Théorème 2.2.7 : [Théorème d'inversion globale]

Soit $f : E \supset \mathcal{U} \longrightarrow F$ de classe C^k, $k \geq 1$.
On suppose que :
(i) f est injective ;
(ii) $\forall x \in \mathcal{U}$, $df(x) \in \mathcal{L}_c(E;F)$ est un isomorphisme.

Alors $f(\mathcal{U})$ est un ouvert de F et f est un C^k-difféomorphisme $\mathcal{U} \xrightarrow{f} f(\mathcal{U})$.

- Démonstration :

$\mathcal{U} \xrightarrow{f} f(\mathcal{U})$ est bijective.
Puis f est ouverte :
Soit $\Omega \subset \mathcal{U}$ un ouvert ; $\forall x \in \Omega$, $\exists \mathcal{V} \subset \Omega$ un voisinage ouvert de x t.q $\mathcal{V} \xrightarrow{f|_{\mathcal{V}}} W$ soit un voisinage de $f(x)$ (thm d'inversion locale).
$f(\Omega) \supset f(\mathcal{V}) = W$, donc $f(\Omega)$ est un voisinage de chacun de ses points $\Rightarrow f(\Omega)$ est ouvert.
On a $f^{-1} : f(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U}$ est localement C^k, donc globalement C^k. $\square$

* Remarques :

- Si $\mathcal{U} = F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{U} =]a,b[$, alors (ii) signifie que $f' \neq 0 \Rightarrow f'$ est de signe constant $\Rightarrow f$ strictement monotone $\Rightarrow f$ injective $\Leftrightarrow$ (i).
- Si $E = F = \mathbb{C}$, $f : \exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe
$df(z)(h) = \exp(z)h$, $df(z) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$
(ii) est satisfaite, mais (i) ne l'est pas :
$\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$.

Chapitre 3 - Sous-variétés différentiables

I. Définitions :

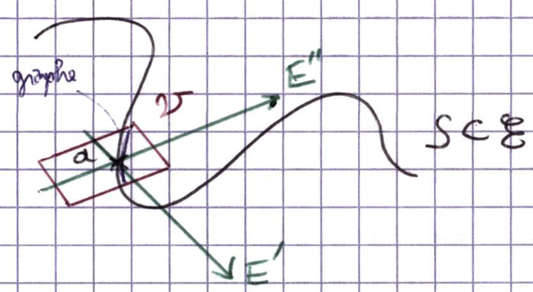
Soient $n \geq 1$, $n < +\infty$, et $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$ un espace affine de direction E un espace de Banach.

Définition 3.1.1 :

Un sous-ensemble $S \subset \mathcal{E}$ est appelé <u>sous-variété différentiable</u> (ou différentielle) de dimension p et de classe C^k, si l'une des conditions suivantes équivalentes est satisfaites : $\exists k \in [\![1, +\infty]\!]$ et

(i) "Écriture locale comme un graphe C^k-différentiable" :
$\forall a \in S$, il existe une somme directe $E = E' \oplus E''$ où $\dim E' = p$, $\dim E'' = (n-p)$, et il existe un voisinage $V = V' \oplus V''$ de 0_E t.q (en plaçant l'origine de $\mathcal{E}$ au point a) on a :

$$\underbrace{S \cap (a+V)}_{\subset \mathcal{E}} \underset{\mathcal{E} \simeq E}{\simeq} \underbrace{\{ (x', x'') = (x', g(x')) \,;\, g \text{ différentiable de classe } C^k \text{ de } V' \text{ dans } V'' \}}_{\text{graphe}}.$$



(ii) S se laisse localement définir par des équations au nombre de $q = n - p$:
$\forall a \in S$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathcal{E}$ t.q

$$S \cap \mathcal{V} = \{ x \in \mathcal{V} \,;\, f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0 \}$$

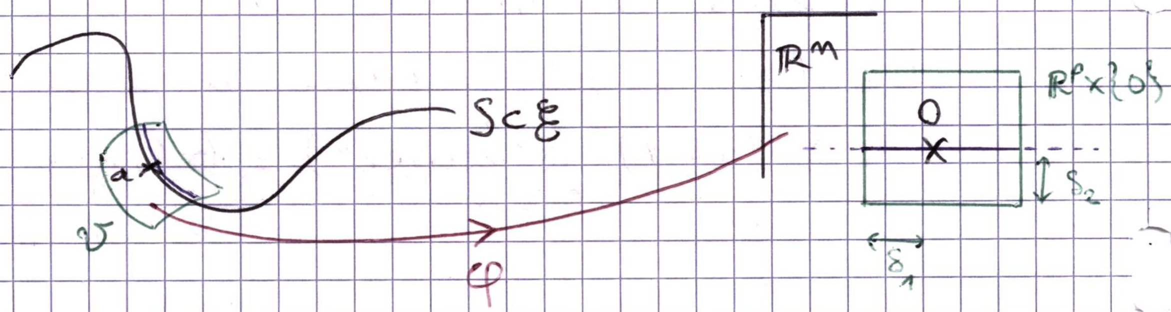
où $f_j : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de classe C^k et les différentielles $df_1(x), \dots, df_q(x)$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in \mathcal{V}$, i.e. les lignes de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}}_{rg = q}$$ sont indépendantes.

(ii') Idem mais avec $df_1(a), \dots, df_q(a)$ linéairement indépendantes.

(iii) Existence de "C^k-difféomorphismes aplatissants" : $\forall a \in S$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathcal{E}$ et un C^k-difféomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ où $W = \prod_{j=1}^{n}]-\delta_j, \delta_j[$ pavé centré en $0_{\mathbb{R}^n}$ de sorte que

$$\varphi(S \cap \mathcal{V}) = W \cap \mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}, \quad \varphi(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$$



Proposition 3.1.2 :

[(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (i).

- **Démonstration :**

(ii) $\Rightarrow$ (ii') : Évident.

(ii') $\Rightarrow$ (i) : $\mathcal{E} \simeq E$, $a = 0_E$ (changement d'origine).

On a $f_1(0) = \dots = f_q(0) = 0$.

Il existe des colonnes $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$ t.q $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)_{\substack{1 \le i \le q \\ j = j_1, \dots, j_q}}$ soit une matrice $q \times q$ inversible.

Thm des fonctions implicites :

$\mathbb{R}^p \simeq E' = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ x_{j_1} = \dots = x_{j_q} = 0 \}$,

$\mathbb{R}^q \simeq E'' = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ x_j = 0 \text{ pour } j \notin \{j_1, \dots, j_q\} \}$.

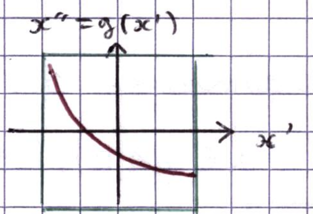
On a donc un voisinage $V = V' \times V''$ tq

$S \cap V = \{ x \in V ;\ f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0 \}$

$= \{$ graphe d'une application C^k $g : E' \supset V' \to V'' \subset E'' \}$

(on peut dc tjs choisir E', E'' comme somme directe des axes dans $\mathbb{R}^n$).

(i) $\Rightarrow$ (iii) : On définit

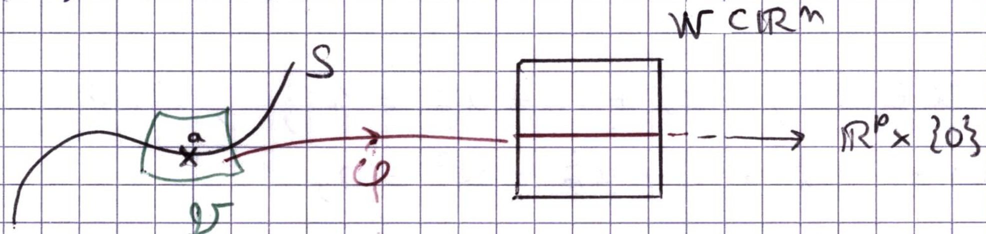


$$\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x' \\ x'' - g(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \in E' \times E''.$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' + g(y') \end{pmatrix} \overset{\varphi^{-1}}{\longleftarrow\!\shortmid} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

φ est un difféomorphisme. Par bijection, on a $E' \times E'' \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) :



$\varphi(S \cap \mathcal{V}) = W \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$

$\Rightarrow S \cap \mathcal{V} = \varphi^{-1}(W \cap \mathbb{R}^p \times \{0\})$,

$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, donc

$x \in S \cap \mathcal{V} \iff x \in \mathcal{V}$ et $\varphi_{p+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$:

on a donc $q = n - p$ équations.

Or, les lignes $d\varphi_i(x)$ sont extraites de $\mathrm{Mat}(d\varphi(x))$ qui est inversible, donc $(d\varphi_i(x))_{p+1\leq i\leq n}$ indépendantes. $\square$

Définition 3.1.3 :

$\left[\begin{array}{l} p = \dim S \quad \{ \text{nbr de paramètres indépendants} \\ q = n-p = \operatorname{Codim} S \quad \{ \text{nbr d'équations à différentielles indépendantes} \end{array}\right.$

*** Exemples :**

(i) Sur $\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=1$ (cercle unité)

↳ 1 équation : $f(x,y) = x^2+y^2-1$ (ii)

$df(x,y) = 2x\,dx + 2y\,dy$ $\quad \{ dx, dy$ base de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

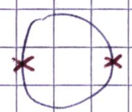
ne s'annule pas sur le cercle (donc 1 différentielle indépendante).

$\Longrightarrow$ sous-variété de dimension et de codimension 1.

ALT | avec (i), soit $a=(x_0,y_0)$ avec $a \notin \{(1,0),(-1,0)\}$

$E' = \mathbb{R}\times\{0\} \leftarrow$ pour $y_0>0$, $y=g(x)=\sqrt{1-x^2}$

$E'' = \{0\}\times\mathbb{R} \leftarrow$ pour $y_0<0$, $y=g(x)=-\sqrt{1-x^2}$



| Au voisinage de $(1,0)$, $x=\sqrt{1-y^2} \rightarrow E'=\{0\}\times\mathbb{R}$
| Au voisinage de $(-1,0)$, $x=-\sqrt{1-y^2} \rightarrow E''=\mathbb{R}\times\{0\}$

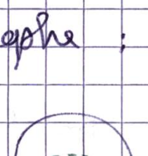
(ii) $S_n = \{ x\in\mathbb{R}^n ;\ x_1^2+\dots+x_n^2 = R^2 \}$, $R>0$.

↳ $f(x) = x_1^2+\dots+x_n^2-R^2=0$,

et $df(x) = 2x_1\,dx_1+\dots+2x_n\,dx_n$ ne s'annule qu'en $0_{\mathbb{R}^n} \notin S_n$ ✓.

Donc S_n est une sous-variété de codimension 1 (1 équations) et de dimension $n-1$ $\left(x_k^2 = R^2 - \sum_{j\neq k} x_j^2\right)$.

Graphe : $x_n = \pm\sqrt{R^2-\sum_{j\neq n} x_j^2}$ hors du cercle équatorial



↳ **Remarque :** Si $R=0$, on n'obtient pas une ss-variété de codimension 1 : on a $df(x)=0$ en $x=0\in S_n$.

Proposition 3.1.4 :

Une sous-variété S est une partie localement fermée de $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.5 :

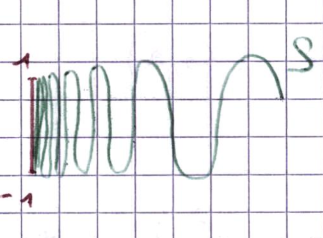
Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.
A est <u>localement fermé</u> si pour tout point a il existe un voisinage ouvert V de a dans X t.q
$A \cap V$ est fermé dans X i.e $A \cap V = \overline{A} \cap V$,
ou de manière équivalente,
$A = O \cap F$ O ouvert, F fermé,
ou bien
A est un fermé de $O \subset E$, O un ouvert

- Démonstration :

$$S \cap \mathcal{V} = \{ x \in \mathcal{V} \ ; \ f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0 \}$$
$$= \bigcap_{j=1}^{q} f_j^{-1}(\{0\}) \quad \text{avec} \quad f_j \text{ diff} \Rightarrow \text{continues}. \ \square$$

***Exemple :**

↳ graphe dans $\mathbb{R}^2$ de $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.
C'est une sous-variété de dimension 1.



$\rightarrow \overline{S} = S \cup \{0\} \times [-1, 1]$.

Au voisinage V d'un point $a \in \{0\} \times [-1,1]$, il est impossible de trouver des équations t.q $S \cap V = \{ x \in V ; f_j(x) = 0, \ 1 \leq j \leq q \}$.
(SINON, S fermé)

Il est donc intéressant de savoir dans quel(s) ouvert(s) S est un fermé. Ici, on peut prendre $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,
$U' =]0, +\infty[\times]-2, 2[$,
$U'' = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.6 :

Pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^n$, il existe $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ t.q

- $f \geq 0$,
- $\mathbb{R}^n \supset \{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, f(x) = 0 \} = F$.

Lemme 3.1.7 :

Il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ t.q $u(x) = e^{-1/x}$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $u(x) = 0$ pour $x \in]-\infty, 0]$.

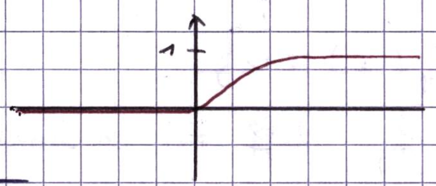
- Démonstration :

$$u'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

$$\vdots$$

$$u^{(k)}(x) = P_k(x)\, e^{-1/x}$$ (récurrence sur k, P_k polynôme de degré k)

et $\lim\limits_{x \to 0^+} u^{(k)}(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} u^{(k)}(x)$.

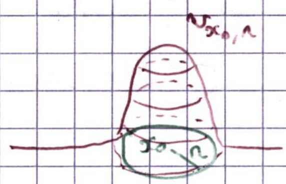


$\square$

Lemme 3.1.8 :

$\forall B_{\|\cdot\|_2}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, v_{x_0,r} \in C^\infty(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$ t.q

$$\begin{cases} v_{x_0,r} > 0 & \text{sur } B_{\|\cdot\|_2}(x_0, r) \\ v_{x_0,r} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus B_{\|\cdot\|_2}(x_0, r) \end{cases}$$



- Démonstration :

$v_{x_0,r} : x \mapsto u(r^2 - \|x - x_0\|^2)$ avec $u : x \mapsto e^{-1/x}$. $\square$

– Démonstration de la proposition 3.1.6 :

On définit $\mathcal{U} := \mathbb{R}^n \setminus F$.

$\mathcal{U}$ est une réunion dénombrable de boules

($\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n \rightarrow \tau_{\mathbb{R}^n}$ est à base dénombrable

$\rightarrow$ prendre les boules $B_p = B(x_p, r_p)$ $x_p \in \mathbb{Q}^n$, $r_p \in \mathbb{Q}_+^*$).

Il existe $v_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \geq 0$ t.q

$$\begin{cases} v_p > 0 & \text{sur } B_p \\ v_p = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus B_p \end{cases}$$

On pose :

$$f(x) := \sum_{p=0}^{+\infty} \varepsilon_p v_p(x)$$

avec $\varepsilon_p \underset{p}{\searrow} 0$, $\varepsilon_p > 0$, où l'on prend

$$\varepsilon_p \text{ t.q } \varepsilon_p \Big(1 + \sup_{x \in \overline{B}(0,p)} \Big(\max_{0 \leq k \leq p} \underbrace{|||d^k v_p(x)|||}_{\text{existe}} \Big) \Big) = 2^{-p}.$$

existe : $\overline{B}_p$ compacts, v_p C^∞ ✓

Donc :

$$\sum_{p \geq p_0} \varepsilon_p d^k v_p(x) < +\infty$$

sur la boule $\overline{B}(0, p_0)$ pour $k \leq p_0$,

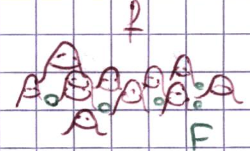
car $\| \varepsilon_p d^k v_p(x) \| \leq 2^{-p}$.

Par le thm de cvgence uniforme de fctions C^∞,

on a que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On a bien

$f > 0$ sur $\bigcup_p B_p = \mathcal{U} = \mathbb{R}^n \setminus F$

et $f = 0$ sur F. $\square$



---

* Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

  $S := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ f(x,y,z) = 0 \}$

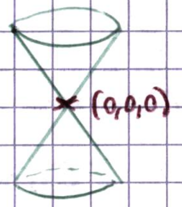
$\hookrightarrow$ $df(x,y,z) = 2x\,dx + 2y\,dy - 2z\,dz \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

s'annule à l'origine $(0,0,0) \in S$!

(i) On a que $S \setminus \{(0,0,0)\}$ est une sous-variété fermée C^∞ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

de codimension 1 et

de dimension $3-1=2$.

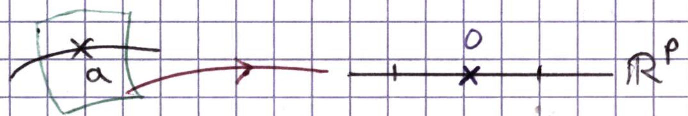


(ii) Observation : si S est une sous-variété au voisinage d'un point $a \in S$, alors il existe des voisinages arbitrairement petits V de a tq

$(S \setminus \{a\}) \cap V$ soit | connexe si $p \geq 2$ ← $B(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$ connexe si $p \geq 2$

| t.q il y a 2 comp. connexes si $p=1$

$]-\varepsilon, 0[\cup]0, +\varepsilon[$



Si C_ε est le cylindre défini par

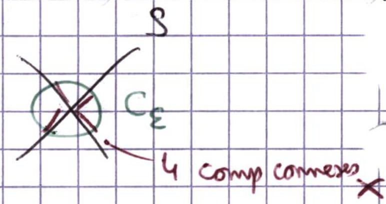
$$C_\varepsilon \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 < \varepsilon^2 \\ z \in]-\varepsilon, \varepsilon[\end{array} \right. \right\},$$

alors $S \cap C_\varepsilon = \underbrace{(S^+ \cap C_\varepsilon)}_{} \cup \underbrace{(S^- \cap C_\varepsilon)}_{}$

2 comp. connexes ✓

avec

$$S^\pm = \{ x^2+y^2-z^2 = 0 \, ; \, z \gtrless 0 \}.$$



- Dans $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = x^2 - y^2$
- Dans $\mathbb{R}^n$: $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2$

↳ $S = \{x_1 = 0\}$ sous-variété mais $df \equiv 0$ sur S

(hyp. non vérifiée, mais résultat vrai : ⚠).

*** Exemple :**

E e.v. de dimension n sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ q forme quadratique non dégénérée :

il existe une base t.q

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2)$$

↳ signature $(r, n-r)$, $S = \{x \in E \,;\, q(x) = 0\}$.

- Si $r = 0$ ou n, $S = \{0\}$ (sommet du cône isotrope) ;
- Si $0 < r < n$, $S \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $E \setminus \{0\}$ (pas une ss-variété au voisinage de 0).

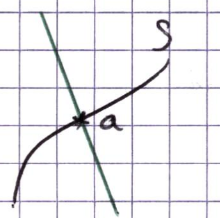
Lemme 3.1.7 :

Si S est une sous-variété définie localement par un système d'équations $f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0$ pour $1 \leq q < n$ près d'un point a, avec $df_1(a), \dots, df_q(a)$ indépendantes,

Hyperplan : $H = u(x-a) = 0$

il existe $u \in (\mathbb{R}^n)^*$ t.q

$\left| \begin{array}{l} f_{q+1}(x) = u(x-a) \\ df_{q+1}(x) = u \end{array} \right\}$ $df_1(a), \dots, df_q(a), u$ indépendantes



et donc il existe un hyperplan H t.q $S \cap H$ est encore ss-variété près de a.