la limite commune.

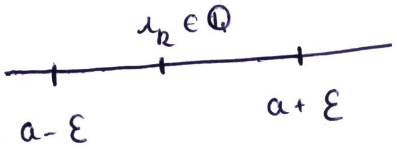
3) Suites denses

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.

$\exists$ suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\quad \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ k &\longmapsto r_k \end{aligned}$ bijection

Observation : $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet tout elt $a \in \mathbb{R}$ comme V.A.

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists k \in \mathbb{N}, k \geq N$ et $a - \varepsilon < r_k < a + \varepsilon$



Je veux en plus $k \geq N$

Si on tombe sur un r_k avec $k < N$, on en choisit un autre intermédiaire $r_p \in]a-\varepsilon, r_k[$ au bout de $N+1$ étapes au plus, on est sûr que $k \geq N$.

Remarque : $\mathbb{D}$ aussi est dénombrable et dense. $(\mathbb{R}^k, \|.\|_\infty)$

$\mathbb{Q}^k$ dénombrable dense.

$\exists$ suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{Q}^k$

$$n \longmapsto r_n = (r_{n,1}, \ldots, r_{n,k})$$

Même raisonnement que précédemment $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet tout $\mathbb{R}^k$ comme V.A.

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans (E,d) si tout $a \in E$ est VA de (u_n).

Affirmation : $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{$ fct bornées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ n'admet pas de suite dense.

4) Complété d'un espace métrique

(E,d) espace métrique (non complet)

$S = \{$ suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E\}$

$(u_n), (v_n) \in S$ seront dit équivalentes en CV.

$$(u_n)\,\mathcal{R}\,(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} d(u_n, v_n) = 0$$

$\mathcal{R}$ relation d'équivalence.

$\hat{E} = S/_{\mathcal{R}}$ ensemble quotient.

$\hat{x}$ défini par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ et on considère qu'on obtient le même $\hat{x}$ pour deux suites de Cauchy $(u_n)\mathcal{R}(v_n)$.

Injection canonique : $j : E \longrightarrow \hat{E}$

$x \longmapsto$ classe d'équivalence de la suite constante $u_n = x$

Distance dans $\hat{E}$

$\hat{x}$ classe de $(u_n) \in S$

$\hat{y}$ ——— $(v_n) \in S$

$t_n = d(u_n, v_n) \in \mathbb{R}_+$, (t_n) suite de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$.

$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \underset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} d(u_n, v_n)$

Théorème : $(\hat{E}, \hat{d})$ est un espace métrique complet contenant E (via l'injection canonique j) et $\hat{d}/_E = d$.

$E = \mathbb{Q} \rightsquigarrow \hat{E} = \mathbb{R}$.