Critère de Cauchy uniforme

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fcts $I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente ssi $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall x\in I, \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_p(x)-u_q(x)|<\varepsilon$. "Critère de Cauchy uniforme".

Remarque: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplement convergente $\Leftrightarrow \forall x\in I\ (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

$\Leftrightarrow$ critère de Cauchy "ponctuel" : $\forall x\in I$, $\forall\varepsilon>0, \exists N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}, \forall p,q\in\mathbb{N}, p,q\geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow |u_p(x)-u_q(x)|<\varepsilon$.

Dans le critère de Cauchy uniforme, le rang N_ε ne doit pas dépendre de x.

Demo: 1) CV uniforme $\Rightarrow$ critère de Cauchy uniforme.

CV uniforme : $\exists\, u(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)\ \forall x\in I$. avec uniformité.

$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n(x)-u(x)|<\varepsilon$. Si je prends $p,q\geq N_\varepsilon$,

$|u_p(x)-u_q(x)| \leq |(u_p(x)-u(x))-(u_q(x)-u(x))| < 2\varepsilon \quad (N_\varepsilon \rightsquigarrow N_{\varepsilon/2})$

2) Supposons le critère de Cauchy uniforme satisfait. On sait d'après le critère de Cauchy appliqué en chaque $x\in I$ que $u(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)$ existe.

- $\mathbb{R}$ est complet
- $\mathbb{C}$ est complet

(u_n) de Cauchy dans $\mathbb{C} \Rightarrow (\mathrm{Re}\, u_n)$ et $(\mathrm{Im}\, u_n)$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

$|\mathrm{Re}\, u_p - \mathrm{Re}\, u_q| = |\mathrm{Re}\,(u_p-u_q)| \leq |u_p-u_q|$.

$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall p,q\in\mathbb{N}, p,q\geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_p(x)-u_q(x)|<\varepsilon$.

Fixons $p=n\geq N_\varepsilon$ et prenons $q\to+\infty$ à la limite on a $|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon$

Séries de fonctions

$\sum\limits_{n\geq n_0} u_n(x) \qquad u_n : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Suite des sommes partielles : $S_n(x) = u_{n_0}(x)+u_{n_1}(x)+ \cdots + u_n(x)$

Définition: La série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n(x)$ cv simplement (resp. uniformément) si la ponctuellement

suite de fct $(S_n(x))_{n\geq n_0}$ cv simplement (resp. uniformément) vers une limite
ponctuellement

$S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Notation: $S(x) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n(x)$

Reste d'ordre n: $R_n(x) \underset{def}{=} S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p(x)$. (on suppose la convergence).

Etant donné $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. "Norme L^∞" ou "norme ∞".

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)| = \sup \{ |f(x)| ; x \in I \} \in [0, +\infty]$.

f bornée ssi $\|f\|_\infty < +\infty$

Proposition: $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n(x)$ CV unif $\Leftrightarrow \|S - S_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Corollaire: Si $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n(x)$ CV unif, alors $u_n \xrightarrow[\text{CV unif}]{} 0$, cad $\|u_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\not\Leftarrow$
Faux!

Demonstration: • $u_n = R_{n-1} - R_n$

$$\|u_n\|_\infty \leq \|R_{n-1}\|_\infty + \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

• Réciproque fausse, déjà pour les séries numériques.

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergente bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Série géométrique

$\sum\limits_{n\geq n_0} x^n$ $\quad x \in]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$

$|x| < 1$ dans $\mathbb{C}$

$S_n(x) = x^{n_0} + \text{—} + x^n = x^{n_0}(1 + \text{—} + x^{n-n_0}) = x^{n_0} \dfrac{1 - x^{n-n_0+1}}{1 - x}$. CV ssi

$|x| < 1$. Et alors $S(x) = \dfrac{x^{n_0}}{1-x}$

A-t-on CV uniforme sur $]-1,1[$?

A-t-on déjà $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ uniformément sur $]-1,1[$?

$|x^n| < \varepsilon < 1 \iff n \log|x| < \log \varepsilon \iff n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log |x|}$ $\qquad N_{\varepsilon,x} = E\left(\dfrac{\log \varepsilon}{\log|x|}\right) + 1$

$x \to 1-0 \qquad N_{\varepsilon,x} \longrightarrow +\infty$

En revanche, on a CV uniforme sur tout intervalle $[-1+\delta, 1-\delta]$ dans $\mathbb{R}$, $\delta > 0$

sur tout disque $D(0, 1-\delta) = \{x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1-\delta\}$

$$S(x) - S_n(x) = \frac{x^{n_0} \cdot x^{n-n_0+1}}{1-x} = \boxed{\frac{x^{n+1}}{1-x} = R_n(x)}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{(1-\delta)^{n+1}}{\delta} \Rightarrow \|R_n\|_\infty \leq \frac{(1-\delta)^{n+1}}{\delta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Une série est dite <u>absolument convergente</u> si $\sum_{n \geq n_0} |u_n(x)|$ est convergente.

<u>Théorème</u>: Dans un corps complet ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tte série absolument cv est cv. et si $\sum |u_n|$ cv unif alors $\sum u_n$ cv unif.

<u>Démo</u>: $\sum_{n\geq n_0} u_n \qquad S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$

$\sum_{n \geq n_0} |u_n| \qquad \sigma_n = |u_{n_0}| + |u_{n_0+1}| + \cdots + |u_n|$

Critère de Cauchy uniforme : on regarde $\|S_p - S_q\|_\infty$ (avec disons $p > q$).

? $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \cdot p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|S_p - S_q\|_\infty < \varepsilon$

$\|S_p - S_q\|_\infty = \|u_{q+1} + \cdots + u_{p-1} + u_p\|_\infty \leq \||u_{q+1}| + \cdots + |u_{p-1}| + |u_p|\|_\infty$

$= \|\sigma_p - \sigma_q\|_\infty$

<u>Séries alternées</u>

$$\sum_{n \geq n_0} (-1)^n a_n(x)$$

<u>Hypothèse</u>: (i) $(a_n(x))$ suite ≥ 0 décroissante

(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n(x) = 0$ simplement (resp uniformément)

Alors $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n a_n(x)$ CVS (resp. CVU).

Démonstration : $S_{2n} = (-1)^{n_0} a_{n_0} + \text{———} + \underbrace{(-a_{2n-1}) + (a_{2n})}_{= - a_{2n+1}}$

$S_{2n+1} =$ ———

$S_{2n+1} \leq S_{2n}$

$S_{2n} = S_{2n-2} - \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0} \leq S_{2n-2}$ $\quad S_{2n} \searrow$

$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (\underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0}) \geq S_{2n-1}$ $\quad S_{2n+1} \nearrow$

$\forall x \in I, \ (S_{2n}(x))(S_{2n+1}(x))$ suites adjacentes $\Rightarrow S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$ existe

$S_{2n+1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x)$

écart $a_{2n+1}(x)$

$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ du signe de $(-1)^{n+1}$

$|R_n(x)| \leq a_{n+1}(x) \Rightarrow \|R_n\|_\infty \leq \|a_{n+1}\|_\infty$

Critère d'Abel uniforme

$\sum_{n \geq n_0} a_n(x) b_n(x)$

Hypothèse : (i) $a_n(x) \geq 0$ suite $\searrow$

(ii) $\lim_{n \to +\infty} a_n(x) = 0$ simplement (resp uniformément)

(iii) $B_n(x) = b_{n_0}(x) + \text{———} + b_n(x)$ suite bornée (resp uniformement bornée)

$|B_n(x)| \leq M(x)$

alors il y a CV simple (resp CV uniforme)

Démonstration : Critère de Cauchy $p > q$

$S_p - S_q = a_{q+1} b_{q+1} + \text{———} + a_p b_p$

$$= a_{p+1}\left(B_{q+1} - B_q\right) + \text{———} + a_p\left(B_q - B_{p-1}\right)$$

$$= -B_q\, a_{q+1} + B_{q+1}\left(a_{q+1} - a_{q+2}\right) + \text{———} + B_{p-1}\left(a_{p-1} - a_p\right) + a_p B_p$$

$$|S_p - S_q| \leq M\left(a_{q+1} + \left(a_{p+1} - a_{q+2}\right) + \text{———} + \left(a_{p-1} - a_p\right) + a_p\right) = 2M\, a_{q+1}.$$

<u>Exemple:</u> La série de Fourier généralisée

$$\sum_{n \geq n_0} a_n(x)\, e^{inx} \qquad a_n(x) \searrow 0 \text{ uniformément}$$

$$b_n(x) = e^{inx} \qquad B_n(x) = e^{in_0 x} \times \frac{1 - e^{i(n - n_0 + 1)x}}{1 - e^{ix}}$$

$$|B_n(x)| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = M(x)$$

$\Rightarrow$ CVU sur tout intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$ modulo $2k\pi$

Monotonie et convexité

<u>Théorème:</u> Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cts strictement monotone, alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f : I \longrightarrow J$ bijective et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue.

<u>Cas des fonctions croissantes</u> : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante

$$f(x+0) = \lim_{x' \to x+0} f(x') \qquad \text{limite à droite}$$

$$f(x-0) = \lim_{x' \to x-0} f(x') \qquad \text{limite à gauche}$$

$$S_x^+ = \{f(x'),\ x' \in I,\ x' > x\} \quad \text{minorée par } f(x)$$

$$f(x+0) = \inf S_x^+$$

$$S_x^- = \{f(x'),\ x' \in I,\ x' < x\}$$

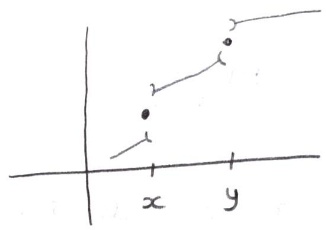
$$f(x-0) = \inf S_x^-$$

$$f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0).$$

Saut $\sigma(x) = f(x+0) - f(x-0) \geq 0$.

f cts en $x \Leftrightarrow \sigma(x) = 0$.

$D = \{x \in I, \sigma(x) > 0\}$ pts de discontinuité.



Intervalle de saut en x $\quad]f(x-0), f(x+0)[= J_x$ (vide si x pts de continuité)

$(J_x)_{x \in D}$ intervalle ouverts disjoints. Chacun des J_x contients un rationnel

$r(x) \in \mathbb{Q}$. $\quad D \xhookrightarrow{\text{inj}} \mathbb{Q}$

$\qquad x \longmapsto r(x)$

<u>Corollaire</u>: L'ensemble D des pts de discontinuité d'une fct $\nearrow$ (ou + generalement d'une fct monotone) est au plus dénombrable

<u>Remarque supplémentaire</u>: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\nearrow$

$$\sum_{x \in D} \sigma(x) \leq f(b) - f(a)$$

$\Rightarrow (\sigma(x_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad \forall$ ordre choisi