Chapitre 2 : Fonctions de variable réelle

Intervalles et théorème de Borel-Lebesgue

Intervalles dans un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$

$[a,b] = \{x \in E \text{ tq } a \leqslant x \leqslant b\}$

"intervalle fermé" ou "segment"

$]a,b[= \{x \in E \text{ tq } a < x < b\}$ "intervalle ouvert"

"semi-ouverts" $[a,b[$; $]a,b]$

On utilise ceci dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

$\underbrace{[a;+\infty[}$ $= [a;+\infty] \cap \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$

pas fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$ mais on considère qu'il est fermé dans $\mathbb{R}$!

Caractérisation des intervalles

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ssi $\forall a,b \in S$ on a $[a,b] \subset S$

Dem : • Tout intervalle $S = I \subset \mathbb{R}$ a bien cette propriété

• Supposons $\forall a,b \in S$ on a $[a,b] \in S$

Posons $m = \inf S$ $m \in [-\infty ; +\infty[$

$M = \sup S$ $M \in]-\infty ; +\infty]$

Montrons $]m,M[\subset S$

Prenons $x \in]m,M[$

$x > m$ = plus grand des minorants

donc x n'est pas un minorant

$\Rightarrow \exists a \in S$ tq $a < x$

De même $x < M$ $\Rightarrow$ x n'est pas un majorant

$\Rightarrow \exists b \in S$ tq $x < b$.

$a,b \in S \Rightarrow [a,b] \subset S$

$\overset{\text{hyp}}{\Rightarrow} x \in [a,b] \subset S$

Par conséquent $]m,M[\subset S$

4 possibilités : $]m,M[$, $[m,M]$, $]m,M]$, $[m,M[$

Rem: Le raisonnement fonctionne dans tout ensemble totalement ordonné où les bornes sup et inf existent toujours

Théorème de Borel-Lebesgue ($\simeq 1900$)

Considérons un segment $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ (intervalle fermé borné)

On suppose que I est recouvert par une famille d'intervalles ouverts $J_\alpha =]c_\alpha, d_\alpha[$, $\alpha \in E$ càd $I \subset \bigcup_{\alpha \in E} J_\alpha$

partie finie d'indices

Alors on peut extraire un recouvrement fini $I \subset \bigcup_{\alpha \in F} J_\alpha$, F finie $\subset E$

- ⚠ Faux si I non borné.

$I = [0;+\infty[$ $\quad J_\alpha =]\alpha-1, \alpha+1[$ $\quad \alpha \in \mathbb{N}$

- Faux si I n'est pas fermé

$I =]0,1]$ $\quad J_\alpha =]2^{-\alpha-1}, 2^{-\alpha+1}[$ $\quad \alpha \in \mathbb{N}$

$J_0 =]\frac{1}{2}; 2[$ $\quad J_1 =]\frac{1}{4}, 1[$ $\quad J_2 =]\frac{1}{8}; \frac{1}{2}[$

$I \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} J_\alpha$ mais on ne peut enlever aucun J_α !

Dem: par dichotomie et par contradiction

$I = I_1 \cup I_2$ $\quad I_1 = [a; \frac{a+b}{2}]$, $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$

Si on pouvait recouvrir I_1 et I_2 chacun par une famille finie F_1 pour I_1, F_2 pour I_2 $\bigcup_{\alpha \in F_1 \cup F_2} J_\alpha$ recouvrirait $I_1 \cup I_2 = I$

$\Rightarrow$ L'un des sous-intervalle I_{k_1} $k_1 = 1$ ou 2 ne peut être recouvert par une famille finie.

$I_{k_1} = I_{k_1 1} \cup I_{k_1 2}$ on recoupe en 2

$\Rightarrow$ $\exists$ sous-intervalle $I_{k_1 k_2}$ $k_2 = 1$ ou 2 qui ne peut être recouvert.

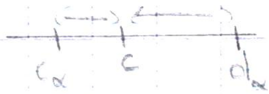
m raisonnement

...

Récurrence $I_{k_1 k_2 \dots k_n}$ $k_n = 1$ ou 2
de longueur $2^{-m}(b-a)$

Thm des segments emboîtés $\Rightarrow \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} I_{k_1k_2\dots k_m} = \{c\} \in [a,b]$

$c \in J_\alpha =]c_\alpha, d_\alpha[$

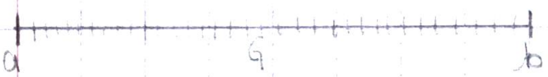


Prenons $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $2^{-m}(b-a) < \min(c-c_\alpha, d_\alpha - c)$
$\Rightarrow I_{k_1k_2\dots k_m} \subset]c_\alpha, d_\alpha[= J_\alpha$
recouvert par un seul J_α : contradiction !

Constante de Lebesgue d'un recouvrement $I \subset \bigcup_{\alpha\in E} J_\alpha$ d'un segment $I = [a,b]$:

$\exists$ réel $\theta > 0$ tel que $\forall J \subset I$ tel que $\mathrm{long}(J) \leq \theta$
alors $\exists \alpha \in E$ tq $J \subset J_\alpha$

__Dem:__ J'extrais un nombre fini $J_\alpha =]c_\alpha, d_\alpha[$, $\alpha\in F$, par recouvrement



$G = I \cap \{c_\alpha, d_\alpha\}_{\alpha\in F}$
Tout $\theta <$ distance minimale des points de G convient

__Limites et continuité__

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalle

__Def:__ Si $x_0 \in \overline{I}$ = "fermeture de I" $\underset{\text{def}}{=} I \cup \{$bornes dans $\overline{\mathbb{R}}\}$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si

- cas $x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ tel que $\left.\begin{matrix} x \in I \\ 0 < |x - x_0| < \delta_{\varepsilon,x_0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

(On ne regarde pas ce que fait $f(x_0)$)

- $x_0 = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > 0$ tq $\underset{x \in I}{x > A} \Rightarrow \dots$ a faire soi-même

- cas $l = +\infty, -\infty$ écriture ad hoc ?

Continuité : ici on suppose $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ f continue en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \in I \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0) \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} x \in I \\ |x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Composition des fonctions continues

$$\underset{x_0}{I} \xrightarrow{f} \underset{f(x_0)}{J} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ continue en } x_0.$$

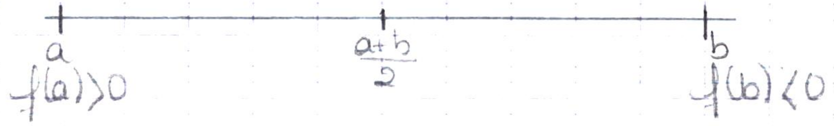
Théorème des valeurs intermédiaires

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Supposons $f(a)f(b) < 0$

Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$

Dem : Dichotomie



On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = v$

- Si $v = 0$ $c = \frac{a+b}{2}$ convient
- Si $v \neq 0$ on garde le sous-intervalle sur lequel il y a changement de signe aux extrémités

Si on ne tombe jamais sur 0, on construit une suite de segments emboîtés $[c_k, d_k]$ de longueur $d_k - c_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$ avec $f(c_k)f(d_k) < 0$

Suites adjacentes $c = \lim\limits_{k \to \infty} c_k = \lim\limits_{k \to \infty} d_k$

$$\underbrace{\lim_{k \to \infty} f(c_k)f(d_k)}_{\substack{\shortparallel \\ f(c)^2 \text{ par continuité}}} \leqslant 0$$

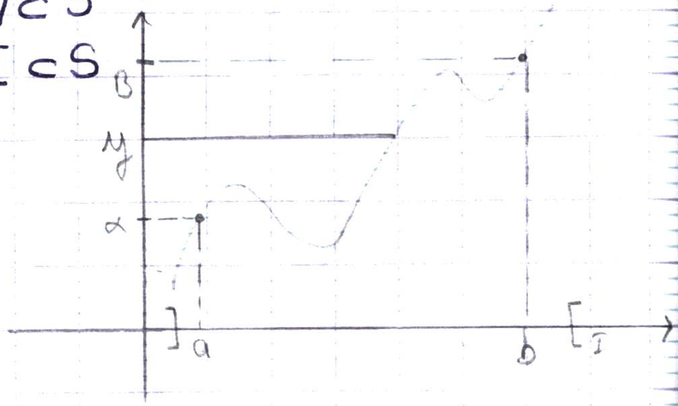
$f(c)^2 \leqslant 0 \Rightarrow f(c) = 0$. ■

<u>Théorème</u>: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle

<u>Dem</u>: Posons $S = f(I)$

Prenons $\alpha, \beta \in S$: a-t-on $[\alpha, \beta] \subset S$

$\iff]\alpha, \beta[\subset S$



Supposons $\alpha < \beta$

$\exists a \in I$ tq $f(a) = \alpha$

$\exists b \in I$ tq $f(b) = \beta$

Prenons $y \in]\alpha, \beta[$

$g(x) = f(x) - y$

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - y = \alpha - y < 0 \\ g(b) = f(b) - y = \beta - y > 0 \end{cases}$$

$\exists c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0 \iff f(c) = y$

donc $y \in f(I) \Rightarrow]\alpha, \beta[\subset S = f(I)$

Attention l'image d'un intervalle ouvert peut être un intervalle fermé.

$\sin(]0, 4\pi[) = [-1; 1]$

$f(x) = \sin x \times \frac{x^2}{1+x^2}$ $\qquad$ $f(\mathbb{R}) =]-1; 1[$

fermé $\qquad$ ouvert

Continuité uniforme

$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

$\varepsilon > 0 \quad x = x_0 + h$ voisin de x_0

On veut savoir quand $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$x^2 - x_0^2 = (x_0+h)^2 - x_0^2$$
$$= 2hx_0 + h^2$$

On veut $|2hx_0 + h^2| < \varepsilon$

Supposons $x_0 > 0$

Prenons de toute façon $\delta \leqslant 1$

$|x - x_0| = |h| < \delta \Rightarrow |2x_0 h + h^2| < (2|x_0| + 1)\delta$

$(h^2 < \delta^2 \leqslant \delta)$

Il <u>suffit</u> de prendre $\delta_{\varepsilon, x_0} = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right)$

Il <u>faut</u> nécessairement $\delta_{\varepsilon, x_0} < \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|}$ si $\underbrace{\delta = \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|}}$ $h \to \delta$

$2x_0 h + h^2 \to 2x_0\delta + \delta^2 = \varepsilon + \delta^2$ trop grand

<u>Observation</u> : Quand $x_0 \to +\infty$ on est obligé de prendre $\delta_{\varepsilon, x_0}$ de plus en plus petit.

On dit que la fonction n'est pas uniformément continue. $\delta_{\varepsilon, x_0}$ dépend nécessairement de x_0.