Notation : $\mathcal{L}_c(E,F)$ = application linéaires continues de E dans F

$$|||u||| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|' = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} \|u(x)\|'$$

Propriété caractéristique : $\|u(x)\|' \leqslant |||u|||\,\|x\|$, $\forall x \in E$ et $|||u|||$ est la plus petite constante possible.

Proposition : $u \longmapsto |||u|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ (qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

Démonstration : $\mathcal{L}_c(E,F)$ sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. A montrer : stabilité par $+$ et $\cdot$ $\quad u, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$

$$\begin{aligned}\|(u+v)(x)\|' = \|u(x)+v(x)\|' &\leqslant \|u(x)\|' + \|v(x)\|' \\ &\leqslant |||u|||\,\|x\| + |||v|||\,\|x\| \\ &= (|||u||| + |||v|||)\,\|x\|\end{aligned}$$

Donc $u+v \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $|||u+v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$

$$\|(\lambda u)(x)\|' = \|\lambda . u(x)\|' = |\lambda|\,\|u(x)\|' \leqslant |\lambda|\,|||u|||\,\|x\|$$

Donc $\lambda u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $|||\lambda u||| \leqslant |\lambda|\,|||u|||$

$$|||\lambda u||| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|\lambda u(x)\|'}{\|x\|} = |\lambda|\,|||u||| \text{ en fait}$$

$\boxtimes$

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

$\|.\| \quad \|.\|' \quad \|.\|''$

<u>Proposition</u> : $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(E,F) \Rightarrow v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et

$|||v \circ u||| \leqslant |||v|||\ |||u|||$

<u>Démonstration</u> : $\forall x \in E,\ \|(v \circ u)(x)\|'' = \|v(u(x))\|'' \leqslant |||v|||\ \|u(x)\|'$

$\leqslant |||v|||\ |||u|||\ \|x\|$

Donc $|||v \circ u||| \leqslant |||v|||\ |||u|||$

<u>Définition</u> : Une application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite " bicontinue " ou " isomorphisme d'espaces normés " si u est bijective, continue ainsi que u^{-1}.

$Id_E : E \longrightarrow E$ " application identique " $\quad |||Id_E||| = 1$.

$x \longmapsto x$

$u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ isomorphisme d'espaces normés.

$u^{-1} \in \mathcal{L}_c(E,F)$

$u^{-1} \circ u = Id_E \qquad u \circ u^{-1} = Id_F$

$1 = |||Id_E||| = |||u^{-1} \circ u||| \leqslant |||u^{-1}|||\ |||u||| \Rightarrow |||u^{-1}||| \geqslant |||u|||^{-1}$ (pas forcement égalité).

<u>Dual d'un espace normé</u>

E : $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni d'une norme $\|.\|$

<u>Dual algébrique</u> : $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, qu'on munit de $\lambda \mapsto |\lambda|$ comme norme.

<u>Formes linéaires continues</u> : $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K}) \subset E^*$ est appelé " dual topologique ".

Norme duale : $\varphi \in E'$

$$\|\varphi\|' = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} |\varphi(x)| \qquad \varphi(x) \in \mathbb{K}.$$

Exemples : • $E = \mathbb{R}[X]$ polynomes

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$$

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longmapsto P(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$P_n = 1 + X + \dots + X^n \qquad \|P_n\|_\infty = 1$$

$$\varphi(P_n) = n+1 \qquad \frac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|} = n+1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

φ n'est pas continue.

• Cas de $E = \mathbb{K}^n$, $\|.\|_p$ normes qui sont toutes équivalentes.

Remarque : $E \xrightarrow{u} F$ On a les mêmes applications linéaires continues.

$$\begin{array}{ccc} & \|.\|_1 & \|.\|_1' & \\ \sim & & & \sim \\ & \|.\|_2 & \|.\|_2' & \end{array}$$

$$B^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq A \|x\|_1 \qquad x \in E$$

$$(B')^{-1} \|y\|_1 \leq \|y\|_2 \leq A' \|y\|_1 \qquad y \in F$$

$$\|u(x)\|_2' \leq |||u|||_2 \|x\|_2 \leq |||u|||_2 A \|x\|_1$$

$$\|u(x)\|_1' \leq B' \|u(x)\|_2' \leq AB' |||u|||_2 \|x\|_1 .$$
$(y = (u(x)))$

Si u était continue pour $(\|.\|_2, \|.\|_2')$, elle est aussi cts pour $(\|.\|_1, \|.\|_1')$ et

Prenons par exemple $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ $E = \mathbb{K}^n$ $\mathcal{L}(E,F)$ avec F quelconque muni d'une norme $\|\cdot\|'$

$E = \mathbb{K}^n$ base canonique $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

position i

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$$

Etant donné des vecteurs quelconques $v_i \in F$, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ définit une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $u(e_i) = v_i$

Ceci donne un isomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, F) \longleftrightarrow F^n$

$$u \longleftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \qquad v_i = u(e_i)$$

$$\|u(x)\|' \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\Big\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|v_i\|' \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|'\right) \max_{0 \leq i \leq n} |x_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|'\right) \|x\|_\infty$$

Donc $u \in \mathcal{L}_c(\mathbb{K}^n, F)$ et $|||u||| \leq \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|' = \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|'$

$\mathcal{L}_c(\mathbb{K}^n, F) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, F)$ tjr vrai si l'espace de départ est de dim finie

Faux en general si E de dimension infinie.

IV/ Espaces produits et applications multilinéaires

1) Espaces produits

$E_1, \dots, E_k$ $\mathbb{K}$-e.v normés, norme $\|\cdot\|_j$ sur E_j

Espace produit : $E = E_1 \times \dots \times E_k$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

E est un $\mathbb{K}$-ev.

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{1\leq j\leq n} \|x_j\|$$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{1\leq j\leq n} \|x_j\|^p\Big)^{1/p} \qquad p \in [1,+\infty[$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ Ces normes sont toutes equivalentes.

On prendra $\|x\| = \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|$ par exemple.

Produits d'espaces métriques

(E_j, d_j) $\quad 1\leq j\leq n$

$$d^{(p)}(x,y) = \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^p\Big)^{1/p}$$

$p=\infty$: $d\big((x_j),(y_j)\big) = \max_{1\leq j\leq n} d_j(x_j,y_j)$

"Distances lipschitz-équivalentes" : $d(x,y) \leq d^{(p)}(x,y) \leq n^{1/p} d(x,y)$

$E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la distance d est appelé espace métrique produit.

2) Applications multilineaires

$u : E_1 \times \dots \times E_k \longrightarrow F$ est multilineaires si $x_j \longmapsto u(x_1,\dots,x_j,\dots,x_k)$ est lineaire par rapport à chaque variable $x_j \in E_j$.

Supposons $E_j, \|.\|_j$, normé

$F, \|.\|'$ normé

Théorème et définition : Il y a équivalence entre

(i) u est continue en $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_k$

(ii) u est continue sur $E_1 \times \dots \times E_k$

(iii) $\exists\, C \geq 0$ tq $\forall\, x_j \in E_j$, $\|u(x_1, \dots, x_k)\|' \leq C \|x_1\|_1 \times \dots \dots \times \|x_k\|_k$

On dit alors que u est multilinéaire continue

$$|||u||| = \min(C \text{ possibles}) = \sup_{\substack{x_j \in E_j \\ x_j \neq 0}} \frac{\|u(x_1, \dots, x_k)\|'}{\|x_1\|_1 \dots \|x_k\|_k} = \sup_{\substack{x_j \in E_j \\ \|x_j\|_j = 1}} \|u(x_1, \dots, x_k)\|'$$

Démonstration :

- (ii) => (i) évident
- (i) => (iii) $\quad \varepsilon = 1$, $\exists\, \delta > 0$, $\max\limits_{1 \leq j \leq k} \|x_j\| < \delta \Rightarrow \|u(x_1, \dots, x_k)\|' < \varepsilon = 1$

$$u(x_1, \dots, x_k) = \lambda_1 \dots \lambda_k\, u(\lambda_1^{-1} x_1, \dots, \lambda_k^{-1} x_k)$$

$\lambda_j = \frac{2}{\delta} \|x_j\|_j \qquad \lambda_j^{-1} x_j = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x_j\|_j} x_j$ de norme $\frac{\delta}{2} < \delta$

$$\|u(x_1, \dots, x_k)\|' \leq |\lambda_1 \dots \lambda_k| \cdot 1 \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^k \|x_1\|_1 \dots \|x_k\|_k$$

d'où (iii) avec $C = \left(\frac{2}{\delta}\right)^k$

- (iii) => (ii) par exemple pour $k = 2$

$(\xi_1, \xi_2) \in E_1 \times E_2$ voisin de (x_1, x_2)

$\|u(\xi_1, \xi_2) - u(x_1, x_2)\|' \leq$?

$\xi_1 = x_1 + h_1$

$\xi_2 = x_2 + h_2$

$$d((x_1, x_2), (\xi_1, \xi_2)) = \|(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2)\| = \max(\|\xi_1 - x_1\|_1, \|\xi_2 - x_2\|_2)$$

$= \max(\|h_1\|_1, \|h_2\|_2) \underset{\text{supposons}}{<} \delta$ (petit)

$$\|u(x_1+h_1, x_2+h_2) - u(x_1,x_2)\|' \underset{\text{multi-linéarité}}{=} \|u(h_1,x_2) + u(x_1,h_2) + u(h_1,h_2)\|'$$

$$\underset{(iii)}{\leq} C(\|h_1\|_1\|x_2\|_2 + \|x_1\|_1\|h_2\|_2 + \|h_1\|_1\|h_2\|_2)$$

$$< C\delta(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 + \delta)$$

Je veux ceci $< \varepsilon$ fixé a priori et je cherche un $\delta = \delta_{\varepsilon,(x_1,x_2)}$

Prenons $\delta \leq 1$, on voie qu'il suffit de prendre $\delta = \delta_{\varepsilon,(x_1,x_2)} = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{C(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 + 1)}\right)$

On a bien $d((\xi_1, \xi_2),(x_1,x_2)) = \max(\|h_1\|, \|h_2\|) < \delta_{\varepsilon,(x_1,x_2)}$

$\Rightarrow \|u(\xi_1, \xi_2) - u(x_1,x_2)\|' < \varepsilon$

D'où la continuité au point (x_1,x_2)

Ici, il n'y a pas uniforme continuité sur l'espace produit si $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\xrightarrow{u} \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) &\longmapsto x_1x_2 \end{aligned} \qquad u(x,x) = x^2 \text{ pas uniformément cts.}$$