Cours mardi
14h-15h30.

TOPOLOGIE - COURS

Jean-Pierre DEMAILLY
Bureau 42 (Aile C, RDC)
04 76 51 49 02
jean-pierre.demailly@ujf-grenoble.fr

http://www.ujf-fourier.fr/~demailly/L3_topologie_B

Cours 2012-2013 :
Dietrich Häfner
Chiodo
Dufresnay-Laurent

Choquet (topologie)
Bourbaki (topologie générale)
Queffelec "Topologie pour la licence"

13 # Chapitre 1 : Propriétés fondamentales des nombres réels

I. Nombres entiers

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ entiers naturels / $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ entiers relatifs

Bases de numération

$b = 10$ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$b = 2$ $0, 1$

$b = 8$ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ "octal

$b = 16$ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f$ "hexadécimal"

Représentation en base b de $n \in \mathbb{N}$

$$n = a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{p} a_i b^i$$

a_i : chiffre d'ordre i

(on supprime les zéros du début inutiles)

$a_p \neq 0$ sauf si $n = 0$

Conversion d'une base dans une autre

$n = 1391$ (base 10) $\rightsquigarrow$ base 16

$$\begin{array}{r|l} 1391 & 16 \\ \hline 15 & 86 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 86 & 16 \\ \hline 6 & 5 \end{array}$$

$1391 = 86 \times 16 + 15$

$= (5 \times 16 + 6) \times 16 + 15$

$= 5 \times 16^2 + 6 \times 16 + 15$

$\underline{n = 56f}$ en base 16

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ anneau commutatif unitaire -> voir algèbre

Def : Un entier $p \in \mathbb{N}^*$ est dit **premier** (resp. un élément $p \in A^*$ dans un anneau A est dit premier) si

i) p non inversible pour $\times$

(x inversible si $\exists y \in A^*$ $x \times y = 1_A$

ii) On ne peut pas écrire $p = q \times r$ avec q, r non inversible.

Décomposition en facteurs premiers :

- dans $\mathbb{N}^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ se décompose de manière **unique**, sous la forme $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ où $p_1, \dots, p_s$ nombres premiers distincts, $a_i > 0$
  ($s = 0$ "produit vide" $n = 1$)

$\mathbb{Z}$ 2 éléments inversibles $1, -1$

On se restreint aux nombres premiers > 0

$n \in \mathbb{Z}^*$

$n = u \times p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ u inversible (± 1 ici)

unicité à l'ordre près des facteurs (par ex, on peut imposer $p_1 < p_2 < \dots < p_s$)

Déf : $(A, +, \times)$ est dit **factoriel** si

- A intègre $x, y \in A^* \Rightarrow x \times y \in A^*$
- tout élément $x \in A^*$ a une **décomposition unique**

  $x = u \times p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$

Ex : $A = \{x = a + bi\sqrt{5} \in \mathbb{C} \,;\, a, b \in \mathbb{Z}\}$

$(A, +, \times)$ est un anneau.

$$(a + bi\sqrt{5})(a' + b'i\sqrt{5}) = \underbrace{(aa' - 5bb')}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(ab' + ba')}_{\in \mathbb{Z}} i\sqrt{5}$$

$$6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$$

vérifier que 2 et 3 premiers mais $(1 + i\sqrt{5})$ et $(1 - i\sqrt{5})$ aussi

2 décompositions $\neq$ en facteurs premiers.

II - Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b} \;;\; a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ corps commutatif

Rappel : Corps commutatif

Un ensemble A muni de 2 lois de composition internes (LCI) + et $\times$, noté $(A, +, \times)$ est appelé **anneau** si

a) $(A, +)$ **groupe commutatif**

- **+ associative** (et ici commutative)
- $\exists$ **élément neutre** noté 0_A

  $x + 0_A = 0_A + x = x \quad \forall x \in A$

- $\forall x \in A$, $\exists x' \in A$ tq $x + x' = x' + x = 0_A$ (on note $x' =$

b) Propriétés de $\times$:

- **$\times$ associative**
- **$\times$ distributive par rapport à +**

  $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

  $(x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

- (Sous entendu $\exists$ élément 1_A **unité pour $\times$**)

  $1_A \times x = x \times 1_A = x \quad \forall x \in A$

De plus,

- A est dit **commutatif** si $\times$ est commutative

  $x \times y = y \times x \quad \forall x, y \in A$

- A est appelé **corps** si $1_A \neq 0_A$ et si

$\forall x \in A^*$, $\exists x' \in A^*$ tq $x \times x' = x' \times x = 1_A$

Décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{Q}^*$

Th: Tout $x \in \mathbb{Q}^*$ se décompose de manière unique sous la forme

$$x = u \times p_1^{a_1} \times \dots \times p_s^{a_s}$$

$u = \pm 1$ inversible de $\mathbb{Z}$

$p_1, \dots, p_s \in P = \{2,3,5,7,\dots\}$ premiers

$a_i \in \mathbb{Z}$ (on ne tient pas compte des exposants nuls)

$$x = \frac{-12}{175} = -\frac{2^2 \times 3}{5^2 \times 7}$$

$$= (-1) \times 2^2 \times 3^1 \times 5^{-2} \times 7^{-1}$$

$$x = \frac{a}{b} = \frac{u \times p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_s^{\alpha_s}}{u' \times p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_s^{\beta_s}} = \left(\frac{u}{u'}\right) \times p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \times \dots \times p_s^{\alpha_s - \beta_s}$$

(exo: l'unicité dans $\mathbb{Q}^*$ provient de l'unicité dans $\mathbb{N}^*$)

Fraction simplifiée: pas de nombre premier commun dans a et b
(a, b premiers entre eux, $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$)

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

$\mathbb{D}$ = nombres décimaux (base 10)

$$= \{x = \pm a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n}\}$$ chiffres $0, \dots, 9$

$$= \left\{x = \pm \sum_{i=-n}^{+p} a_i b^i\right\}$$

$\mathbb{D}^{(b)}$ développements finis en base b.

$\mathbb{D}_n^{(b)}$ développements ayant au plus n chiffres après la virgule.

$$\mathbb{D}_n^{(b)} = \left\{x = \frac{m}{b^n}, m \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z} \times \frac{1}{b^n}$$

$(\mathbb{D},+,\times)$ anneau $\qquad$ $(\mathbb{D}^{(b)},+,\times)$ anneau.

$$\frac{m}{b^n} \times \frac{m'}{b^n} = \frac{mm'}{b^{2n}}$$

$\mathbb{D}_n^{(b)}\ \mathbb{D}_n^{(b)} \subset \mathbb{D}_{2n}^{(b)}$ $\qquad$ $\mathbb{D}_n^{(b)}$ n'est pas un anneau !

$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \qquad \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$

$1{,}4^2 = 1{,}96 \qquad 1{,}5^2 = 2{,}25 \qquad \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

$1{,}41^2 = 1{,}9881 \qquad 1{,}42^2 = 2{,}0164 \qquad \Rightarrow 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

On peut ainsi trouver des approximations décimales à 10^{-n} près, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Th: On ne peut pas écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

dem (~) : prenons $\frac{a}{b}$ simplifiée, donc en particulier a, b non pairs tous les 2.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2ab$ pair.

Ceci implique a pair : $a = 2a' \Rightarrow 4a'^2 = 2b^2$

$\Rightarrow b^2 = 2a'^2$ pair

$\Rightarrow b$ pair CONTRADICTION.

$\sqrt{2}$ "IRRATIONNEL"

Question plus générale :

Prenons $x \in \mathbb{Q}_+^*$, Quand existe-t-il $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{Q}$? (k entier ≥ 2)

On cherche $y \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $y^k = x$

(si y existe, on aura $\sqrt[k]{x} = y$)

$y = p_1^{a_1} \times \dots \times p_s^{a_s} \in \mathbb{Q}_+^* \qquad a_i \in \mathbb{Z}$

$y^k = p_1^{ka_1} \times \dots \times p_s^{ka_s}$

Si $x = p_1^{b_1} \times \dots \times p_s^{b_s}$

il faut $b_i = k a_i \iff a_i = \frac{1}{k} b_i$

CNS pour l'existence de $\sqrt[k]{x}$: c'est que dans la décomposition $x = p_1^{b_1} \times \dots \times p_s^{b_s}$ tous les exposants b_i soient multiples de k.

dans ce cas, on prend $a_i = \frac{1}{k} b_i$ et $y = \sqrt[k]{x} = p_1^{\frac{b_1}{k}} \times \dots \times p_s^{\frac{b_s}{k}}$

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^1}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$ irrationnels

Conséquence : Si $x \in \mathbb{N}^*$ et si $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{Q}^*$ alors $\sqrt[k]{x} \in \mathbb{N}^*$

$$b_i > 0 \Rightarrow \frac{b_i}{k} > 0 \Rightarrow y = \prod p_i^{\frac{b_i}{k}} \in \mathbb{N}^*$$

Périodicité du développement décimal

$\frac{22}{7}$

$$\begin{array}{l|l} 22 & 7 \\ \hline 10 & 3,\underbrace{142857}_{\text{période}}142 \\ \ \ 30 & \\ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ 10 & \end{array}$$

$x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ r_i & \end{array}$$

r_i restes successifs.

$0 \leqslant r_i \leqslant q-1$

$r_i = 0$ à une certaine étape $\rightsquigarrow x \in \mathbb{D}$

$r_i \neq 0$ $r_i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ $\rightsquigarrow$ période de longueur $\leqslant q-1$

Th : Tout $x \in \mathbb{Q}$ est représentable par un développement décimal

- fini si $x \in \mathbb{D}$
- ou illimité de période de longueur $\leqslant q-1$

Réciproquement, tout développement périodique donne un rationnel $x \in \mathbb{Q}$

ex : $x = 2,46\underbrace{137}_{\text{période}}137\ldots$

$x = 2,46 + 0,00137137\ldots$

$= \frac{246}{100} + \frac{1}{100} \times 137 \times 0,001001001\ldots$

$0,\underbrace{00\ldots1}_{\ell}\underbrace{0\ldots01}_{\ell} = \frac{1}{10^\ell - 1} = \frac{1}{\underbrace{99\ldots9}_{\ell}}$

$x = \frac{246}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{137}{999}$

$= \frac{246 \times 999 + 137}{100 \times 999}$

$x = b_p b_{p-1} \ldots b_1 b_0 , b_{-1} \ldots b_{-q} \underbrace{c_1 \ldots c_\ell} \underbrace{c_1 \ldots c_\ell}$

$x = \frac{m}{10^q \times (10^\ell - 1)}$