1) Définitions concernant les relations d'ordre

E ensemble

$x \leqslant y$ relation d'ordre.

Déf: On dit que $\leqslant$ est:

i) Une relation d'ordre total si

$\forall x, y \in E$, on a $x \leqslant y$ ou (inclusif) $y \leqslant x$

ii) Sinon on dit que c'est une relation d'ordre partiel

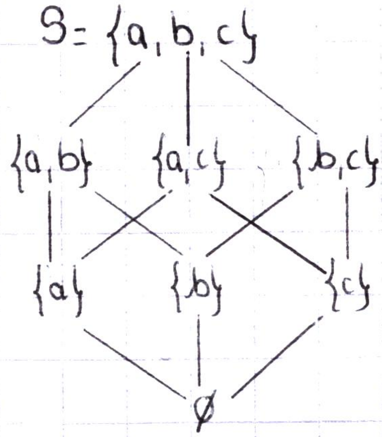
Exemples: • $E = \mathbb{N}$, $\leqslant$ ordre total

• S ensemble, $E = \mathcal{P}(S)$ ensemble des parties de S.

$X, Y \in E$ (càd $X, Y \subset S$)

$X \leqslant Y \underset{\text{def}}{\iff} X \subset Y$ (inclusion)

$S = \{a, b, c\}$ Diagramme de Hasse :



$\subset$ est bien réflexive, transitive, antisymétrique

$\subset$ pas une relation d'ordre total.

Plus petit, plus grand élément

Def: Si $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, en dit que :

i) $a \in E$ est le plus grand (ou maximum) de E si $\forall x \in E$ $x \leqslant a$

ii) $b \in E$ est le plus petit (ou minimum) de E si $\forall x \in E$, $b \leqslant x$

Exemples :

1) Si $(E, \leqslant)$ totalement ordonné

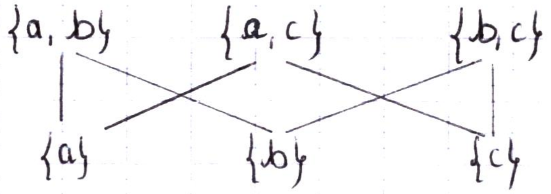
$A = \{x_1, .., x_n\}$ partie finie de E

$\max(A)$ et $\min(A)$ existent

2) $E = \mathcal{P}(S)$, $\subset$

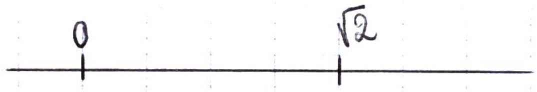
$\min(E) = \emptyset$ $\max(E) = E$

3) $E' = \{$parties strictes de $S\} = \{X \subset S \mid X \neq \emptyset, X \neq S\}$



Ni minimum, ni maximum

4) $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ ,\ x^2 \leqslant 2\}$



$\min(E) = 0$

$\max(E)$ n'existe pas !

Supposons $a = \max(E)$

on a $a \in E$, donc $a^2 \leqslant 2$

nécessairement $a^2 \neq 2$ donc $a^2 < 2$

On va montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ petit (disons $\varepsilon < 1$) tel que

$(a+\varepsilon)^2 < 2$

$(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 < a^2 + 5\varepsilon$ $\quad (\varepsilon^2 = \varepsilon \times \varepsilon < \varepsilon$ car $\varepsilon < 1)$

Pour avoir $a^2 + 5\varepsilon \leqslant 2$ il suffit que $5\varepsilon < 2 - a^2$: on prend $\varepsilon = \dfrac{2-a^2}{5}$

CONTRADICTION !

Élément maximal, minimal

Def : Dans $(E, \leqslant)$ on dit que $a \in E$ est

- maximal si $\nexists\, x \in E$ tel que $a \leqslant x$ et $a \neq x$
- minimal si $\nexists\, x \in E$ tel que $x \leqslant a$ et $x \neq a$

Dans l'exemple (3) ci-dessus $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ éléments minimaux

$\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}$ éléments maximaux

Remarque : S'il existe un plus grand (resp. plus petit) élément, il est unique.

$$\left.\begin{array}{l} a = \max(E) \\ b = \max(F) \end{array}\right\} \Rightarrow a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a$$

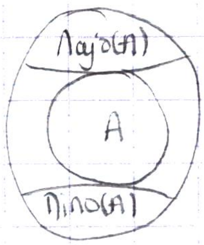
$$\underset{\text{antisymétrie}}{\Rightarrow} a = b.$$

Majorants, minorants

Def: Soit $(E, \leqslant)$ ensemble ordonné. Soit $A \subset E$.

(i) $\text{Majo}(A)$ = "majorants de A"
$= \{ m \in E,\ \forall x \in A,\ x \leqslant m \}$

(ii) $\text{Mino}(A)$ = "minorants de A"
$= \{ \mu \in E,\ \forall x \in A,\ \mu \leqslant x \}$



Exemples: • $E = \mathbb{Q}$ $\leqslant$
$A = \mathbb{N}$
$\text{Mino}(A) = \mathbb{Q}_-$ rationnels $\leqslant 0$
$\text{Majo}(A) = \emptyset$

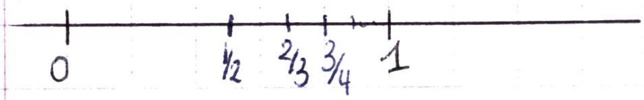
Borne sup, borne inf

A partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$

Def: • $\sup(A) = \min(\text{Majo}(A))$ s'il existe
• $\inf(A) = \max(\text{Mino}(A))$ s'il existe

Exemples:

• $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ $A = \{ 1 - \frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \}$



$\min(A) = 0$
$\max(A)$ n'existe pas.

$\text{Mino}(A) = \mathbb{Q}_-$ $\quad \text{Inf}(A) = \max(\text{Mino}(A)) = 0$
$= \min(A)$.

$\text{Majo}(A) = \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$ $\quad \text{Sup}(A) = \min(\text{Majo}(A)) = 1$ n'est pas un maximum (le "sup n'est pas atteint" par un élément de A).

- $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ $\quad A = \{x \in \mathbb{Q}_+ , x^2 \leqslant 2\}$

$\min(A) = 0$

$\max(A)$ n'existe pas

$\mathrm{Mino}(A) = \mathbb{Q}_-$

$\mathrm{Majo}(A) = \{x \in \mathbb{Q}_+^* \,;\, x^2 \geqslant 2\} = \{x \in \mathbb{Q}_+^* \,;\, x^2 > 2\}$

- Si $x \in \mathbb{Q}_+$, $x^2 > 2$ alors x est bien majorant

Autrement dit, $\{x \in \mathbb{Q}_+ , x^2 > 2\} \subset \mathrm{Majo}(A)$

- Si $x \in \mathbb{Q}_+$ vérifie $x^2 < 2$ alors $x \in A$ et il y a dans A un élément plus grand $\alpha = x + \varepsilon$ donc x n'est pas majorant

$x^2 < 2 \implies x$ pas majorant

Contraposée $\quad x$ majorant $\implies x^2 \geqslant 2$

donc $\mathrm{Majo}(A) \subset \{x \in \mathbb{Q}_+ , x^2 \geqslant 2\}$

$\mathrm{Sup}(A)$ dans $\mathbb{Q}$?

$\mathrm{Sup}(A) = \min(\mathrm{Majo}(A))$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$!

2) Construction des nombres réels

- **Développements propres et impropres**

$\frac{1}{9} = 0{,}111111\ldots$

$1 = 9 \times \frac{1}{9} = 0{,}99999\ldots$

On doit convenir que $1 = 0{,}9999\ldots$

$x_n = 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{n \text{ chiffres}} = 1 - 10^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Observation : Tout nombre décimal admet deux écritures sous forme de développement décimal illimité

$0{,}35 = 0{,}350000\ldots$ "développement décimal propre"

$= 0{,}349999\ldots$ "développement décimal impropre"

Définition de $\mathbb{R}$

On appellera nombre réel un nombre représenté par un développement décimal illimité à droite :

$$\pm\ a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} \dots$$

avec $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

signe $\in \{+,-\}$ $\quad (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec $a_i = 0$ pour $i > p$.

Convention d'identification :

- dev. propres et impropres
- $+0 = -0 = 0$

Opérations sur les réels

- Signe

$$\mathrm{Sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ commence par } + \text{ et n'est pas } 0 \\ -1 & \text{si } x \text{ commence par } - \text{ et n'est pas } 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Valeur absolue

$|x|$: on remplace $-$ par $+$ au début

- Partie entière

- Si signe $+$ $\quad E(x) = a_p a_{p-1} \dots a_0 \in \mathbb{N}$

pour le développement propre !

$E(0,9999\dots) = E(1) = 1$

- Si signe $-$ $\quad E(x) = -a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0 \quad$ si $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$

$= -a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0 - 1$ si a_{-i} pas tous nuls.

$E(-3,14) = -4 \qquad E(-0,9999\dots) = -1$

$x = (\pm, \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1,\dots,9\})$ / (identifications)

$\qquad\qquad i \longmapsto a_i$

- Relation d'ordre

réels à signe $+$ $\qquad x \leqslant y \iff \begin{cases} \cdot\ E(x) < E(y) \\ \text{ou} \\ \cdot\ E(x) = E(y) \\ \mathrm{Frac}(x) \leqslant \mathrm{Frac}(y) \end{cases}$

$\mathrm{Frac}(x) = 0, a_{-1} a_{-2} \dots$ (dev. propre)

$\mathrm{Frac}(y) \leqslant 0, b_{-1} b_{-2} \dots$ (dev propre)

"Ordre lexicographique" c'est la décimale significative la plus à gauche qui compte.

réels à signe $-$: $-x \leqslant -y \overset{\text{def}}{\iff} +y \leqslant +x$

$-x \leqslant +y \quad \forall$ dev. x, y.

$(\mathbb{R}, \leqslant)$ ensemble totalement ordonné !

- $x = \pm\, a_p a_{p-1} \dots a_0 , a_{-1} \dots a_{-n} \dots$

$\underbrace{10^n x}_{\text{notation}} = \pm\, a_p a_{p-1} \dots a_0 a_{-1} \dots a_{-n} , a_{-n-1} a_{-n-2} \dots$

- <u>Approximations décimales</u>

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists !\, x_{[\leqslant n]} \in \mathbb{D}_n$ qui est l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près

$\exists !\, x_{[>n]} \in \mathbb{D}_n$ qui est l'approximation décimale par excès stricte à 10^{-n} près.

de façon que $x_{[\leqslant n]} \leqslant x < x_{[>n]}$

$x_{[>n]} = x_{[\leqslant n]} + 10^{-n}$

$$\boxed{x_{[\leqslant n]} = 10^{-n} E(10^n x)}$$

En effet $E(x)$ = unique entier $\in \mathbb{Z}$ tel que

$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$

$E(10^n x) \leqslant 10^{-n} x < E(10^n x)$

$\underbrace{10^{-n} E(10^n x)}_{\in \mathbb{D}_n} \leqslant x < 10^{-n} E(10^n x) + 10^{-n}$

<u>Th:</u> $\forall x \in \mathbb{R}$

$x_{[\leqslant n]}$ suite croissante (au sens large)

$x_{[>n]}$ suite décroissante (au sens large)

Suites adjacentes $x_{[>n]} - x_{[\leqslant n]} = 10^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$