Théorème de Cantor-Bernstein

Par Mathtous

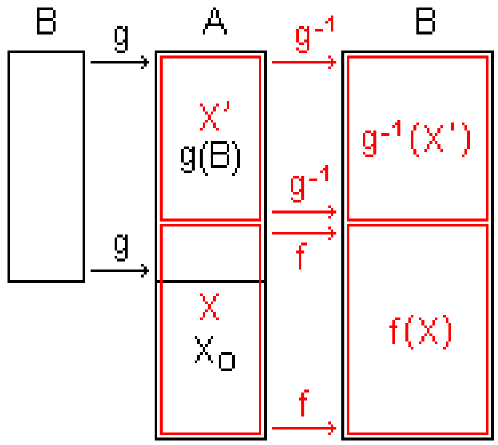
Il s'agit de Félix Bernstein, à ne pas confondre avec Sergeï Natanovitch Bernstein (celui des polynômes).
Le nom de Schröder est fréquemment associé à ceux de Cantor et de Bernstein.
Le but de cet article est de donner une démonstration de ce théorème, des exemples concrets, et quelques réflexions et compléments sur ce théorème important de la théorie des ensembles.

Théorème de Cantor-Bernstein :

Soit A et B deux ensembles non vides. S'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A, alors il existe une bijection de A sur B.

I) Démonstration :

Si A et B sont des ensembles finis, le résultat est évident et peut être établi directement en utilisant les cardinaux (finis) de A et B. Dans ce cas particulier, f et g sont elles-mêmes des bijections (initialement seulement supposées injectives).
Je laisse au lecteur intéressé le soin d'établir ce résultat. De toute façon, la démonstration qui suit reste valable pour des ensembles finis, certains des ensembles introduits étant simplement vides.
Je traiterai néanmoins des cas particuliers un peu plus loin. Quoi qu'il en soit, le théorème n'a d'intérêt que pour les ensembles infinis.



Si g est déjà bijective, il n'y a rien à démontrer.
Sinon, on pose $X_0 = A\backslash g(B)$. X_0 est non vide ainsi que les ensembles suivants :
$X_1 = g \circ f(X_0)$,
$X_2 = g \circ f(X_1)$,
et par récurrence : $X_{i+1} = g \circ f(X_i)$.

On pose alors $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ et $X' = A\backslash X$

X est non vide, mais X' peut l'être, ce qui ne modifie en rien la démonstration .
$X_0 \subset X$, donc $X' \subset g(B)$.

De plus, $g\circ f(X) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g\circ f(X_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_{i+1} \subset X$.
Autrement dit : si $x \in X$, alors $g \circ f(x) \in X$.

On définit alors : $\varphi : A \longrightarrow B$ de la manière suivante :

- Si $x \in X'$: $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ qui existe car $X' \subset g(B)$, et est unique car g est injective.
- Si $x \in X$: $\varphi(x) = f(x)$.

On a donc $\varphi(X') = g^{-1}(X')$ et $\varphi(X) = f(X)$.
Nous allons démontrer que φ est une bijection de A sur B.

1) $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \varnothing$:
En effet : si $y \in \varphi(X) \cap \varphi(X')$:
- $y \in \varphi(X')$ donc il existe un élément x' de X' tel que $y = \varphi(x') = g^{-1}(x')$. Donc $x' = g(y)$: $g(y) \in X'$.
- $y \in \varphi(X)$ donc il existe un élément x de X tel que $y = \varphi(x) = f(x)$. D'où $g(y) = g \circ f(x) \in X$ car $x \in X$. Donc $g(y) \in X$.
Or, on a vu que $g(y) \in X'$, d'où une contradiction puisque X et X' sont disjoints. Par suite, on a bien $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \varnothing$.

2) φ est injective :
Si $\varphi(x) = \varphi(x')$:
- ou bien $x \in X$ et $x' \in X'$ (ou le contraire), donc $\varphi(x) \in \varphi(X)$ et $\varphi(x') \in \varphi(X')$. Mais $\varphi(x) = \varphi(x')$ ce qui contredit que $\varphi(X) \cap \varphi(X') = \varnothing$. Ce cas est donc impossible .
- ou bien $x \in X$ et $x' \in X$ auquel cas $\varphi(x) = \varphi(x')$ signifie $f(x) = f(x')$ et donc $x = x'$ puisque f est injective.
- ou bien $x \in X'$ et $x' \in X'$ auquel cas $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$. Mais g injective de B dans A est bijective de B sur $g(B)$, g^{-1} étant donc une bijection de X' sur $g^{-1}(X')$. D'où $x = x'$.
Donc dans tous les cas (possibles) : si $\varphi(x) = \varphi(x')$ alors $x = x'$: φ est injective.

3) φ est surjective :
Soit $y \in B$. X et X' étant disjoints, ou bien $g(y) \in X$ ou bien $g(y) \in X'$.
- si $g(y) \in X$, $g(y) \in X_0$ est impossible car X_0 est le complémentaire de $g(B)$ auquel appartient $g(y)$. Donc $g(y) \in g \circ f(X)$.
Il existe donc $x \in X$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$.
g étant injective, il en résulte que $y = f(x)$ ce qui signifie $y = \varphi(x)$ puisque $x \in X$.
-si $g(y) \in X'$, il existe $x' \in X'$ tel que $g(y) = x'$, donc $y = g^{-1}(x')$. Or $x' \in X'$, donc $y = g^{-1}(x')$ signifie $y = \varphi(x')$.
■