L3B – Topologie **Examen du lundi 16 juin 2014, 13h30-17h30** **Corrigé du sujet**

0. Questions de cours et applications [6 points].

Soit $(E, \|\bullet\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée.

1) Rappeler la définition de la notion de valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E. En donner une autre caractérisation et démontrer l'équivalence de celle-ci avec la définition.

La définition du cours est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $a \in E$ s'il existe une sous-suite extraite $(u_{s_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} u_{s_k} = a$. Une caractérisation en termes de quantificateurs est la suivante : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une valeur d'adhérence* $a \in E$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N \quad \textit{tel que} \quad d(u_n, a) < \varepsilon.$$

En effet :

• Définition $\Rightarrow$ Caractérisation : si une sous-suite $(u_{s_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{k\to+\infty} u_{s_k} = a$, alors par définition d'une limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq K_\varepsilon \quad \text{on a} \quad d(u_{s_k}, a) < \varepsilon.$$

Si nous prenons $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ quelconque et $k \geq \max(N, K_\varepsilon)$, alors on a bien $d(u_{s_k}, a) < \varepsilon$ et $s_k \geq k \geq N$, donc pour $n = s_k$ on a bien $n \geq N$ et $d(u_n, a) < \varepsilon$, de sorte que la caractérisation annoncée est bien vérifiée.

• Caractérisation $\Rightarrow$ Définition : dans la caractérisation, choisissons $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, et construisons une suite d'entiers s_k strictement croissante par récurrence sur k. On prend d'abord $\varepsilon = 2^0 = 1$ et $N = 0$ pour trouver $s_0 := n \geq N = 0$ tel que $d(u_{s_0}, a) = d(u_n, a) < \varepsilon = 1$. Maintenant, si l'indice s_{k-1} a déjà été choisi, on prend $\varepsilon = 2^{-k}$ et $N = s_{k-1} + 1$. La caractérisation donne $s_k := n \geq N > s_{k-1}$ tel que $d(u_{s_k}, a) = d(u_n, a) < \varepsilon = 2^{-k}$. On a ainsi fabriqué une sous-suite extraite (u_{s_k}) telle que $d(u_{s_k}, a) \leq 2^{-k}$, par conséquent $\lim_{k\to+\infty} u_{s_k} = a$.

2) Soient A et B deux parties compactes non vides disjointes de E. Montrer en le justifiant précisément qu'il existe des points $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ tels que $d(x, y)$ réalise la distance $d(A, B)$, à savoir l'inf des distances possibles $d(x, y)$ entre des points $x \in A$ et $y \in B$. Que peut-on en conclure quant à $d(A, B)$?

L'application $E \times E \to E$ donnée par $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est lipschitzienne de rapport 2 pour la distance naturelle δ sur $E \times E$, en effet l'inégalité triangulaire implique facilement

$$\begin{aligned} &d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') \quad \text{et} \quad d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \quad \text{d'où} \\ &|d(x', y') - d(x, y)| \leq d(x, x') + d(y, y') \leq 2 \max\big(d(x, x'), d(y, y')\big) = 2\,\delta((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est continue. Elle atteint donc son inf sur l'espace compact produit $A \times B \subset E \times E$. Ceci signifie qu'il existe $(x_0, y_0) \in A \times B$ tel que

$$d(x_0, y_0) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x, y) = d(A, B)$$

(et l'inf est aussi un min). Comme A et B sont disjointes, on a $x_0 \neq y_0$, donc $d(x_0, y_0) > 0$ (propriété de séparation de la distance), par conséquent $d(A, B) > 0$.

3) Si A et B sont des parties fermées disjointes, la propriété 2) est-elle nécessairement réalisée ?

Si A et B sont des parties fermées disjointes, on peut avoir $d(A, B) = 0$. C'est le cas si on prend par exemple dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, avec $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\}$. En effet $(x, 0) \in A$ et $(x, e^x) \in B$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$ (disons), et $d((x, 0), (x, e^x)) = e^x$, donc

$$d(A, B) \leq \inf_{x<0} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

4) On suppose ici que E est de dimension finie. Rappeler ce que sont les parties compactes de E. Soit maintenant A, B des parties fermées non vides disjointes de E. Si A est compacte, montrer que la distance

$d(A,B)$ est encore réalisée par un couple de points $(x_0,y_0) \in A \times B$.
Indication. Choisir deux points $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ et vérifier que l'inf des distances $d(A,B)$ est certainement réalisé par un couple $(x,y) \in A \times B'$, où B' est l'ensemble des $y \in B$ tels que $d(x_1,y) \leq d(x_1,y_1) + \operatorname{diam} A$, où $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$.

Dans un espace normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées. Supposons que A, B soient des parties fermées disjointes, avec A compacte. La continuité de la fonction distance sur le compact $A \times A$ entraîne que $\operatorname{diam} A = \sup_{x,x' \in A} d(x,x')$ est atteint, donc fini.

Choisissons $x_1 \in A$, $y_1 \in B$. Pour tout couple $(x,y) \in A \times B$, l'inégalité triangulaire donne

$$d(x_1,y) \leq d(x_1,x) + d(x,y),$$

ce qui implique

$$d(x,y) \geq d(x_1,y) - d(x_1,x) \geq d(x_1,y) - \operatorname{diam} A.$$

On a donc $d(x,y) > d(x_1,y_1)$ dès que $d(x_1,y) > R := d(x_1,y_1) + \operatorname{diam} A$, et pour trouver l'inf des distances $d(x,y)$ lorsque $(x,y) \in A \times B$, on voit qu'il est inutile de considérer les points $y \in B$ hors de la boule fermée $B_f(x_1,R) = \{y \in E\,;\, d(x_1,y) \leq R\}$. Ceci montre que $d(A,B) = d(A,B')$ avec $B' = B \cap B_f(x_1,R)$. Or B' est une partie fermée bornée, donc compacte de E, et on en conclut d'après 2) que la distance $d(A,B) = d(A,B')$ est réalisée par un couple $(x_0,y_0) \in A \times B'$. En particulier $d(A,B) = d(x_0,y_0) > 0$.

5) Énoncer un théorème donnant des conditions suffisantes usuelles pour que la somme d'une série $\sum u_n(x)$ de fonctions continues u_n d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit continue, en termes de propriétés de la série de fonctions u_n.

Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n(x)$ de fonctions continues est uniformément convergente sur $[a,b]$, c'est-à-dire si les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{p=n_0}^{n} u_p(x)$ convergent "ponctuellement" en tout $x \in [a,b]$ vers une limite $S(x)$ et que l'on a de plus

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

alors la somme S est continue. On sait (par complétude de $\mathbb{R}$) que l'on a convergence uniforme si et seulement si le critère de Cauchy uniforme est satisfait, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p,q \geq N, \quad \forall x \in [a,b], \quad |S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon.$$

Une condition suffisante de convergence uniforme est la condition de convergence normale, à savoir que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty < +\infty \qquad \text{où} \quad \|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |u_n(x)|.$$

Exercice 1 [6 points + bonus]. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$, muni de la forme bilinéaire

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

1) Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et que $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ est une norme.

L'expression $\langle f,g \rangle$ est linéaire par rapport à f et g, symétrique (c'est-à-dire que $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle$) et on a

$$\langle f,f \rangle = \int_a^b f(x)^2\,dx \geq 0.$$

Du fait de la continuité de f, l'intégrale est nulle si est seulement si f est partout nulle. Par conséquent $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ est une norme (norme "préhilbertienne" associée à ce produit scalaire).

2) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

est une forme linéaire continue, et déterminer la norme $|||\varphi|||$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit ici

$$\big|\langle f,g\rangle\big| = \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \|f\|_2\|g\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Si on prend $g(x)=1$, il vient $\|g\|_2=\sqrt{b-a}$, d'où

$$|\varphi(f)| = |\langle f,g\rangle| \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_2,$$

et l'égalité a lieu si on prend pour f la fonction constante $f(x)=1$. On voit donc que φ est une forme linéaire continue, et que $|||\varphi||| = \sqrt{b-a}$.

3) On suppose désormais $[a,b]=[0,1]$ et on considère la suite $f_n(x)=e^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_2$ et en déduire qu'il s'agit d'une suite convergente. Sa limite dans E coïncide-t-elle avec la limite ponctuelle $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$?

Nous avons

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 e^{-2nx}\,dx = \Big[-\frac{1}{2n}e^{-2nx}\Big]_0^1 = \frac{1}{2n}(1-e^{-2n}) \quad\Rightarrow\quad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{1-e^{-2n}}.$$

Cette norme tend vers 0, par conséquent (f_n) converge vers la fonction nulle dans E. Cependant, la limite ponctuelle f vérifie $f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour $x\in\,]0,1]$, ce n'est donc pas la fonction identiquement nulle (et on notera d'ailleurs que cette limite ponctuelle n'appartient pas à l'espace E).

4) On considère la fonction $g : [0,1[\,\to\mathbb{R}$ telle que $g(x)=(1-x)^{-\alpha}$, $\alpha>0$ (qui n'est pas dans E). Rappeler quel est le développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ donné par la formule de Taylor. Dans la suite de la question, on admettra que l'on a un équivalent

$$(*)\qquad a_n \sim c_\alpha n^{\alpha-1}\quad\text{quand } n\to+\infty,$$

avec une constante $c_\alpha>0$. Si g_n est le polynôme de degré n donné par la somme partielle $\sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ de la série, montrer que g_n converge uniformément vers g sur tout intervalle $[0,1-\delta]$, $\delta\in\,]0,1[$.

La dérivée d'ordre n de $(1-x)^{-\alpha}$ est $\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,(1-x)^{-(\alpha+n)}$ comme on le voit à l'aide d'une récurrence sur n. La formule de Taylor avec reste de Lagrange appliquée au point 0 donne

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{p!}x^p + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}(1-\theta x)^{-(\alpha+n)}x^n$$

pour un certain $\theta\in\,]0,1[$. Si on pose $a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}$, alors la série $\sum_{n\ge0} a_nx^n$ est une série à termes positifs sur $[0,1[$, dont les sommes sont majorées par $(1-x)^{-\alpha}$. La série est donc bien convergente pour tout $x\in[0,1[$. On a de plus $\sup_{x\in[0,1-\delta]} a_nx^n \le a_n(1-\delta)^n$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,1-\delta]\subset[0,1[$. On sait que sa somme $S(x)$ est égale à $g(x)$ (c'est la formule classique de Newton, dont nous rappelons une preuve ci-dessous). En fait la dérivée des dérivées converge normalement sur tout intervalle $[0,1-\delta]$, et on voit ainsi par dérivation terme à terme que

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p)}{p!}x^p.$$

Or

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x) &= S'(x)-xS'(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p)}{p!}x^p-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)n}{n!}x^n\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)\big((\alpha+p)-p\big)}{p!}x^p=\alpha\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)}{p!}x^p=\alpha S(x)\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité

$$\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{\alpha}{1-x},$$

d'où après intégration $\ln S(x)=-\alpha\ln(1-x)$ puisque $S(0)=1$, et donc $S(x)=(1-x)^{-\alpha}=g(x)$ sur $[0,1[$.

5) Calculer à l'aide de $(*)$ un équivalent de $\|g_n-g_{n-1}\|_2$ lorsque $n\to+\infty$, et en déduire que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\alpha<1/2$. On suppose maintenant que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers un élément $h\in E$. Montrer que l'on devrait alors avoir $h=g$ sur l'intervalle $[0,1[$. L'espace E est-il complet ?

On a par définition $g_n(x)-g_{n-1}(x)=a_nx^n$ avec $a_n>0$, donc

$$\|g_n-g_{n-1}\|_2=a_n\left(\int_0^1 x^{2n}\,dx\right)^{1/2}=\frac{a_n}{\sqrt{2n+1}}\sim\frac{a_n}{\sqrt{2}\,n^{1/2}}\sim c_\alpha n^{\alpha-3/2}$$

d'après l'équivalent indiqué pour le coefficient a_n. Si $\alpha<1/2$, alors $\alpha-3/2<-1$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}n^{\alpha-3/2}$ est convergente. Ceci montre immédiatement que la suite (g_n) est de Cauchy dans E. En effet pour tous $q>p$ il vient

$$g_q-g_p=(g_q-g_{q-1})+\ldots+(g_{p+1}-g_p)\quad\Rightarrow\quad \|g_q-g_p\|_2\leq\sum_{n=p+1}^{q}\|g_n-g_{n-1}\|_2\leq C\sum_{n=p+1}^{q}n^{\alpha-3/2}$$

où C est une constante. La convergence de la série de Riemann montre alors que la somme $\sum_{n=p+1}^{q}n^{\alpha-3/2}$ est plus petite qu'un nombre $\varepsilon>0$ arbitrairement choisi lorsque $p,q\geq N_\varepsilon$ assez grand. Supposons que la suite (g_n) converge vers un élément h dans E. Ceci signifierait que $\|g_n-h\|_2$ tend vers 0. Or pour tout $\delta\in\,]0,1[$ on sait que (g_n) converge uniformément vers g sur $[0,1-\delta]$. Ceci entraînerait

$$\int_0^{1-\delta}|g(x)-h(x)|^2dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-\delta}|g_n(x)-h(x)|^2dx\leq\lim_{n\to+\infty}\|g_n-h\|_2^2=0.$$

Comme $g-h$ est continue sur $[0,1[$, on aurait donc $g-h=0$ sur tout intervalle $[0,1-\delta]$, et donc sur $[0,1[$. Mais ceci n'est pas possible car $h\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est continue au point 1 tandis que $\lim_{x\to1-0}g(x)=+\infty$. Cette contradiction montre que la suite (g_n) ne peut converger dans E, donc E n'est pas complet.

6) (Question bonus, 2 points) On pose $u_n=\log(a_n/n^{\alpha-1})$ pour $n\geq 1$. Déterminer un développement limité de u_n-u_{n-1} à l'ordre 2 en fonction des puissances de $1/n$ et en déduire $(*)$.

Comme $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)$, nous avons

$$\begin{aligned}u_n-u_{n-1}&=\log\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}}=\log\frac{\alpha+n-1}{n}+(\alpha-1)\log\frac{n-1}{n}\\ &=\log\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(\alpha-1)\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &=\left(\frac{\alpha-1}{n}-\frac{(\alpha-1)^2}{2n^2}\right)+(\alpha-1)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &=-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{\alpha(1-\alpha)}{2n^2}\end{aligned}$$

De même que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, la série $\sum(u_n-u_{n-1})$ est donc absolument convergente. Ceci entraîne que la suite (u_n) est elle aussi convergente. Si $\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n$, on a $\lim\frac{a_n}{n^{\alpha-1}}=\lim e^{u_n}=e^{\ell}$, donc $a_n\sim c_\alpha n^{\alpha-1}$ avec $c_\alpha=e^{\ell}$.

Exercice 2 [4 points]. On considère les espaces suivants :
$E_1=\mathbb{R}$ (avec la distance usuelle $d_1(x,y)=|x-y|$, $E_2=]0,1[$ et $E_3=[0,1[$ (avec la distance induite par d_1), $E_4=\mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne.

1) Déterminer parmi les espaces précédents quelles paires E_i, E_j, forment des espaces homéomorphes, en précisant un homéomorphisme explicite dans chaque cas.

Les espaces E_1 et E_2 sont homéomorphes, un homéomorphisme $\varphi:\mathbb{R}\to]0,1[$ est donné par exemple par $x\mapsto\frac{1}{1+e^{-x}}$. Il s'agit en effet d'une fonction continue strictement croissante, admettant comme limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. On verra au 2) qu'aucune autre paire E_i, E_j n'est constituée d'espaces homéomorphes.

2) Pour les paires non homéomorphes, donner un raisonnement précis justifiant la non existence d'un homéomorphisme.

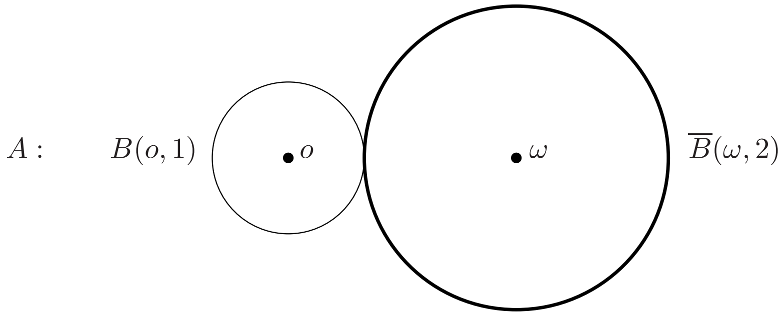
Vérifions que E_1, E_3, E_4 ne sont pas 2 à 2 homéomorphes (on peut éliminer E_2 qui est homéomorphe à E_1, la relation d'homéomorphie étant trivialement une relation d'équivalence). Supposons qu'il existe un homéomorphisme $\varphi:E_i\to E_j$. Il en résulte en particulier qu'en enlevant un point $a\in E_i$, la restriction $\varphi:E_i\smallsetminus\{a\}\to E_j\smallsetminus\{\varphi(a)\}$ est un homéomorphisme, donc $E_i\smallsetminus\{a\}$, $E_j\smallsetminus\{\varphi(a)\}$ doivent être tous deux connexes ou tous deux non connexes (et avoir dans ce cas le même nombre de composantes connexes, puisque celles-ci se correspondent par φ). Or, si on enlève un point p à $E_4=\mathbb{R}^2$, l'ensemble restant $\mathbb{R}^2\smallsetminus\{p\}$ reste connexe (et même connexe par arcs). Comme ni $\mathbb{R}$ ni $[0,1[$ ne restent connexes si on enlève le point $a=1/2$, on voit que $E_4=\mathbb{R}^2$ ne peut pas être homéomorphe à E_1 ou E_3. Maintenant, il ne peut pas exister non plus d'homéomorphisme $\varphi:E_3\to E_1$, car si on enlève le point $a=0$ à E_3, on a $E_3\smallsetminus\{a\}=]0,1[$ connexe, tandis que $E_1\smallsetminus\{\varphi(a)\}=\mathbb{R}\smallsetminus\{\varphi(a)\}$ est non connexe.

Exercice 3 [3 points]. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère l'origine $o=(0,0)$, le point $\omega=(3,0)$, et la partie

$$A=B(o,1)\cup\overline{B}(\omega,2)$$

où $B(p,r)$ désigne la boule ouverte de centre p et de rayon r (ici, un disque !).

1) Représenter A graphiquement. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ et l'intérieur A° : on donnera une justification complète.



L'intérieur et l'adhérence de A sont donnés par

$$A^\circ=B(o,1)\cup B(\omega,2),\qquad \overline{A}=\overline{B}(o,1)\cup\overline{B}(\omega,2),$$

en effet $B(o,1)\cup\overline{B}(\omega,2)$ est ouvert contenu dans A, $\overline{B}(o,1)\cup\overline{B}(\omega,2)$ est un fermé contenant A. Ces observations montrent déjà que

$$B(o,1)\cup B(\omega,2)\subset A^\circ\subset\overline{A}\subset\overline{B}(o,1)\cup\overline{B}(\omega,2).$$

De plus on voit que pour tout point p appartenant à la réunion des cercles $F=\Gamma(o,1)\cup\Gamma(\omega,2)$, le disque ouvert $B(p,\varepsilon)$ rencontre à la fois A et son complementaire $\complement A$. Il s'agit donc de points frontières, et par conséquent $\overline{A}$ contient F, tandis que A° ne contient aucun point de F. Ceci donne les égalités annoncées.

2) Les parties A, $\overline{A}$ et A° sont-elles connexes ? Sont-elles compactes ?

L'ensemble A contient le segment $[o,\omega]$ joignant les centres. On peut d'autre part relier le centre de chaque disque (ouvert ou fermé) à l'un quelconque de ses points par un segment. Ceci entraîne que A et $\overline{A}$ sont connexes par arcs. En revanche A°, qui est la réunion des deux ouverts disjoints $B(o,1)$ et $B(\omega,2)$, n'est pas connexe.

Maintenant, les compacts de $\mathbb{R}^2$ sont les fermés bornés. Les parties considérées sont bornées, mais seule $\overline{A}$ est fermée. Par conséquent $\overline{A}$ est compacte, mais A et A° ne le sont pas.

Exercice 4 [3 points].

Soit $(p_i)_{1\le i\le N}$ une famille finie de points de $\mathbb{R}^n$ et $b=\sum_{1\le i\le N}\lambda_i p_i$ leur barycentre pour des poids $\lambda_i\ge 0$ tels que $\sum_{1\le i\le N}\lambda_i=1$. On désigne par $K\subset\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces barycentres.

1) Montrer que K est une partie convexe bornée de $\mathbb{R}^n$.

Si $b'=\sum_{1\le i\le N}\lambda'_i p_i$ est un autre barycentre et $m=(1-t)b+tb'$, $t\in[0,1]$ un point du segment $[b,b']$, on voit que

$$m=\sum_{i=1}^{N}((1-t)\lambda_i+t\lambda'_i)p_i$$

avec $((1-t)\lambda_i+t\lambda'_i)\ge 0$ et $\sum((1-t)\lambda_i+t\lambda'_i)=(1-t)\sum\lambda_i+t\sum\lambda'_i=(1-t)+t=1$. Par conséquent $(1-t)b+tb'\in K$ et K est convexe. Si $R=\max\|p_i\|$ (pour une norme fixée sur $\mathbb{R}^n$), on trouve

$$\|b\|\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|p_i\|\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R=R$$

donc K est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que l'ensemble $\Delta\subset\mathbb{R}_+^N$ des coefficients $\lambda=(\lambda_i)\in\mathbb{R}_+^N$ tels que $\sum\lambda_i=1$ est compact. En déduire que K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble Δ est fermé, pusiqu'il est défini par égalités ou inégalités au sens large $\lambda_i\ge 0$, $\sum\lambda_i=1$ définies par des fonctions continues. L'ensemble Δ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^N$, c'est donc une partie compacte. Maintenant, K est l'image de Δ par l'application linéaire

$$\psi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^n,\qquad(\lambda_i)_{1\le i\le N}\mapsto\sum_{i=1}^{N}\lambda_i p_i.$$

Celle-ci est continue (comme toute application linéaire en dimension finie), on peut voir aussi directement qu'elle est lipschitzienne de rapport $\sum_{1\le i\le N}\|p_i\|$ pour la norme $\max_{1\le i\le N}|\lambda_i|$ sur $\mathbb{R}^N$. Il en résulte que $K=\psi(\Delta)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ comme image continue d'un compact de $\mathbb{R}^N$.