Droite réelle complétée

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$$

$(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ totalement ordonné

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$

Rq: Il existe une bijection strictement croissante (même plusieurs !)

$$\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\infty \longmapsto +1$$
$$-\infty \longmapsto -1$$

(autre choix possible: Arctan)

Propriété : $\forall A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $A \neq \emptyset$
$\exists \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$
$\exists \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$

(On se ramène de $\overline{\mathbb{R}}$ à $[-1,1]$ et on utilise les dév. décimaux)

Caractérisation de la borne sup

$$m = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \ x \leq m \\ \forall m' < m \ \exists x \in A \ m' < x \leq m \end{cases}$$

idem borne inf

Rq: On étend la notion de valeur d'adhérence à $\overline{\mathbb{R}}$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme v.a s'il existe une sous-suite (u_{φ_k}) qui converge vers $+\infty$
$\forall A \in \mathbb{R}, \forall N, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N$ tel que $u_n > A$

$$\lim u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

Ex: $u_n = n(1+(-1)^n)^n$

$$\begin{cases} u_{2n} = 4n \\ u_{2n+1} = 0 \end{cases}$$ $+\infty$ est une va mais n'est pas la limite.

Prop: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle (ou même dans $\overline{\mathbb{R}}$) alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ sont des valeurs d'adhérence

Dem: (par exple pour la limsup)

$l = \limsup_{n\to+\infty} u_n \underset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} v_n$ où $v_n = \sup_{i\geq n} u_i \in \overline{\mathbb{R}}$

(v_n) suite décroissante.

- Si (u_n) non majorée $\forall k\in\mathbb{N}$, k n'est pas un majorant donc

$\exists s_k \in \mathbb{N}$ tq $u_{s_k} > k$.

(On choisis par récurrence $s_k > s_{k-1}$)

On a bien $\lim_{k\to\infty} u_{s_k} = +\infty = \limsup_{n\to+\infty} u_n$

(on a $v_n = +\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$)

- Si (u_n) majorée, $u_n \leq M < +\infty$

$v_n \leq M$

Caractérisation de la borne sup

$\exists s_k \geq k \quad \underbrace{v_k - \frac{1}{2^k}}_{m'} < u_{s_k} \leq \underbrace{v_k = \sup_{n\geq k} u_n}_{m}$

$\lim_{k\to+\infty} u_{s_k} = \lim_{k\to+\infty} v_k = \limsup_{n\to+\infty} u_n$ ■

Prop: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle (ou dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Alors $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$

et pour toute va $a\in\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq a \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$

Dem: Il suffit de démontrer la deuxième affirmation

Prenons $a = \lim_{k\to+\infty} u_{s_k} \in \overline{\mathbb{R}}$ va.

$S = \{ s_0 < s_1 < \dots < s_k \} \subset \mathbb{N} \quad s_k \geq k.$

$u_{s_k} \leq v_k = \sup_{i \geq k} u_i$

$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} u_{s_k} \leq \lim_{k \to +\infty} v_k \underset{def}{=} \limsup_{n \to +\infty} u_n$

$u_{s_k} \geq w_k = \inf_{i \geq k} u_i \quad (i = s_k)$

$\lim_{k \to +\infty} u_{s_k} \geq \lim_{k \to +\infty} \nearrow w_k = \liminf_{n \to \infty} u_n$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

- Dans $\mathbb{R}$, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée possède au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$

$m \leq u_n \leq M \quad \Rightarrow m \leq \liminf_{n \to +\infty} u_n \leq \limsup_{n \to +\infty} u_n \leq M$

- Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a au moins une v.a. dans $\overline{\mathbb{R}}$

<u>Th:</u> $\lim_{n \to \infty} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$ existe $\Leftrightarrow \liminf_{n \to \infty} u_n = \limsup_{n \to \infty} u_n$

(et alors la limite est la valeur commune)

<u>Dem:</u> ($\Rightarrow$) Dans le cas où $\lim_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N_\varepsilon$ alors $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$

Ceci implique que toute limite de sous-suite (et toute v.a) $\in [l-\varepsilon ; l+\varepsilon]$

$\bigcap_{\varepsilon > 0} [l-\varepsilon ; l+\varepsilon] = \{l\} \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} u_n = \liminf_{n \to +\infty} u_n = l$

(R archimédien)

($\Leftarrow$) Supposons $\limsup_{n \to \infty} u_n = \liminf_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$

$\limsup_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \searrow v_n \quad v_n = \sup_{i \geq n} u_i$

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \nearrow w_n \qquad w_n = \inf_{i\geq n} u_i$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad n \geq N_1 \Rightarrow l-\varepsilon < v_n < l+\varepsilon$

$\qquad\qquad \exists N_2 \quad n \geq N_2 \Rightarrow l-\varepsilon < w_n < l+\varepsilon$

$N = \max(N_1, N_2) \quad n \geq N \Rightarrow l-\varepsilon < w_n \leq u_n \leq v_n < l+\varepsilon$.

donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ ■

Exemple: $u_n = \cos(n\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$

• Si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q} \qquad \theta = 2\pi \frac{p}{q} \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$, fraction irréductible

$n\theta = 2\pi \frac{np}{q}$ exactement les multiples entiers de $\frac{2\pi}{q}$ modulo 2π

$np = qp + r \qquad 0 \leq r \leq q-1$

Bezout $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} \quad ap + bq = 1$

$n = a \qquad 2\pi \frac{ap}{q} = 2\pi\left(\frac{1-bq}{q}\right) = \frac{2\pi}{q} - b.2\pi$

$n = ka \qquad 2\pi \frac{kap}{q} = 2\pi \frac{k}{q} - kb2\pi$

Suite (u_n) périodique de période q

Les va sont en nombre fini $= \cos 2\pi \frac{k}{q} \qquad 0 \leq k \leq q-1$

• $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\cos(n\theta) = \cos\left(2\pi.\ \mathrm{Frac}\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right)\right)$

$n\theta = n\frac{\theta}{2\pi} . 2\pi = \left(\underbrace{E\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right)}_{\in \mathbb{Z}} + \mathrm{Frac}\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) . 2\pi$

$\alpha = \frac{\theta}{2\pi}$ angle exprimé en tours

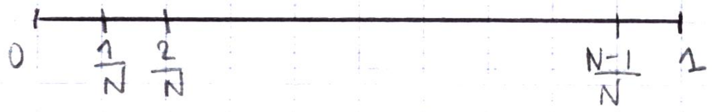
$\cos(n\theta) = \cos(2\pi.\ \mathrm{Frac}(n\alpha))$

$\mathrm{Frac}(n\alpha) \in [0,1[$ fraction de tour pour $n\theta$.

des pigeons

Lemme : $v_n = \mathrm{Frac}(n\alpha)$ est dense dans $[0,1]$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Dem : Prenons $N \in \mathbb{N}^*$



N sous-intervalles

Principe de Dirichlet (ou des "trous de pigeons")

$n = 0, 1, 2, \dots, N$ $\quad$ $(N+1)$ indices

$\exists n_1, n_2 \quad 0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant N$ tels que

$v_{n_1}, v_{n_2} \in$ même sous-intervalle $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$

$$\Rightarrow \left|\mathrm{Frac}(n_2\alpha) - \mathrm{Frac}(n_1\alpha)\right| \leqslant \frac{1}{N}$$

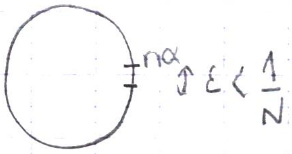
$$\Rightarrow \left|(n_2\alpha - E(n_2\alpha)) - (n_1\alpha - E(n_1\alpha))\right| \leqslant \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow \left|(n_2 - n_1)\alpha - p\right| \leqslant \frac{1}{N}$$

Posons $n = n_2 - n_1 \leqslant N$

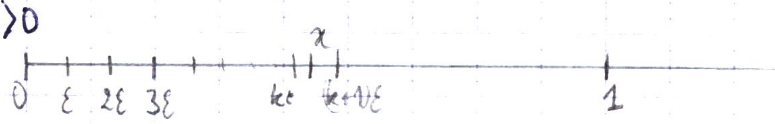
$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \leqslant N, \exists p \in \mathbb{Z} \quad 0 < |n\alpha - p| < \frac{1}{N}$

α irrationnel

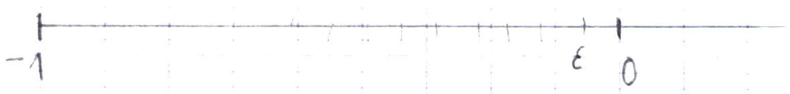


$\varepsilon = n\alpha - p$

- $\varepsilon > 0$



- $\varepsilon < 0$



Conséquence : Si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad u_n = \cos(n\theta)$ admet toute valeur $l \in [-1;1]$ comme valeur d'adhérence.

<u>Remarque:</u> Si $\alpha \in \mathbb{R}$

- Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ $\quad Frac(n\alpha)$ suite périodique
- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad Frac(n\alpha)$ dense dans $[0,1]$

Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$

Intuitivement, c'est une suite (u_n) dont les termes se rapprochent les uns des autres à l'infini.

<u>Def:</u> Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geqslant N$ alors $|u_p - u_q| < \varepsilon$

<u>Rem:</u> def valable aussi dans tout corps totalement ordonné.

<u>Th:</u> Dans un corps totalement ordonné $(K,+,\times,\leqslant)$ toute suite convergente est de Cauchy.

<u>Dem:</u> (u_n) cv : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geqslant N_\varepsilon, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$
$\exists l \in K$
Si on prend $p,q \geqslant N_\varepsilon$ alors $l - \varepsilon < u_p < l + \varepsilon$

$$l - \varepsilon < u_q < l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |u_p - u_q| < 2\varepsilon$$

donc $p,q \geqslant N_{\varepsilon/2} \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

<u>Réciproque fausse en général</u> (dans un corps K quelconque)

<u>Exple:</u> $K = \mathbb{Q}$
$u_n = (\sqrt{2})_{[\leqslant n]}$ $\quad$ suite de Cauchy.

$p,q \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_q| \leqslant 10^{-N}$
pas convergente dans $\mathbb{Q}$.

Th: Dans $\mathbb{R}$
(u_n) CV $\Longleftrightarrow$ (u_n) de Cauchy.

Déf: K est complet si toute suite de Cauchy dans K est convergente.