Convergence normale :

Définition Une série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n(x)$ de fct $u_n : I \to \mathbb{C}$ est dite normalement convergente si la série numérique $\sum\limits_{n \geq n_0} \|u_n\|_\infty < +\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$

Théorème : CVN $\Rightarrow \begin{cases} \text{CVA} \\ \text{CVU} \end{cases}$

Démonstration : ($\Rightarrow$) $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty$

$\sum\limits_{n \geq n_0} |u_n(x)| \leq \sum\limits_{n \leq n_0} \|u_n\|_\infty < +\infty$ donc CVA

$R_n(x)$ reste d'ordre n de $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n(x)$.

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \|u_p\|_\infty = \rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc CVU}$$

⊗ $u_n :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. $\quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ "série de Riemann alternée"

• CVN ?? $\displaystyle \|u_n\|_\infty = \sup_{x\in]1,+\infty[} \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{\text{cts } \searrow} = \frac{1}{n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty = +\infty$ Donc pas CVN.

• $\displaystyle |u_n(x)| = \frac{1}{n^x} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty \quad \forall x \in]1,+\infty[$. Donc CVA

• Série alternée $\Rightarrow |R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$ premier terme "négligé"

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{Donc CVU.}$$

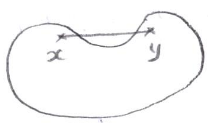
__Remarque :__ $\displaystyle \tilde{R}_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$ reste de $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} |u_n(x)|$

$$\geqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{x-1}}$$

$\|\tilde{R}_n\|_\infty = +\infty$ (donc pas CVN)

Fonctions convexes et concaves

E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.



$A \subset E$

$[x,y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \,;\ \lambda \in [0,1]\}$ segment de E

__Définition :__ • A partie convexe $\Leftrightarrow \forall x,y \in A,\ [x,y] \subset A$

• Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

(i) L'épigraphe $\Gamma_+(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ y \geqslant f(x)\}$ est convexe

(ii) $\forall x, x' \in I, \ \forall \lambda \in [0,1], \ f((1-\lambda)x + \lambda x') \leq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x)$

" les cordes sont au dessus du graphe ". On dit alors que f est convexe.

<u>Taux d'accroissement</u> : $\tau_f(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

<u>Exercice</u> : f convexe $\Leftrightarrow \forall x \in I \quad y \longmapsto \tau_f(x,y)$ croissant sur $]x, +\infty[\cap I$

$\Leftrightarrow \forall y \in I \quad x \longmapsto \tau_f(x,y)$ ———— $]-\infty, y] \cap I$

$\overset{\circ}{I}$ = intérieur de I

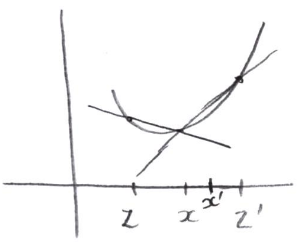
<u>Proposition</u> : Si f est convexe, les dérivées à droite et à gauche,

$$\left.\begin{array}{l} f'(x+0) = \displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ \\ f'(x-0) = \displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{array}\right) \text{existent}$$

Par exemple, $f'(x+0) = \inf \{ \tau_f(x,y), \ y > x \}$

↓ partie minorée par $\tau_f(z,x)$ avec $z < x$.

<u>Théorème</u> : Sur $\overset{\circ}{I}$, toute fct convexe est continue.



$\gamma x' + \delta \leq f(x') \leq \alpha x' + \beta$

cordes s'appuyant en x, z et x, z'.

<u>Théorème (admis)</u> : Sur un intervalle I ouvert, il y a équivalence entre

(i) f convexe

(ii) f cts et $x \longmapsto f'(x+0)$ croissante

(iii) f cts et $x \longmapsto f'(x-0)$ croissante

Concavité : f concave $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $-f$ convexe

$$\Longleftrightarrow \Gamma_-(f) = \{(x,y),\ y \leq f(x)\}$$

Condition : $f((1-\alpha)x + \alpha x') \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x') \quad \forall \alpha \in [0,1]$

Theoreme : Si f est deux fois dérivable : f convexe $\Leftrightarrow f'' > 0$

f concave $\Leftrightarrow f'' < 0$

Exemple :
- $f(x) = e^x$ $\quad f''(x) = e^x > 0$ donc f convexe
- $\underbrace{f(x) = \ln(x)}_{\text{sur } I =]0,+\infty[}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc f concave

Obtention d'inégalité par la convexité (ou la concavité)

Supposons f convexe sur I. $x_1, \ldots, x_n \in I$.

Coeff $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ $\quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Application : Inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique.

$\ln$ concave $\quad (x_1, \frac{1}{n}) \ldots (x_n, \frac{1}{n}) \quad \alpha_i = \frac{1}{n},\ x_i > 0$

$$\frac{1}{n}\ln x_1 + \ldots + \frac{1}{n}\ln x_n \leq \ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \ldots + \frac{1}{n}x_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\ln(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}_{\text{"moyenne géometrique"}} \leq \underbrace{\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)}_{\text{"moyenne arithmétique"}} \quad \text{par exponentielle}$$

Stricte concavité $\Rightarrow$ l'égalité n'a lieu que si $x_1 = \ldots = x_n$.

Plus generalement, $\prod x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum \alpha_i \ln x_i\right)$

$$\leq \sum \alpha_i \exp(\ln x_i) = \sum \alpha_i x_i$$

Chapitre 3 : Espaces vectoriels normés

I/ Définition : normes, distances

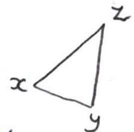
1) Distances

Soit E un ensemble. On appelle distance sur E une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) \geq 0$$

Satisfaisant les axiomes suivants :

- symétrie : $\forall x, y \in E$, $d(y,x) = d(x,y)$
- inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E$ $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



- séparation : $\forall x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\quad$ (ou $x \neq y \Leftrightarrow d(x,y) > 0$)

Espace métrique : (E, d) où d est une distance sur E.

Sous-espace métrique : $F \subset E$ $\quad d : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ restriction de la distance à $F \times F$, $d_{|F}$. $(F, d_{|F})$ est encore un espace métrique

2) Normes sur un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : On appelle norme sur E (norme réelle, resp complexe) une application :

$\|\bullet\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\quad$ tq :

$x \longrightarrow \|x\|$ " longueur du vecteur x "

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\quad$ (" homogénéité ")

(ii) $\forall x, y \in E, \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad$ (" inégalité triangulaire ")

(iii) $\forall x \in E, \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ $\quad$ (" séparation)

Distance associée à $\|\bullet\|$: $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\|$ $\quad$ (axiome (i) avec $\lambda = -1$)

- d est bien symétrique grâce à (i)
- inégalité triangulaire : $d(x,z) = \|z-x\| = \|(z-y)+(y-x)\| \leq \|z-y\| + \|y-x\|$

$$= d(z,y) + d(y,x)$$

- $d(x,y)=0 \iff \|x-y\|=0 \iff x-y=0_E \iff x=y$

<u>Exemples:</u>

- $E=\mathbb{K}^n$ Norme L^p $p\in[1,+\infty[$

$x=(x_1,\_\_\_,x_n)\in\mathbb{K}^n$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}$$

Quand $p\longrightarrow+\infty$ $\|x\|_p\xrightarrow[+\infty]{}\|x\|_\infty \underset{def}{=} \max|x_j|$

$|x_{j_0}|>$ autres. $\sum|x_j|^p=|x_{j_0}|^p\Big(1+\sum_{j\neq j_0}\underbrace{\left|\frac{x_j}{x_{j_0}}\right|^p}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0}\Big)$

$$\sim|x_{j_0}|^p$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p\right)^{1/p}\xrightarrow[p\to+\infty]{}|x_{j_0}|$$

si $\max|x_j|=|x_{j_1}|=\_\_\_=|x_{j_s}|=m$

$$\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p=s\,m^p\Big(1+\frac{1}{s}\sum_{j\neq j_k}\underbrace{\left|\frac{x_j}{m}\right|^p}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0}\Big)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p\right)^{1/p}=\underbrace{s^{1/p}}_{\to1}.\,m\,\underbrace{\big(\_\_\_\big)^{1/p}}_{\to1}\xrightarrow[p\to+\infty]{}m$$

<u>Définition</u>: Si (E,d) est un espace métrique.

Boule ouverte de centre x et de rayon $r\in\mathbb{R}_+$:

$$B(x,r)=\{y\in E,\ d(x,y)<r\}$$

Boule fermé de centre x et de rayon $r\in\mathbb{R}_+$:

$$B_f(x,r)=\{y\in E,\ d(x,y)\leq r\}$$

<u>Cas particulier</u>: $p=1,2,\infty$ $n=2$ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

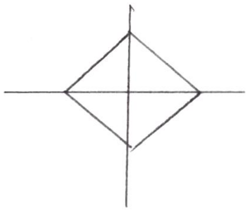
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

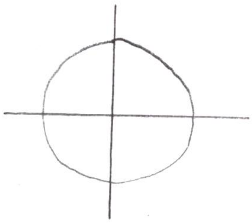
$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

Regardons les boules unités associées :

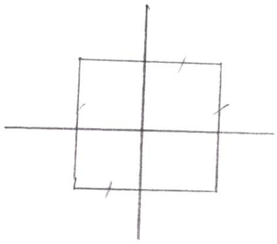
- $B(0,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ $\qquad |x_1| + |x_2| < 1$



- $B(0,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$



- $B(0,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$



Question : Est-ce que la $\|.\|_p$ est bien une norme ?

Réponse : Oui si $p \geq 1$

Non si $0 < p < 1$.