## Observation fondamentale

Si on a une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) $x_n$ de nombres réels (qu'on suppose $\geq 0$ pr l'instant) les décimales se "stabilisent" quand $n \longrightarrow +\infty$

**Dem:** $x_n = E(x_n) + \mathrm{Frac}(x_n)$

**Hypothèse:** $x_n$ croissante, $x_n \leq M$ majorant

$$0 \leq E(x_n) \leq E(M) = \mu$$

$E(x_n) \in$ ensemble fini $\{0, 1, .., \mu\}$

À partir d'un certain rang $n_0$, $E(x_n)$ atteint une valeur maximale $\alpha \in \mathbb{N}$ qui ne change plus.

$$\begin{array}{l|l}
x_n = \alpha, & (a_{n,-1})(a_{n,-2}) \ldots \overset{10^{-p}}{(a_{n,-p})} \ldots \quad \text{chiffres } 0, .., 9. \\
x_{n+1} = \vdots & \\
x_{n+2} = \vdots &
\end{array}$$

$\exists$ rang $n_1 \geq n_0$ tel que la première décimale $a_{n,-1}$ se stabilise à sa valeur maximale $\alpha_{-1}$

...

Par récurrence

$\exists$ rang $n_p \geq n_{p-1}$ tel que la $p$-ième décimale $a_{n,-p}$ se stabilise à sa valeur maximale $\alpha_{-p}$

Le développement décimal de $x_n$ se "stabilise" vers le développement

$$x = +\alpha, \alpha_{-1} \alpha_{-2} \ldots \alpha_{-p} \ldots$$

(il se peut que ce soit un dév. impropre.

Cas décroissant : idem, mais on arrive tjrs à un dev. propre si on part de dev. propres. ■

## Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x_{[\leq n]} \leq x < x_{[>n]} = x_{[\leq n]} + 10^{-n}$$

$$\pi_{[\leq 2]} = 3{,}14 \qquad \pi_{[>2]} = 3{,}15$$

$$y_{[\leq n]} \leq y < y_{[>n]}$$

$x_{[\leq n]} + y_{[\leq n]} \in \mathbb{D}_n$ suite croissante.

$x_{[>n]} + y_{[>n]} \in \mathbb{D}_n$ suite décroissante

$$\left(x_{[>n]} + y_{[>n]}\right) - \left(x_{[\leq n]} + y_{[\leq n]}\right) = 2 \times 10^{-n}$$

**Déf :** $x + y$ = réel donné par le développement stabilisé

$+ x + (-y)$

Si $x > y$ $\quad x_{[\leq n]} - y_{[>n]} \nearrow$

$\quad x_{[>n]} - y_{[\leq n]} \searrow$

Si $x < y$ $\quad -(+y - x)$

### Multiplication

$x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x_{[\leq n]} \times y_{[\leq n]} \in \mathbb{D}_{2n} \nearrow$$

$$x_{[>n]} \times y_{[>n]} \in \mathbb{D}_{2n} \searrow$$

$x_{[\geq n]} \leq X = E(x)+1 \in \mathbb{N}$
$y_{[\geq n]} \leq Y = E(y)+1 \in \mathbb{N}$

$x_{[\geq n]} y_{[\geq n]} - x_{[\leq n]} y_{[\leq n]}$

$= (x_{[\geq n]} - x_{[\leq n]}) \cdot y_{[\geq n]} + x_{[\leq n]} (y_{[\geq n]} - y_{[\leq n]})$

$\leq 10^{-n} . Y + X . 10^{-n} = (X+Y) 10^{-n}$

$(\mathbb{R}, +, \times)$ corps commutatif

$(x+y)_{[\leq n]} \geq x_{[\leq n]} + y_{[\leq n]}$

$\underbrace{2,717}_{x} + \underbrace{3,5641}_{y} = 6,2811$

$x_{[\leq 2]} = 2,71$
$y_{[\leq 2]} = 3,56$

$(x+y)_{[\leq 2]} = 6,28$

$+$ associative dans $\mathbb{D}_n$.

$(x+y)+z$ $\quad$ $(x+y)_{[\leq n]} + z_{[\leq n]}$

écart $= 0$ en $10^{-n}$

$(x_{[\leq n]} + y_{[\leq n]}) + z_{[\leq n]}$

autres propriétés : idem.

<u>Propriété de corps :</u> $x \in \mathbb{R}^*$, $\exists x' = \frac{1}{x}$

$x > 0$ $\quad \frac{1}{x_{[\geq n]}} \in \mathbb{Q}^* \nearrow$

$\frac{1}{x_{[\leq n]}} \in \mathbb{Q}_+^* \searrow$

Mq suites adjacentes (diff. → 0)

$x'$ limite commune

## $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ "Corps commutatif totalement ordonné"

**Déf:** On appelle corps (commutatif) totalement ordonné un quadruplet $(K, +, \times, \leqslant)$ tel que :
1) $(K, +, \times)$ corps (commutatif)
2) $\leqslant$ relation d'ordre total
3) Si $P = K_+ = \{x \in K,\ 0 \leqslant x\}$ stable par $+$ et $\times$.

$$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$$
$$x, y \in P \Rightarrow x \times y \in P.$$

4) $P \cap -P = \{0\}$.

**Conséquence:** $K = P \cup (-P)$
$$P \cap (-P) = \{0\}$$
$$-P = \{x \in K,\ x \leqslant 0\}$$

**Dem:** Prenons $x \in P$ càd $0 \leqslant x$

$x' = -x \in K$ ou $x' \leqslant 0$ ou $0 \leqslant x'$ (ordre total)

Si $0 \leqslant x'$, ie $x' \in P$, alors $x + x' = 0$.

$x \in P \cap -P = \{0\} \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$.

**Observation:** On a $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P$

**Réciproquement**, Si on a une partie $P$ d'un corps $(K, +, \times)$ stable par $+$ et $\times$, telle que $K = P \cup -P$, $P \cap (-P) = \{0\}$ on a une relation d'ordre total $\leqslant$ par

$$x \leqslant y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y - x \in P$$

**Exples:**
- $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$
- $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$

**Exercice:** $(K, +, \times, \leqslant)$ corps totalement ordonné

$K(X) = \left\{ \text{fractions rationnelles } \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n}{b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n} \right\}$

$a_i, b_i \in K$ et $B(X) \neq 0$.

$F(X)$ fraction rationnelle non nulle, on factorise les puissances de $X$

$$F(X) = cX^{u} \frac{1+\alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n}{1+\beta_1 X + \dots + \beta_n X^n} \quad , c \in K^*, u \in \mathbb{Z}$$

$$F > 0 \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} c > 0 .$$

$$P = \{ F(X) \mid F(X) > 0 \text{ ou } F(X) \equiv 0 \}$$

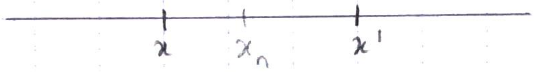
C'est un corps totalement ordonné

<u>Limites</u>: $(K, +, \times, \leqslant)$ corps totalement ordonné.

<u>Def</u>: Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $K$ converge vers une limite $x \in K$ si $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon$.

<u>Prop</u>: La limite d'une suite est unique.

<u>Dem</u>: Supposons qu'on ait une autre limite $x' \neq x$.




$\varepsilon = \frac{1}{3} |x' - x| > 0$
$\exists N_1 \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$
$N_2 \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow |x_n - x'| < \varepsilon$

$$|x - x'| \leqslant |(x_n - x) - (x_n - x')| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3} |x - x'|$$

CONTRADICTION! ∎

<u>Remarque</u>: Un corps totalement ordonné $(K, +, \times, \leqslant)$ contient toujours $\mathbb{Q}$ (plus exactement un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$)

$1_K = 1_K \times 1_K > 0 \quad (\forall x \in K, x^2 \geqslant 0 \qquad x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$
$\qquad x \leqslant 0 \Rightarrow x^2 = (-x^2) \geqslant 0$

$$\mathbb{N} \hookrightarrow K$$
$$n \longmapsto n1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{n \text{ fois.}}$$

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n1_K > 0$

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow K$$
$$q \in \mathbb{N} \quad \frac{p}{q} \longmapsto \frac{p.1_K}{q.1_K}$$

On considère donc $\mathbb{Q} \subset K$ quitte à faire cette identification.

**Th:** Dans $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ • toute suite croissante majorée est cvgte.
• toute suite décroissante minorée est convergente

**Dem:** Déjà vu pour le cas $(x_n)$, $x_n \geqslant 0$

$(x_n) \nearrow \quad x_n \leqslant M$

$x'_n = x_n - x_0 \nearrow$, $x'_n \leqslant M - x_0$.

$(x_n) \searrow \quad x_n \geqslant m$

$x'_n = x_n - m \geqslant 0$. $\Big) \Rightarrow x'_n$ cv

$x'_n \searrow \quad x'_n \geqslant 0 \qquad \Rightarrow x_n = x'_n + m$ cv.

Ceci est FAUX dans $\mathbb{Q}$ !

$x_n = (\sqrt{2})_{[\leqslant n]}$ $\nearrow$ majorée qui n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$

**Th:** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes de réels càd
• $(x_n) \nearrow$ • $x_n \leqslant y_n$
• $(y_n) \searrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$

Alors $\exists$ limite commune $l$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Dem : $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \dots \leq y_1 \leq y_0$

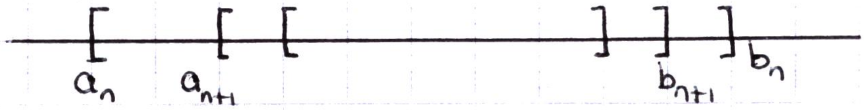
$(x_n)$ majorée par $y_0$

$(y_n)$ minorée par $x_0$

FAUX dans $\mathbb{Q}$ : $(\sqrt{2})_{[\leq n]} \leq (\sqrt{2})_{[>n]}$

## Théorème des segments emboîtés

Dans $\mathbb{R}$, toute suite décroissante d'intervalles fermés bornés (segments) $[a_n, b_n]$




a comme intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a,b] \neq \emptyset$ où $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Si de plus la longueur $b_n - a_n \to 0$, alors $b = 0$ (suites adjacentes) et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{a\}$

FAUX dans $\mathbb{Q}$ !

## Densité des rationnels et des irrationnels

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{\text{irrationnels}}$

### "Densité des rationnels"

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$

$\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.

dem : Par déf de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

$\exists n \quad x < x_{[>n]} < y_{[\leq n]} \leq y$

On prend par exemple $q = \frac{1}{2}\left( x_{[>n]} + y_{[\leq n]} \right)$ ■

## "Densité des irrationnels"

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$

$\exists\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \xi < y$.

dem : $q \in \mathbb{Q}$ $x < q < y$

$\xi = q + 10^{-n}\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

pour $n$ assez grand $x < q < \xi < y$.