Déf: On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si

(*) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

À comparer avec : f continue sur I

(**) $\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Remarque: On peut intervertir des $\forall$ entre eux ou des $\exists$ entre eux mais pas de $\forall$ et $\exists$.

Exple: $f(x) = x^2$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f continue sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément continue.

($\delta_{\varepsilon, x_0}$ ne peut pas être choisi indépendant de x_0)

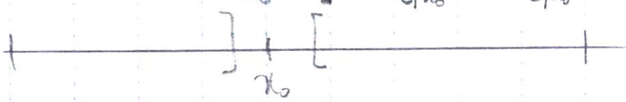
Observation immédiate : f uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ continue sur I.

Théorème de Heine : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ fermé borné. Alors f est uniformément continue

Dem : ① Par Borel-Lebesgue

$J_{x_0} =]x_0 - \delta_{\varepsilon, x_0} ; x_0 + \delta_{\varepsilon, x_0}[$

$I = [a,b]$ (**) satisfaite.



Sur J_{x_0} on a $\forall x \in J_0 \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\forall x, x' \in J_0 \quad |f(x') - f(x)| = |(f(x') - f(x_0)) - (f(x) - f(x_0))|$$
$$< 2\varepsilon$$

$(J_{x_0})_{x_0 \in I}$ recouvrent $I = [a,b]$

$\exists \theta > 0$ tel que $\forall J \subset I$, $\text{long}(J) < \theta \Rightarrow J$ contenu dans l'un des J_{x_0} (cste de Lebesgue)

$\forall x, x' \in I$ si $|x' - x| < \theta$ alors $\exists x_0 \in I$ tq $[x, x'] \subset J_{x_0} \Rightarrow |f(x') - f(x)| < 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \left(J_{x_0} =]x_0 - \delta_{\varepsilon, x_0}, x_0 + \delta_{\varepsilon, x_0}[\right)_{x_0 \in I} \rightsquigarrow \theta_\varepsilon$

(dépend de ε)

Ceci démontre l'uniforme continuité.

② Par contradiction en utilisant Bolzano-Weirstrass

Supposons la négation de (*)

non$(\forall x \quad P(x))$: $\exists x \quad$ non $P(x)$

non$(\exists x \quad P(x))$: $\forall x \quad$ non $P(x)$

non(*) : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x, x_0 \in I$, $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ fixé

On prend $\delta = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\exists\, x_n, x_{n,0}$ tq $|x_n - x_{n,0}| < 2^{-n}$ et $\underbrace{|f(x_n) - f(x_{n,0})| \geq \varepsilon}_{(\Delta)}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $[a,b]$

Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ $\exists$ sous-suite (x_{s_n}) tq $\lim\limits_{k\to\infty} x_{s_k} = c \in [a,b]$

On a aussi $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{s_k,0} = c \in [a,b]$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} |f(x_{s_k}) - f(x_{s_k,0})| = |f(c) - f(c)| = 0 \text{ par continuité}$$

au point c.

Contradiction avec (Δ) ■

Corollaire 1 : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$ où

$m = \inf f([a,b]) = \min f([a,b]) = f(c)$, $c \in [a,b]$

$M = \sup f([a,b]) = \max f([a,b]) = f(d)$, $d \in [a,b]$

Dem : 1ère étape : $J = f([a,b])$ est un intervalle (connu) borné

Heine : f est uniformément continue

$\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, $\forall x, x' \in [a,b]$ $|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < 1$

Prenons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} < \delta$

$a_k = a + k\frac{b-a}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$

$x \in [a_k, a_{k+1}]$ $|x - x'| \leq \frac{b-a}{N} < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(a_k)| \leq 1$

$x' = a_k$ $\Rightarrow |f(x)| \leq |f(a_k)| + 1$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq \max |f(a_k)| + 1$

Conclusion $J = |m, M|$ où $m = \inf J > -\infty$

$M = \sup J < +\infty$

2ème étape : J fermé $m, M \in J$

Supposons M pas atteinte : $\forall x \in [a,b]\ f(x) < M$

Considérons $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ dénominateur > 0

g continue sur $[a,b] \underset{\text{étape 1}}{\Longrightarrow} g$ bornée

$\exists A > 0$ tel que $0 < g(x) \leqslant A$

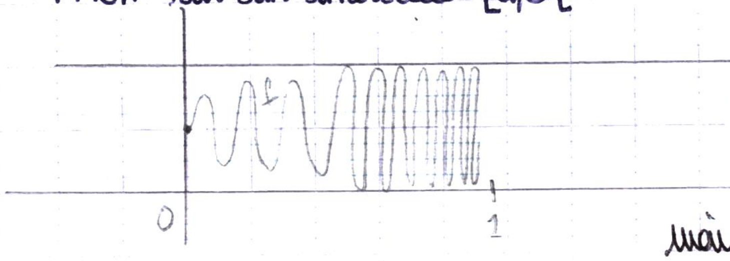
$\dfrac{1}{M - f(x)} \leqslant A$

$\Rightarrow f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{A}$

$\Rightarrow M - \dfrac{1}{A}$ majorant, CONTRADICTION ■

idem avec m.

FAUX sur un intervalle $[a,b[$



$\forall f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$\forall \alpha > 0 \quad f|_{[0,1-\alpha]}$ unif. continue

mais pas uniformément continue sur $[0,1[$.

$f([0,1[) =]0,1[\qquad m = 0,\ M = 1$ pas atteints.

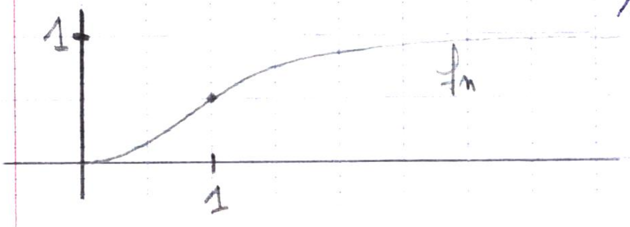
$g(x) = \dfrac{1}{1 - f(x)}$ continue mais non bornée.

Suites et séries de fonctions

Observation

Considérons $f_n : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{x^n}{1 + x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$



f_n continue sur $[0;+\infty[$ (et ici uniformément continue)

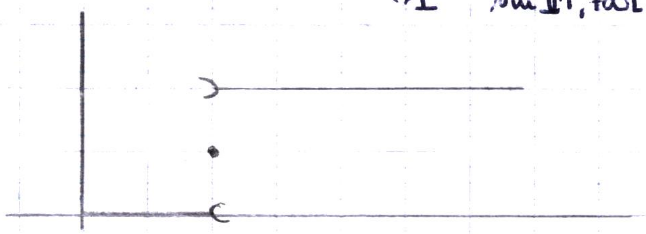
$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$?

$x\in[0,1[$ $\quad x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x\in]1,+\infty[$ $\quad x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$x=1$ $\quad f_n(1)=\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0,1[\\ 1/2 & \text{en } x=1 \\ 1 & \text{sur }]1;+\infty[\end{cases}$$



La limite "simple" $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ d'une suite de fct's continues peut ne pas être continue.

Def: On dit que la suite (f_n) CV simplement vers f sur un intervalle I si $\forall x\in I$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Convergence uniforme

Def: Les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon, \forall x\in I, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

(2) Ecart entre f et f_n : $\theta_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)|$ est tel que $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$

Alors on dit que (f_n) CV uniformément vers f.

Expression de la cv simple en terme de quantificateurs

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2)

$>0,$ $\theta_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$

donc $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\theta_n| < \varepsilon$

$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Théorème: Si $f_n : I \to \mathbb{R}$ fonctions continues et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv uniformément vers f, alors f est continue.

Dem: Fixons $\varepsilon > 0$, $x_0 \in I$

cv uniforme $\exists N_\varepsilon, \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \\ \forall x \in I \end{cases} n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Choisissons $n = N_\varepsilon$

f_n continue en x_0

$\exists \delta_\varepsilon$ tq $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \text{ si } |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

Exemple: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ $x \in [-1;1]$

$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ limite simple.

Ecart $0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \dfrac{(x^2 + \frac{1}{n^2}) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \dfrac{1/n^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| \right| \underset{\substack{\text{atteint}\\ \text{en } x=0}}{=} \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

cv uniforme.

f_n dérivable, même $\mathcal{C}^\infty$

mais $f(x) = |x|$ est bien continue mais pas dérivable.

La dérivabilité ne passe pas à la limite uniforme.