Corps ordonnés archimédiens

$(K, +, \times, \leqslant)$ Corps commutatif totalement ordonné

$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ (on considère $\mathbb{Q} \subset K$)

homomorphisme injectif

Thm et def : Il y a équivalence entre les propriétés suivantes.

(i) $\forall x \in K, \exists N \in \mathbb{N}, N \geqslant x$

(i') On appelle élément "infiniment grand" un $x \in K$ tel que $x > N, \forall N \in \mathbb{N}$

Il n'y en a pas !

(ii) $\forall x \in K$ tel que $x > 0$, $\exists r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $0 < r < x$

(on peut choisir $r = \frac{1}{N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, ou $r = 10^{-N}$ ...)

(ii') Pas d'élément "infiniment petit" par rapport aux rationnels

Si $x \in K_+$ vérifie $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, $x < \varepsilon$, alors $x = 0$

On dit alors que K est archimédien (si 1 des prop vérifiée)

Dem: (i) $\Leftrightarrow$ (i') (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') évident

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $x > 0$, $\frac{1}{x} \in K$, $\exists N \geqslant \frac{1}{x}$ donc $N+1 > \frac{1}{x}$ $(N+1) \neq 0$

donc $0 < \frac{1}{N+1} < x$ On prend $r = \frac{1}{N+1}$ ($\frac{1}{10^N}$ convient aussi)

(ii) $\Rightarrow$ (i) $x \in K$

Si $x \leqslant 0$ $N = 0$ convient

Si $x>0$ $\exists r \in \mathbb{Q}_+^*$ $r=\frac{p}{q}$ $p,q \in \mathbb{N}^*$ tel que $0<r=\frac{p}{q}<\frac{1}{x}$

(On applique (ii) à $\frac{1}{x}$)

$\Rightarrow 0<\frac{1}{q}<\frac{1}{x}$

$\Rightarrow q>x$ On peut prendre $N=q$

<u>Exemples:</u>

- $\mathbb{Q}$ est archimédien

  $\mathbb{R}$ est archimédien

  $x \in \mathbb{R}$ $N=E(x)+1$, on $N>x$

- Tout sous-corps $K \subset \mathbb{R}$ est archimédien

  $K=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\,;\, a,b \in \mathbb{Q}\}$

  $$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\underbrace{\frac{a}{a^2-2b^2}}_{\in \mathbb{Q}}+\underbrace{\frac{-b}{a^2-2b^2}}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

- $K=\mathbb{Q}(\varepsilon)=\{$fractions rationnelles $=\frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}$ à coeffs $\mathbb{Q}\}$

  $$x=\frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}=c\varepsilon^m\,\frac{1+a_1\varepsilon+\dots+a_p\varepsilon^p}{1+b_1\varepsilon+\dots+b_q\varepsilon^q} \quad c, a_i, b_j \in \mathbb{Q}$$

  $x>0 \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c>0$

  $\varepsilon=1.\varepsilon$ $\varepsilon>0$

  $x=1-N\varepsilon=1.\varepsilon^0\,\frac{1-N\varepsilon}{1}>0 \Rightarrow \varepsilon<\frac{1}{N}$

  ε est un "infiniment petit" !

  $x=\frac{1}{\varepsilon}$ infiniment grand.

  $\frac{1}{\varepsilon}-N=1\times\varepsilon^{-1}\times\frac{1-N\varepsilon}{1}>0$

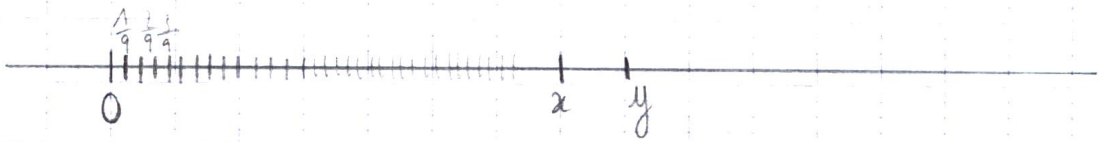
  $\forall N \in \mathbb{N}$ $N<\frac{1}{\varepsilon}$

  $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ pas archimédien !

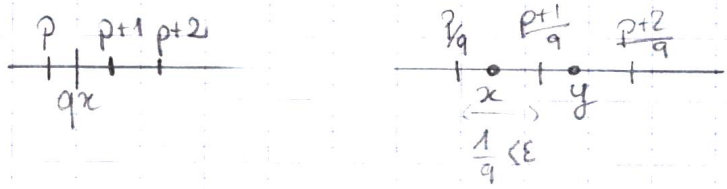
La faute avec Anthony Hopkins

Prop: Si $(K,+,\times,\leq)$ archimédien, alors $\mathbb{Q}$ est dense dans K:
$\forall x,y \in K$ avec $x<y$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x<r<y$.

Dem: Quitte à ajouter un grand entier $N \in \mathbb{N}$, on peut supposer $0<x<y$
Prenons $\varepsilon = y-x > 0$, $\exists t \in \mathbb{Q}_+^*$ $\quad 0<t<\varepsilon = y-x$
disons $t = \frac{1}{q}$



$\frac{p}{q}$ qu'on compare à x



On prend $r = \frac{p+1}{q}$

Thm: Il y a équivalence entre.
(1) $(K,+,\times,\leq)$ corps commutatif totalement ordonné archimédien
(2) $\exists \varphi : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ homomorphisme injectif qui identifie K à un sous-corps de $\mathbb{R}$ avec $+,\times,\leq$ induites par $\mathbb{R}$.

Dem: (2) $\Rightarrow$ (1) déjà vu (les sous-corps de $\mathbb{R}$ sont archimédiens)
(1) $\Rightarrow$ (2) • $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ $\qquad$ On considère $\mathbb{Q} \subset K$

$$\frac{p}{q} \longmapsto \frac{p \cdot 1_K}{q \cdot 1_K}$$

• Raisonnement de densité avec $q = 10^N$
Je trouve un décimal $x_N = \frac{p_N}{10^N} \leq x < x_N + \frac{1}{10^N} = \frac{p_{N+1}}{10^N}$

$x \longmapsto$ suite de décimaux (x_N), ie un développement décimal illimité

$$K \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$x \longmapsto \varphi(x) =$ le réel défini par le développement décimal illimité

Injectivité de φ

$x \neq y$ par exemple $x < y$, $\exists$ rationnels $x < r < r' < y$ donc pas le même dev. décimal, ie $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

$\nexists$ hom. de corps $\mathbb{Q}(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(pas d'image possible pour ε^2 !) exercice

Thm: Si $(K, +, \times, \leq)$ est archimédien et si toute suite croissante majorée est convergente, alors l'homomorphisme injectif $\varphi : K \to \mathbb{R}$ est aussi surjectif, donc $K \simeq \mathbb{R}$ (φ isomorphisme)

Dem: $\mathbb{Q} \subset K \xhookrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ connu

$\xi \in \mathbb{R}$ $\quad \xi = \lim\limits_{N \to \infty} \xi_N$ croissante des approx. décimales par défaut

$\xi_N \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset K \quad \exists x = \lim\limits_{N \to +\infty} \xi_N \in K$ et on a bien $\varphi(x) = \xi$

Cor: La construction de $\mathbb{R}$ analogue en prenant des développements dans une base quelconque donne le même corps

$b^{-n} E(b^n x) = \dfrac{P}{b^n}$ approx. à l'ordre n de x en base b.

Rem: Base $b = p$ nombre premier

$a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0 , a_{-1} \dots a_{-N}$

On considère que $p^m \longrightarrow 0$

On obtient un corps appelé corps p-adique, noté $\mathbb{Q}_p$.

Valeurs d'adhérence d'une suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels

Def: Sous-suite $(u_n)_{n \in S}$ $\quad S \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble infini

$S = \{ s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots \}$

$(u_{s_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sous-suite.

Def: $a \in \mathbb{R}$ est appelé "valeur d'adhérence" de la suite (u_n) s'il existe une sous-suite $(u_{s_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $a = \lim_{k \to +\infty} u_{s_k}$

Exemple: $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$u_{2n} = 1$ limite 1

$u_{2n+1} = -1$ limite -1

1 et -1 sont 2 valeurs d'adhérence

Caractérisation des valeurs d'adhérence

Il y a équivalence entre

(1) a est une valeur d'adhérence de (u_n)

(2) $(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})$ tel que $n \geq N$ et $|u_n - a| < \varepsilon$

(Attention, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$ $n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$ $(a = \lim u_n)$)

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2)

(1): $\exists$ sous-suite u_{s_k} telle que $a = \lim u_{s_k}$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})$ $k \geq k_0 \Rightarrow |u_{s_k} - a| < \varepsilon$

Fixons $N \in \mathbb{N}$

Prenons $k = \max(N, k_0)$ alors $s_k \geq k \geq N$

$k \geq k_0 \Rightarrow |u_{s_k} - a| < \varepsilon$

donc $n = s_k$ convient dans (2)

(2) $\Rightarrow$ (1)

Construisons une suite s_k strictement croissante par récurrence sur k.

- $k = 0$ on prend $\varepsilon = 1$, $N = 0$

  $\exists n = s_0$ tel que $|u_{s_0} - a| < 1$

- Supposons $s_0 < s_1 < \dots < s_{k-1}$ déjà construits

On prend $\varepsilon = 2^{-k}$ et $N = s_{k-1} + 1$

(2) : $\exists n = s_k \geq N > s_{k-1}$ tel que $|u_n - a| = |u_{s_k} - a| < 2^{-k}$

Ceci fabrique une sous-suite (u_{s_k}) telle que $a = \lim_{k \to \infty} u_{s_k}$ ■

(u_n) $\limsup_{n \to +\infty} u_n = \overline{\lim_{n \to +\infty}} u_n \underset{def}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{p \geq n} u_p \right)$

elle existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Suite <u>non majorée</u> $\Rightarrow \forall n \ \sup_{p \geq n} u_p = +\infty$.

Dans ce cas on écrit $\limsup_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- Suite (u_n) majorée, disons $u_n \leq M$

  $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ existe $\leq M$

v_n décroissante $v_{n+1} \leq v_n$ (un élément de moins !)

ou bien (v_n) non minorée $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, $\limsup_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

(v_n) minorée $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$ existe.

- $\liminf_{n \to +\infty} u_n = \underline{\lim_{n \to +\infty}} u_n \underset{def}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{p \geq n} u_p \right)$

$v_n = \inf_{p \geq n} u_p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ suite croissante.

a une limite dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$