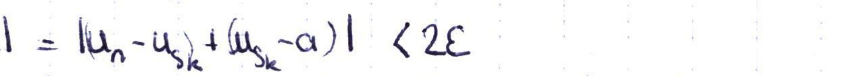
Propriété 1: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un corps ordonné $(K,+,\times,\leqslant)$. Alors la suite (u_n) est bornée.

Dem: Prenons $\varepsilon = 1$ alors $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $p,q \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_q| \leqslant 1$
Pour $p=N$, $q=n\geqslant N$ $|u_n - u_N| \leqslant 1 \Rightarrow |u_n| = |u_N| + 1$
On en déduis : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N|+1) = M$
d'où majorant M

Propriété 2: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $(K,+,\times,\leqslant)$.
Supposons: (a) (u_n) de Cauchy
(b) (u_n) possède une valeur d'adhérence $a\in K$
Alors (u_n) est CV et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Dem:
(a) $(\forall\varepsilon>0)$ $\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $p,q\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$
(b) $\exists$ sous-suite (u_{s_k}) avec $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{s_k} = a$
$(\forall\varepsilon>0)$ $\exists K_\varepsilon$ tq $k\geqslant K_\varepsilon \Rightarrow |u_{s_k} - a| < \varepsilon$



Prenons $n\geqslant N_\varepsilon$ $k = \max(N_\varepsilon, K_\varepsilon)$
Alors $s_k \geqslant k \geqslant K_\varepsilon \Rightarrow |u_{s_k} - a| < \varepsilon$ (b)
$\left.\begin{array}{l} s_k \geqslant k \geqslant N_\varepsilon \\ n \geqslant N_\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |u_{s_k} - u_n| < \varepsilon$ (a)
$|u_n - a| = |(u_n - u_{s_k}) + (u_{s_k} - a)| < 2\varepsilon$
On a montré $n\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - a| < 2\varepsilon$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ ∎

Théorème : $\mathbb{R}$ est complet : toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est cv

Dem : Soit (u_n) suite de Cauchy
- Alors (u_n) est bornée (propriété 1)

Bolzano - Weierstrass $\Rightarrow$ (u_n) possède une v.a., par ex $a = \limsup_{n\to\infty} u_n$
- Propté 2 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = a$.

Théorème : (1) $\mathbb{R}$ est un corps archimédien complet

(2) Réciproquement tout corps ordonné $(K, +, \times, \leq)$ archimédien et complet est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Dem : (1) Déjà vu

(2) Soit $(K, +, \times, \leq)$ corps archimédien complet

déjà vu : archimédien $\Rightarrow \exists\, K \xhookrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ homomorphisme injectif

on considère $K \subset \mathbb{R}$ sous-corps, $K \supset \mathbb{Q}$

Prenons $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = \lim_{n\to+\infty} x_{[\leq n]}$ $\quad x_{[\leq n]} \in \mathbb{Q} \subset K$

$(x_{[\leq n]})$ suite de Cauchy dans K

$\Rightarrow$ la limite est dans K donc $x \in K$

$\Rightarrow K = \mathbb{R}$

Cardinaux, cardinaux infinis

- Ensembles finis

$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ distincts

$n = \operatorname{card} E$.

- Ensembles infinis

Déf: • On dit (en général) que deux ensembles E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $\varphi : E \to F$

• On dit que $\mathrm{card}\, E \leqslant \mathrm{card}\, F$ s'il existe une injection $\varphi : E \to F$.

Remarque: S'il existe une surjection $\psi : F \to E$ alors il existe une injection $\varphi : E \to F$ et donc $\mathrm{card}\, E \leqslant \mathrm{card}\, F$

$x \in E \rightsquigarrow \varphi(x) \in \psi^{-1}(x)$

"axiome du choix" — antécédents de x par ψ "au hasard"

Ceci fabrique une injection $\varphi : E \to F$.

Théorème de Cantor-Bernstein

S'il existe une injection $\varphi_1 : E \to F$

une injection $\varphi_2 : F \to E$

alors $\exists$ bijection $\psi : E \to F$ donc $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$

ensemble $E \rightsquigarrow \mathcal{P}(E)$ ensemble des parties de E

$A \in \mathcal{P}(E)$ $\quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \xrightarrow{\Psi} & \{0,1\}^E \\ A & \underset{\text{bijection}}{\longmapsto} & (\chi_A(x))_{x \in E} \end{array}$$

$\mathrm{card}\, \mathcal{P}(E) = \mathrm{card}\, \{0,1\}^E$

$E^F \underset{\text{déf}}{=} \{\text{applications } F \xrightarrow{u} E\} = (u(x))_{x \in F} \quad u(x) \in E$

$\mathrm{card}\, E^{\mathrm{card}\, F} \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{card}\, E^F$ (que ce soit fini ou infini)

En particulier $\mathrm{card}\, \mathcal{P}(E) = 2^{\mathrm{card}\, E}$

Théorème (Cantor) : $\forall$ ensemble E

$$\mathrm{card}\, \mathcal{P}(E) > \mathrm{card}\, E$$
$$2^{\mathrm{card}\, E} > \mathrm{card}\, E$$

Dem : • $\mathrm{card}\, E \leqslant \mathrm{card}\, \mathcal{P}(E)$

$\exists \varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ injection

$x \longmapsto \{x\}$

• $\nexists$ bijection $\psi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

Supposons $\exists \psi : E \to \mathcal{P}(E)$ bijective

$x \longmapsto A = \psi(x)$

$C = \{x \in E \,;\, x \notin \psi(x)\}$

C n'a pas d'antécédent par ψ : supposons $C = \psi(x)$

si $x \in C$ alors $x \notin \psi(x) = C$ contradiction

si $x \notin C = \psi(x)$ alors $x \in C$ contradiction

Déf : $\aleph_0 = \mathrm{card}\, \mathbb{N}$ infini

Déf : Un ensemble E est dit dénombrable si

(1) $\exists \psi : \mathbb{N} \longrightarrow E$ surjection

$\Updownarrow$ "$\exists$ numérotation de E par les entiers"

(2) $\exists \varphi : E \longrightarrow \mathbb{N}$ injection

Deux cas : Un ensemble dénombrable est

• ou bien fini

• ou bien infini $S = \varphi(E) \subset \mathbb{N}$ infini

$= \{s_0 < s_1 < s_2 < \dots\}$

$$E \xrightarrow[\text{inj.}]{\varphi} S = \varphi(\mathbb{N}) \xleftarrow{\theta} \mathbb{N}$$

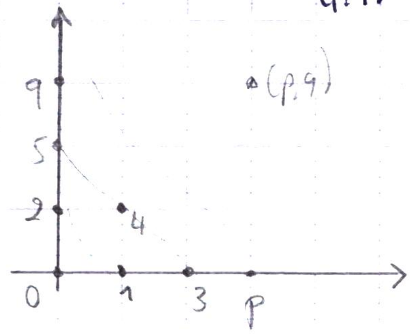
$$s_k \underset{\text{inj.}}{\longleftarrow\!\!\!\shortmid} k$$

$\psi = \varphi^{-1} \circ \theta : \mathbb{N} \longrightarrow E$ bij. donc surj.

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable (infini)

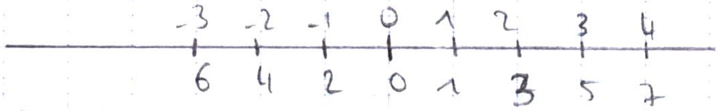
$\exists$ bijection $\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N}^2$ $\quad 7 \longrightarrow (3,1)$

(p,q)



$\mathbb{N}^3$ est aussi dénombrable

$\mathbb{Z}$ dénombrable



$\exists$ bij $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dénombrable

$\exists$ suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui couvre bijectivement les rationnels.

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \}$

$\exists$ surjection $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$

$(p,q) \longmapsto \frac{p}{q}$

pas bijectif : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$\text{card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) = \text{card}\,\mathbb{Z} \times \text{card}\,\mathbb{N}^* = \text{card}\,\mathbb{N} \times \text{card}\,\mathbb{N}$

$= \text{card}\,\mathbb{N}^2 = \text{card}\,\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$ surj. $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$ infini $\Rightarrow \exists$ bij $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

Théorème : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable !

$\text{card}\,\mathbb{R} > \text{card}\,\mathbb{N}$.

$\text{card}\,\mathbb{R} \geqslant \text{card}\,[0,1] > \text{card}\,\mathbb{N}$.

Dem: • $\text{card}\,[0,1] \geq \text{card}\,\mathbb{N}$: $\exists\ \mathbb{N} \xrightarrow{inj} [0,1]$

$n \longmapsto 2^{-n}$

• Supposons $[0,1]$ dénombrable donc en bijection avec $\mathbb{N}$

$[0,1] = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

en base 10 $\quad x_0 = 0{,}a_{00}\,a_{01} \dots a_{0p} \dots$ (dev impropres)

$\vdots$

$x_n = 0{,}a_{n0}\,a_{n1} \dots a_{np} \dots$

Prenons $y = 0{,}b_0 b_1 b_2 \dots$

avec $b_0 \neq 0, 9, a_{00}$ disons le minimum

$b_p \neq 0, 9, a_{pp} \Rightarrow y \neq x_p$

$y \in [0,1]$ et y diffère de tous les x_n

Contradiction

Théorème : $\text{card}\,\mathbb{R} = 2^{\text{card}\,\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$

Dem: • $\text{card}\,\mathbb{R} \geq 2^{\text{card}\,\mathbb{N}}$

suffit $\text{card}\,[0,1] \geq 2^{\text{card}\,\mathbb{N}}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow [0,1]$

$A \longmapsto x_A = 0{,}b_0 b_1 \dots b_p \dots$

$\begin{cases} b_p = 3 & \text{si } p \in A \\ b_p = 7 & \text{si } p \notin A \end{cases}$

• $\text{card}\,[0,1] \leq \text{card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\text{card}\,\mathbb{N}}$

$\exists \varphi \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{surj} [0,1]$

$A \longmapsto y_A = 0{,}b_0 b_1 \dots b_p \dots$ (base 2)

$\begin{cases} b_0 = 1 & \text{si } p \in A \\ b_1 = 0 & \text{si } p \notin A \end{cases}$

$0{,}00111111 \dots = 0{,}01000 \dots$ φ pas inj.

• $\text{card}\,\mathbb{R} \leq \text{card}\,]0,1[\leq \text{card}\,[0,1]$

$$\begin{array}{rcl}]0,1[& \xrightarrow{bij} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi\right) \end{array}$$ ■

__Remarque:__ $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ réunion dénombrable d'ensembles dénombrables E_n

alors E est dénombrable.

$\exists$ surj $\varphi_n : E_n \longrightarrow \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcccl} \exists\ \mathbb{N} & \xrightarrow{bij} & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ k & \longmapsto & (p,q) & \longmapsto & \underbrace{\varphi_p(q)}_{\text{comme } E_p \text{ quand } q \text{ varie}} \end{array}$$ ■

surj.