Continuité uniforme :

(E,d) (F,d') espaces métriques.

Def: (i) $u : E \to F$ est UC si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x,y \in E$,
$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(u(x), u(y)) < \varepsilon$

(ii) $u : E \to F$ est dite k-lipschitzienne (k cste ≥ 0) si
$d'(u(x), u(y)) \leq k\, d(x,y) \quad \forall x,y \in E$.

Theoreme: u k-lipschitzienne $\Rightarrow$ u UC $\Rightarrow$ u cts (evident)
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \not\Leftarrow \quad\quad\quad\quad \not\Leftarrow$

Demo: u k-lipschitzienne $\Rightarrow$ u UC. Pour que $d'(u(x), u(y)) < \varepsilon$, il suffit que $k\,d(x,y) < \varepsilon$ cad $d(xy) < \delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{k}$ (si $k \neq 0$)

$k=0$: $d'(u(x), u(x_0)) = 0$, $\forall x$ donc $u(x) = u(x_0)$ cste. Evidemment, UC.

$\not\Leftarrow$: contre exemple : $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ $\quad d(x,y) = d'(x,y) = |x-y|$

$|u(x) - u(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$.

Par exemple, $x \geqslant y \geqslant 0$ (quitte à permuter x et y)

$0 \leqslant \sqrt{x} - \sqrt{y} \underset{?}{\leqslant} \sqrt{x-y} \iff \sqrt{x} \underset{?}{\leqslant} \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$

On élève au carré : $x \underset{?}{\leqslant} (\sqrt{y} + \sqrt{x-y})^2 = y + (x-y) + 2\sqrt{x(x-y)}$

$= x + 2\sqrt{x(x-y)}$ ok

Pour que $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$, il suffit que $|\sqrt{x-y}| < \varepsilon$ cad $|x-y| < \varepsilon^2$

$\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ convient d'où la CU.

<u>Observation</u>: si $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable. u k-lipschitzienne $\iff \forall x \in I$, $|u'(x)| \leqslant k$.

$\Rightarrow$ $u'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{u(y) - u(x)}{y - x}$ or $\left| \dfrac{u(y) - u(x)}{y - x} \right| \leqslant k \quad \forall x, y$ donc

$|u'(x)| \leqslant k$

$\Leftarrow$ Accroissements finies : $u(y) - u(x) = u'(c)(y - x)$ avec $c \in]x, y[$

$|u(y) - u(x)| \leqslant k|y - x|$ car hyp $|u'(c)| \leqslant k$.

⚠ $x \to |x|$ 1 lipschitzienne, mais pas dérivable.

<u>Exemples</u>: $u(x) = \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0_+]{} +\infty$ dérivée non borné donc u pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. En revanche, $u(x) = \sqrt{x}$ est k-lipschitzienne de rapport $k = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ sur $[a, +\infty[$.

<u>Définition</u>: On dit que u est α-höldérienne si $\exists\, C \geqslant 0$, $d'(u(x), u(y)) \leqslant C\, d(x,y)^\alpha$, $\alpha > 0$

$u(x) = \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-höldérienne (avec $C = 1$).

<u>Exercice</u>:
- u-höldérienne $\Rightarrow$ u uniformement cts.
- $u(x) = x^\alpha$ $\quad u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est α-höldérienne (avec $C = 1$)

si $\alpha \leq 1$.

<u>Lemme</u>: • $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ si $a, b \geq 0$ et $\alpha \leq 1$.

• $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ α-höldérienne avec $\alpha > 1 \Rightarrow u$ constante

<u>Définition</u>: (E, d) (F, d') espaces métriques

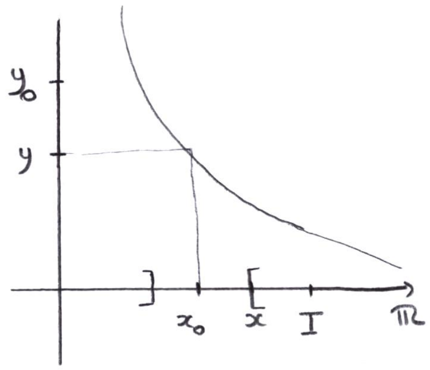
$u : E \to F$ est appelée homéomorphisme si u est bijective avec $u : E \to F$ cts et $u^{-1} : F \to E$ cts ("bicontinue")

<u>Théorème</u>: Si $u : I \to \mathbb{R}$ cts et strictement monotone alors $u : I \to u(I)$ est un homéomorphisme sur un intervalle $J = u(I)$

<u>Démonstration</u>: $J = u(I)$ intervalle connu.

<u>Question</u>: $u^{-1} : J = u(I) \longrightarrow I$ est-elle cts ?

si u est strictement décroissante



$|u^{-1}(y) - u^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

Il suffit que $y \in]u(x_0 + \varepsilon), u(x_0 - \varepsilon)[$

$y \in]u(x_0+\varepsilon), u(x_0 - \varepsilon)[\Rightarrow x = u^{-1}(y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

$\delta_{\varepsilon, x_0} = \min\left(|u(x_0+\varepsilon) - u(x_0)|, |u(x_0 - \varepsilon) - u(x_0)|\right) \Rightarrow |u^{-1}(y) - u^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

⚠ Faux pour la C.U.

$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto \sqrt{x} = y$ est bijective et U.C mais $u^{-1}(y) = y^2$ n'est pas UC (le $\delta_{\varepsilon, x_0}$ de la démo précédente ne peut pas être rendue indépendamment de x_0.)

Comparaisons de normes sur un espace normé:

E $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de 2 normes $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$

Définition : On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont equivalentes s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ tq $\forall x \in E$,

$$\left.\begin{array}{l} \|x\|' \leq C_1 \|x\| \\ \|x\| \leq C_2 \|x\|' \end{array}\right\} \Leftrightarrow C_2^{-1} \|x\| \leq \|x\|' \leq C_1 \|x\|$$

Distances associés : $d(x,y) = \|x-y\|$

$d'(x,y) = \|x-y\|'$

$C_2^{-1} d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C_1 d(x,y)$

Proposition : Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes, toutes les notions précédentes sont inchangées (continuité, UC, k-lipschitzienne, α-höldeciennes). Au plus, les constantes k et C peuvent changer.

Remarque : C'est bien une relation d'équivalence.

$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|'' \Rightarrow \|\cdot\| \sim \|\cdot\|''$ (exercice)

Exemple : $E = \mathbb{K}^n$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$ $\quad p \in [1, +\infty[$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Ces normes sont équivalentes. $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_\infty \quad \forall p \in [1, +\infty[$

$|x_j| \leq \|x\|_p$ evident

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \|x\|_p$

$m = \|x\|_\infty$

$\|x\|_p \leq (n \cdot m^p)^{1/p} = n^{1/p} m = n^{1/p} \|x\|_\infty$

$C_1 = 1 \qquad C_2 = n^{1/p}$

Contre-exemple : $E = \mathbb{R}[X]$ $\qquad Q(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$

$\uparrow$

$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)_{j \in \mathbb{N}}$

$\|Q\|_p = \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p}$

Ces normes ne sont pas équivalentes entre-elles sur E

$Q_n(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n \qquad \|Q_n\|_p = n^{1/p} \qquad p \in [1, +\infty]$

$$\frac{\|Q_n\|_p}{\|Q_n\|_{p'}} = n^{1/p - 1/p'} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 0 \quad \text{si } p > p' \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{si } p < p' \end{array}$$

III / Continuité des applications linéaires

$\left.\begin{array}{l}(E, \|.\|) \\ (F, \|.\|)\end{array}\right\}$ $\mathbb{K}$ - espaces vectoriels normés

$\mathcal{L}(E,F)$ = applications $\mathbb{K}$-linéaires $E \xrightarrow{u} F$

($\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ si on veut préciser le corps)

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Il y a équivalence entre

(i) u est cts en 0_E

(ii) u est cts sur E

(iii) u est U.C sur E

(iv) $\exists\, k \in \mathbb{R}_+$ tq $\|u(x)\|' \leq k\|x\|$, $\forall x \in E$

Démonstration : • (iv) => u est k-lipschitzienne => (iii)

$$\forall x,y \in E \quad d'(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\|' = \|u(x-y)\|' \leq k\|x-y\| = k\, d(x,y)$$

linéarité

• (iii) => (ii) => (i) : évident.

• (i) => (iv)

u continue en 0_E donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ ....

Prenons $\varepsilon = 1$: $\exists\, \delta = \delta_1 > 0$ tq $\forall x \in E$, $\|x - 0_E\| < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(0_E)\|' < \varepsilon = 1$

$\|x\| < \delta \Rightarrow \|u(x)\|' < 1$.

Prenons $x \in E$, $x \neq 0$.

Posons $\xi = \left(\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|}\right) x$ alors $\|\xi\| = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ alors $\|u(\xi)\|' \leqslant 1$.

$u(\xi) = \left(\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|}\right) u(x)$ linéarité de u

$\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|} \|u(x)\|' \leqslant 1 \Rightarrow \|u(x)\|' \leqslant \frac{2}{\delta} \|x\|$

Encore vrai si $x = 0$

(iv) est vrai avec $k = \frac{2}{\delta}$

Norme d'une application linéaire

Théorème et définition: Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue.

$|||u||| =$ constante k minimale de la condition (iv) précédente

$$= \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x \in E, \|x\| = 1} \|u(x)\|' = \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|'$$

Démonstration: $\underbrace{\|u(x)\|' \leqslant k \|x\|}_{\text{(iv)}} \underset{\text{si } x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|} \leqslant \underset{\text{majorant}}{k}$

Le minimum des majorants est le sup.

$\frac{\|u(x)\|'}{\|x\|} = \left\| u\left(\frac{1}{\|x\|} x\right)\right\|'$ par linéarité

$\xi = \frac{1}{\|x\|} x$ est de norme $\|\xi\| = 1$.

Donc $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|} \underset{(*)}{\leqslant} \sup_{\xi \in E, \|\xi\| = 1} \|u(\xi)\|' \underset{(**)}{\leqslant} \sup_{\xi \in E, \|\xi\| \leqslant 1} \|u(\xi)\|'$

(*) $\sup_{\substack{\xi \in E \\ \|\xi\|=1}} \|u(\xi)\|' = \sup_{\substack{\xi \in E \\ \|\xi\|=1}} \frac{\|u(\xi)\|'}{\|\xi\|} \leq \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|}$

(**) $\|u(\lambda \xi)\|' = |\lambda| \|u(\xi)\|' \leq \|u(\xi)\|'$ si $\lambda \in [0,1]$

Conséquence : u continue $\Leftrightarrow$ u bornée sur $\overline{B}_E(0,1)$.

On parle d'application linéaire cts (ou bornée)

Notation : $\mathcal{L}_c(E,F)$ = application linéaires continues de E dans F

Theoreme : $|||u|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$