Question : Est-ce que la $\|.\|_p$ est bien une norme ?

Reponse : Oui si $p \geq 1$

Non si $0 < p < 1$.

→ Separation : claire : $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$

→ $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{p} |\lambda|^p |x_j|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

homogeneité claire, vraie aussi si $p = \infty$

→ Inégalité triangulaire ?

$p = 1$ ou $p = \infty$ immédiat

$p = 2$ (cauchy-schwarz)

Inégalité de Hölder $\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ si $p, q \in [1, +\infty]$ avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (*)$$

Si $(*)$ est vrai, on dit que p, q sont conjugués $q = \frac{p}{p-1}$

p	1	2	∞
q	$\infty \searrow$	$2 \searrow$	1

Cauchy - Schwarz : cas particulier $p = q = 2$

Démo de Hölder

- $n = 1$: si $a, b \geqslant 0$ MQ $ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Il suffit de le voir pour $a, b > 0$

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p}(p \ln a) + \frac{1}{q}(q \ln b)\right) \underset{\substack{\text{convexité de} \\ \text{l'exp}}}{\leqslant} \frac{1}{p}\exp(p \ln a) + \frac{1}{q}\exp(q \ln b)$$

- n quelconque. $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j|$

Prenons $t > 0$. $|x_j||y_j| = \frac{1}{t}\underbrace{(t|x_j|)}_{a}\underbrace{|y_j|}_{b} \leqslant \frac{1}{t}\left(\frac{1}{p} t^p |x_j|^p + \frac{1}{q}|y_j|^q\right)$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j| \leqslant \frac{1}{p} t^{p-1} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \underset{\text{def}}{=} u(t) \text{ ceci vrai } \forall t > 0.$$

$$u'(t) = \frac{p-1}{p} t^{p-2} \|x\|_p^p - \frac{1}{q}\frac{1}{t^2}\|y\|_q^q$$

$$= \frac{1}{q t^2}\left(t^p \|x\|_p^p - \|y\|_q^q\right) \text{ s'annule pour } t = \frac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p} \text{ si } x \neq 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
t & 0 & & t_0 & & +\infty \\
\hline
u(t) & +\infty & \searrow & m & \nearrow & +\infty \\
 & & & = \|x\|_p \|y\|_p & &
\end{array}$$

$$m = u(t_0) = \frac{1}{p}\underbrace{\frac{\|y\|_q^{q(p-1)/q}}{\|x\|_p^{p-1}}}_{t_0^{p-1}} \|x\|_p^p + \overbrace{\frac{1}{q}\frac{\|x\|_p}{\|y\|_q^{q/p}}}^{\cdot\, \|y\|_q^q}$$

$$= \|x\|_p \|y\|_p$$

- L'inegalité vraie si $1 < p, q < \infty$.

- Aussi vraie si $p = 1$ $q = \infty$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right) \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |y_j|$$

Inégalité de Minkowski : $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \forall p \in [1,+\infty[$

Démonstration : • $p=1$ ou $p=\infty$: facile

• $1<p<\infty$. $q=\dfrac{p}{p-1}$ conjugué

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^p \leq \sum_{j=1}^n (|x_j|+|y_j|)|x_j+y_j|^{p-1}$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j|}_{u_j}\underbrace{|x_j+y_j|^{p-1}}_{v_j} + \sum_{j=1}^n |y_j||x_j+y_j|^{p-1}$$

Hölder : $\displaystyle\sum_{j=1}^n |x_j||x_j+y_j|^{p-1} \leq \|u\|_p\|v\|_q = \|x\|_p \left(\sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$ $\quad ((p-1)q=p)$

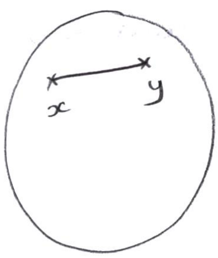
$$\leq \|x\|_p \|x+y\|_p^{p/q}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_q)\|x+y\|_p^{p/q}$$

si $x+y=0$: inégalité vraie

si $x+y\neq 0$: on divise par $\|x+y\|_p^{p/q}$: $p-\dfrac{p}{q}=1$.

Remarque : $\|\cdot\|$ satisfait l'inégalité triangulaire (sachant que l'homogénéité est satisfaite) équivaut à dire que les boules sont convexes.



$B(0,r)$ $\quad \lambda x+\mu y$ $\quad \lambda,\mu \geq 0$

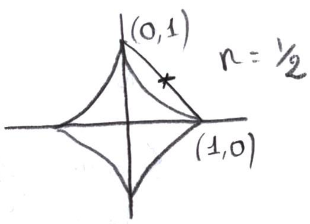
$\lambda+\mu=1$

$$\|\lambda x+\mu y\| \leq \lambda\|x\|+\mu\|y\| \leq \lambda r+\mu r = r$$

Inégalité triangulaire $\Rightarrow$ convexité

Convexité $\Rightarrow$ inégalité triangulaire

• si $0<p<1$ dans $\mathbb{R}^2$



$\|x\|_p$ n'est pas une norme

$x=(1,0)$ et $y=(0,1)$ milieu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ de norme $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{1/p} = \left(2^{1-p}\right)^{1/p} > 1$.

Espaces $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

X ensemble arbitraire

$$\ell^\infty(X, \mathbb{K}) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \text{ bornée} \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

C'est bien une norme sur $E = \ell^\infty(X, \mathbb{K})$

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ $\qquad f \longleftrightarrow (f_1, f_2, \dots, f_n)$

Espaces $\ell^p(X, \mathbb{K})$

$$\ell^p(X, \mathbb{K}) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \text{ tq } \|f\|_p = \left(\sum_{x \in X} |f(x)|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ $\qquad \ell^p(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$

$$f \longleftrightarrow (f_1, \dots, f_n)$$

Autres exemples usuels : $X = \mathbb{N}$ ou $X = \mathbb{Z}$.

Cas général : Il faut qu'il n'y ait qu'un sous-ensemble dénombrable

$S = \{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X$ sur lequel $f(x) \neq 0$.

$\sigma = \sum_{x \in X} |f(x)|^p < +\infty$, $S_k = \{x \in X, |f(x)| \geq 2^{-k}\}$ fini de card $\leq \sigma \cdot 2^k$

ie cv.

$S = \{x \in X, f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ dénombrable

C'est bien une norme : $\|f + g\|_p = \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty} |f(x_\nu) + g(x_\nu)|^p \right)^{1/p}$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{N} |f(x_\nu) + g(x_\nu)|^p \right)^{1/p}$$

Minkowski dim finie

$$\leq \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{N} |f(x_\nu)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=0}^{N} |g(x_\nu)|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Espaces intervenant en théorie de l'intégration

$$E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}) \quad \text{fct cts } [a,b] \to \mathbb{K}$$

Propriété fondamentale : Tte fct cts sur un intervalle fermé borné est intégrable au sens de Riemann.

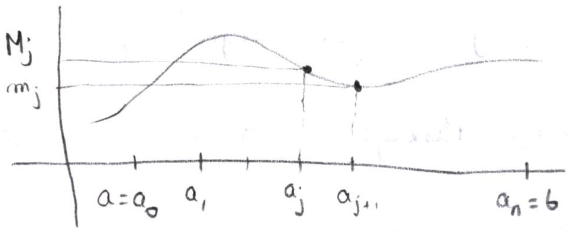
Rappel : $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $\quad f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est UC (Heine)

Fixons une précision $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0, \ \forall x, y \in [a,b] \ \begin{cases} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ \text{si } |x-y| < \delta \end{cases}$$

Prenons une subdivision de pas $a_{j+1} - a_j < \delta$, par exemple $R = \dfrac{b-a}{N} < \delta$.

$$\left. \begin{array}{l} m_j = \inf\limits_{x \in [a_j, a_{j+1}]} f(x) \\ \\ M_j = \sup\limits_{x \in [a_j, a_{j+1}]} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$



Encadrements par des fcts en escalier : $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$.

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j)(M_j - m_j) \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j)\, \varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

CQFD.

Norme L^p : $$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \lim_{\max(a_{j+1} - a_j) \to 0} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) |f(x_j)|^p \right)^{1/p}$$

somme de Riemann pour une subdivision $x_j \in [a_j, a_{j+1}]$

Minkowski $\Rightarrow \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

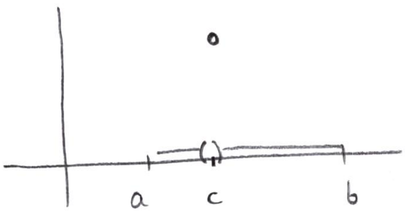
exercice

ℓ^p : norme avec $\sum$

L^p : norme avec $\int$

Séparation vraie car f continue.

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx = 0 \Rightarrow f = 0$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq c \\ 1 & \text{si } x = c \end{cases}$$

$\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur les fcts en escalier (séparation non satisfaite)

Inégalité de Hölder pour les intégrales

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \qquad \text{pour } p, q \in [1, +\infty] \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

et f, g cts (ou intégrables)

Démo: Passage à la limite sur les sommes de Riemann finies

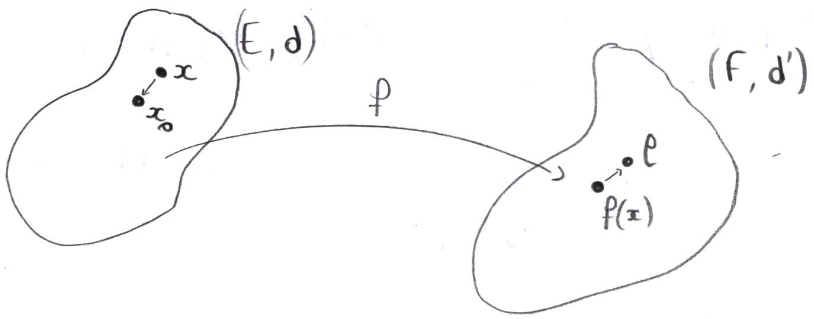
II/ Limites et continuité dans un espace métrique.

(E, d) espace métrique.

Limite en $x_0 \in E$:

$f : E \longrightarrow F \qquad (F, d')$ autre espace métrique

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in F \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon$$



Cas des espaces normés E ev $\|\cdot\|$

F ev $\|\cdot\|'$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|' < \varepsilon$$

Ceci à un sens dès que $f : \underbrace{B(x_0, r) \setminus \{x_0\}}_{\text{"boule pointée"}} \longrightarrow F$

<u>Définition</u> : $f : B(x_0, r) \longrightarrow F$ est dite cts en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(x_0, r), d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

<u>Composition de fct cts</u> :

$$\begin{array}{ccccc} B_d(x_0, r) & \xrightarrow{f} & B_{d'}(y_0, r') & \xrightarrow{g} & G \\ \cap & & \cap & & \\ (E, d) & & (F, d') & & d'' \end{array}$$

<u>Hyp</u> : $\left. \begin{array}{l} f \text{ cts en } x_0 \\ g \text{ cts en } y_0 = f(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f$ cts en x_0.

<u>Limite</u> : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\quad g : B_{d'}(\ell, r') \subset F, d' \to G$ supposé cts en ℓ

alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(\ell)$