

Cours de calcul différentiel

Licence de mathématiques, L3A

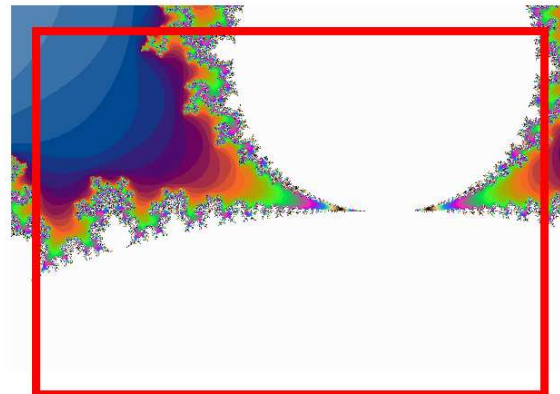
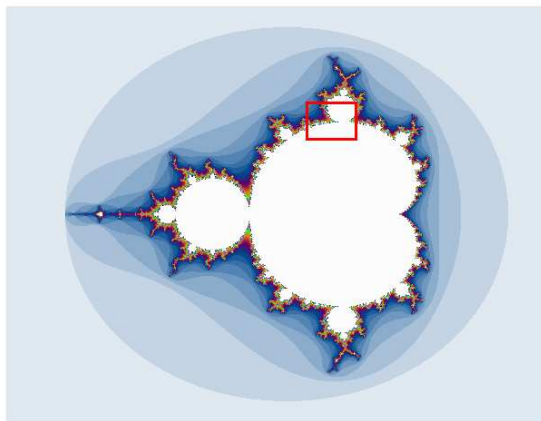
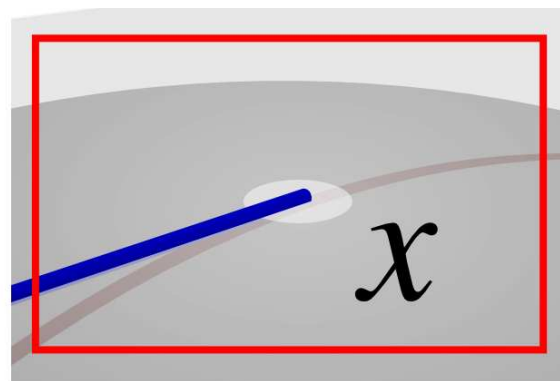
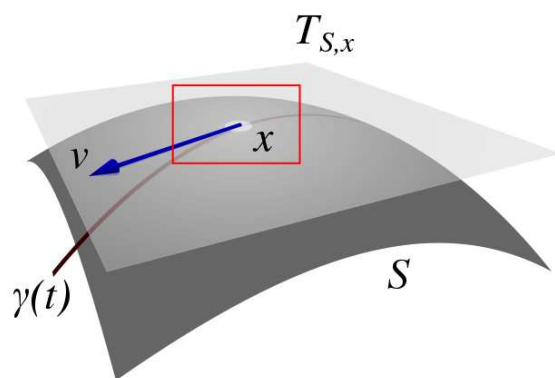
Jean-Pierre Demailly

Université Joseph Fourier Grenoble I

Année universitaire 2013-2014

Introduction

Le but du calcul différentiel est essentiellement de comprendre les phénomènes mathématiques qui interviennent à une petite échelle de taille, afin de manipuler ce que les physiciens appellent parfois les “infiniment petits”. Dans la plupart des situations étudiées, le fait de “zoomer” une petite partie d’un objet différentiable a pour effet de rendre cette partie de plus en plus proche d’un objet linéaire ; ainsi une surface différentiable est approchée par son plan tangent au voisinage de chaque point.



On notera qu’il existe des objets géométriques plus compliqués, comme les ensembles fractals, qui n’ont pas cette propriété : le fait de zoomer indéfiniment ne conduit pas à une simplification de l’objet.

Outre la manipulation des infiniment petits, un aspect essentiel du calcul différentiel est de ramener la solution de problèmes différentiables à des problèmes linéaires, au prix d'une erreur qui devient négligeable à petite échelle. Dans cette perspective, on est donc conduit à faire intervenir de nombreux outils de l'algèbre linéaire. La plupart des grands théorèmes affirment que si une certaine hypothèse portant sur les objets linéarisés a lieu, alors la même conclusion s'applique aux objets différentiables, au moins sur de petits voisinages. Nous travaillerons ici dans le cadre des espaces de Banach, car la propriété de complétude est essentielle pour assurer l'existence de limites ; de la même manière qu'il existe des suites de rationnels qui ne convergent que dans le corps \mathbb{R} des réels, le calcul différentiel souffrirait de nombreuses lacunes dans des espaces non complets. Une grande partie des applications intéressantes se situe déjà en dimension finie, voire en dimension 1, 2 ou 3, mais le fait de travailler dans des espaces de Banach E plutôt que \mathbb{R}^n a d'une part, l'avantage de dégager le caractère géométrique intrinsèque des propriétés, et d'autre part, de fournir des notations très compactes : ainsi, il est plus simple de noter $h \in E$ que $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Il nous a paru également utile de distinguer points et vecteurs, les vecteurs apparaissant souvent comme de petits déplacements h effectués à partir d'un point x pour aboutir à un point $x + h$; nous avons donc rappelé à cet effet les notions élémentaires concernant les espaces affines. Ceci permet de dégager plus systématiquement la nature affine ou vectorielle des notions en fonction des situations mises en jeu.

Table des matières

Introduction	1
Table des matières	3

Chapitre 0

Préliminaires d'analyse et de géométrie

1. Espaces de Banach, applications linéaires et multilinéaires continues	5
2. Intégrale de Kurzweil-Henstock à valeur vectorielle	10
3. Espaces affines	20

Chapitre I

Fonctions différentiables et dérivées successives

1. Application linéaire tangente et dérivées directionnelles	27
2. Opérations algébriques sur les différentielles	32
3. Différentiation dans une algèbre de Banach	36
4. Formule des accroissements finis	39
5. Fonctions ayant des dérivées partielles continues	42
6. Différentielles d'ordre quelconque	43
7. Formule de Taylor	49
8. Limites uniformes de fonctions différentiables	53
9. Extrema locaux	57
10. Fonctions convexes	62

Chapitre II

Méthode du point fixe et théorème des fonctions implicites

1. Le théorème du point fixe	67
2. Méthodes itératives, points fixes attractifs et répulsifs	69
3. Méthode de Newton	78
4. Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites	85

Chapitre III

Sous-variétés différentiables

1. Notion de sous-variété différentiable	97
2. Espace tangent à une sous-variété en un point	98
3. Immersions, submersions, théorème du rang constant	99
4. Sous-variétés paramétrées	108
5. Problèmes	109

Chapitre IV

Équations différentielles, théorèmes généraux

1. Définitions. Solutions maximales et globales	113
2. Théorème d'existence des solutions	119

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz	127
4. Équations différentielles d'ordre supérieur à un	134
5. Problèmes	135

Chapitre V

Méthodes de résolution explicites

1. Équations du premier ordre	145
2. Équations du premier ordre non résolues	160
3. Problèmes géométriques	166
4. Équations différentielles du second ordre	173
5. Problèmes	182

Chapitre VI

Équations différentielles linéaires

1. Généralités	187
2. Cas des coefficients constants	188
3. Équations d'ordre p à coefficients constants	195
4. Cas des coefficients variables	201
5. Problèmes	206

Chapitre VII

Stabilité des solutions et points singuliers d'un champ de vecteurs

1. Stabilité des solutions	211
2. Singularités d'un champ de vecteurs	217
3. Problèmes	226

Chapitre VIII

Équations différentielles dépendant d'un paramètre

1. Dépendance des solutions	229
2. Petites perturbations	237
3. Problèmes	243

Chapitre 0

Préliminaires d'analyse et de géométrie

1. Espaces de Banach, applications linéaires et multilinéaires continues

Cette section est destinée à fixer les notations et à rappeler quelques résultats importants concernant les espaces de Banach. Nous renvoyons à un cours spécialisé sur la topologie des espaces normés pour plus de détails.

1.1. Définition. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ayant les trois propriétés suivantes :

- (i) (séparation) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (ii) (homogénéité) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (iii) (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous $x, y \in E$.

A partir d'une norme, on définit une distance sur E en posant

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

ce qui fournit une structure d'espace métrique (E, d) et donc une topologie sur E .

1.2. Définition. L'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente dans E . On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

1.3. Proposition. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) u est continue sur E .
- (ii) u est continue en 0.
- (iii) $M = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F < +\infty$.
- (iv) Il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E$, pour tout $x \in E$.

On dit alors que u est une application linéaire continue (ou bornée).

Démonstration. Il est évident que (i) \Rightarrow (ii). Montrons que (ii) \Rightarrow (iii). Si u est continue en 0, il existe une boule $B_E(0, r) \subset E$ assez petite sur laquelle $\|u(x) - u(0)\|_F = \|u(x)\|_F < \varepsilon = 1$, donc $u(B_E(0, r)) \subset B_F(0, 1)$. Par homothétie

et passage à l'adhérence ceci entraîne que $u(\overline{B}_E(0, \lambda r)) \subset \overline{B}_F(0, \lambda)$, donc en prenant $\lambda = r^{-1}$ on voit que $M = \sup_{x \in \overline{B}_E(0,1)} \|u(x)\|_F \leq r^{-1} < +\infty$.

Supposons maintenant que (iii) ait lieu. Pour $x \in E \setminus \{0\}$ on a $\frac{1}{\|x\|_E}x \in \overline{B}_E(0, 1)$, donc

$$\left\| u\left(\frac{1}{\|x\|_E}x\right) \right\| \leq M \implies \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \quad \text{i.e. (iv) est vérifié.}$$

Enfin, si (iv) est vérifié, on obtient par linéarité pour tous $x, y \in E$

$$\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x - y)\|_F \leq M\|x - y\|_E$$

donc (i) u est continue sur E . □

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de E dans F , et pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on définit la *norme d'opérateur* de u par

$$(1.4) \quad \|u\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On voit en effet que l'application $u \mapsto \|u\|$ est bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. D'autre part, si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$, on vérifie que $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et que

$$(1.5) \quad \|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|.$$

Si E est de dimension finie n , soit (e_1, \dots, e_n) une base de E sur le corps \mathbb{K} . On a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\Psi : \mathbb{K}^n \rightarrow E, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \Psi(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j e_j$$

qui est clairement continu. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, Ψ est aussi un homéomorphisme. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire dans un espace normé F quelconque, on peut écrire

$$\begin{aligned} u\left(\sum_{1 \leq j \leq n} x_j e_j\right) &= \sum_{1 \leq j \leq n} x_j u(e_j), \\ \left\| u\left(\sum_{1 \leq j \leq n} x_j e_j\right) \right\|_F &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \sum_{1 \leq j \leq n} \|u(e_j)\|_F. \end{aligned}$$

Si on munit E de la norme $\|x\|_E = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, ceci entraîne que u est continue de norme d'opérateur $\|u\| \leq \sum_{1 \leq j \leq n} \|u(e_j)\|_F$. On a donc

$$(1.6) \quad \mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \quad \text{si } E \text{ est de dimension finie.}$$

1.7. Proposition. *Si F est complet, $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'est aussi, autrement dit, c'est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (u_j) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ pour la norme $\|\cdot\|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0(\varepsilon)$ tel que pour $j, k \geq N_0(\varepsilon)$ on ait $\|u_j - u_k\| \leq \varepsilon$. Pour $x \in E$ fixé, on voit que

$$\|u_j(x) - u_k(x)\|_F = \|(u_j - u_k)(x)\|_F \leq \|u_j - u_k\| \|x\|_E \leq \varepsilon \|x\|_E,$$

donc la suite $(u_j(x))$ est une suite de Cauchy dans F . Soit $u(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} u_j(x)$ sa limite. Il est immédiat que u est linéaire. D'autre part l'inégalité précédente fournit à la limite

$$\|u(x) - u_k(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \implies \|u(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E + \|u_k(x)\|_F \leq (\varepsilon + \|u_k\|) \|x\|_E,$$

et par conséquent u est bien continue. Enfin l'inégalité ci-dessus donne $\|u - u_k\| \leq \varepsilon$ pour $k \geq N_0(\varepsilon)$, donc (u_k) converge vers u dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. \square

1.8. Théorème de Baire. *Dans un espace métrique complet (X, d) non vide*

- (i) *toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense ;*
- (ii) *toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide ;*
- (iii) *si l'espace entier est réunion dénombrable de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert non vide.*

Démonstration. Montrons d'abord (i). On note d la distance de X et $B(x, r)$, resp. $\overline{B}(x, r)$, l'ensemble des y tels que $d(x, y) < r$, resp. $d(x, y) \leq r$ (boules ouvertes et fermées). Pour établir (i), soient $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ouverts denses de X et V un ouvert non vide de X . Comme U_1 est dense, l'ouvert $V \cap U_1$ contient une boule fermée $\overline{B}(x_1, r_1)$, et on peut supposer $0 < r_1 < 1$. Comme U_2 est dense, la boule ouverte $B(x_1, r_1)$ rencontre U_2 , d'où une boule fermée $\overline{B}(x_2, r_2)$ telle que $\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap U_2 \subset V \cap U_1 \cap U_2$, et on peut supposer $0 < r_2 < 1/2$. Par récurrence, on construit ainsi des boules fermées emboîtées $\overline{B}(x_n, r_n)$ telles que, pour $n \geq 2$ on ait $\overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$ et $0 < r_n < 1/n$, ce qui implique de proche en proche

$$\overline{B}(x_n, r_n) \subset V \cap U_1 \cap \dots \cap U_n.$$

Les centres x_n forment une suite de Cauchy : en effet, si $p \geq n$ on a $x_p \in \overline{B}(x_n, r_p) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$, donc $d(x_n, x_p) < 1/n$. Comme X est complet, la suite (x_p) converge vers une limite $x = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p$ et $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$ pour tout $n \geq 1$. Ceci implique $x \in V \cap \bigcap_{n \geq 1} U_n$. Par suite l'ouvert V rencontre l'intersection $\bigcap_{n \geq 1} U_n$, et comme V était arbitraire, on a bien montré que $\bigcap_{n \geq 1} U_n$ est un ouvert dense.

(ii) se déduit de (i) par passage aux complémentaires.

(iii) Si tous les fermés étaient d'intérieur vide, leur réunion le serait aussi, et elle ne pourrait donc coïncider avec l'espace entier. \square

1.9. Théorème de l'application ouverte de Banach. *Soient E et F deux espaces de Banach, et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective de E sur F . Alors u est une application ouverte (l'image par u de tout ouvert de E est un ouvert de F).*

Démonstration. Soit $B_E = B_E(0, 1)$ la boule unité ouverte de E . Comme E est la réunion des boules homothétiques nB_E on a

$$F = u(E) = \bigcup_{n \geq 1} u(nB_E) = \bigcup_{n \geq 1} \overline{u(nB_E)}.$$

D'après le théorème de Baire, on en déduit que l'un des fermés $\overline{u(n_0 B_E)}$ est d'intérieur non vide, donc contient une certaine boule ouverte $B_F(y_0, r_0)$ de F . Ceci implique

$$B_F(0, 2r_0) = B_F(y_0, r_0) - B_F(y_0, r_0) \subset \overline{u(n_0 B_E)} - \overline{u(n_0 B_E)} \subset \overline{u(2n_0 B_E)}$$

[en prenant une différence de suites situées dans $n_0 B_E$ dont les images converge vers un point $y = y_1 - y_2 \in B_F(y_0, r_0) - B_F(y_0, r_0)$]. Après homothétie, ceci montre que $\overline{u(B_E)}$ contient la boule $B_F(0, \delta)$ de rayon $\delta = r_0/n_0$, et de même que $\overline{u(2^{-k} B_E)}$ contient $B_F(0, 2^{-k} \delta)$. Fixons $y \in F$, $y \neq 0$. On a $y_0 = \frac{\delta}{2\|y\|_F} y \in B_F(0, \delta)$, donc il existe $x_0 \in B_E$ tel que $u(x_0)$ soit arbitrairement proche de y_0 , disons $\|y_0 - u(x_0)\|_F < 2^{-1} \delta$. Le vecteur $y_1 = y_0 - u(x_0)$ est dans la boule $B_F(0, 2^{-1} \delta)$, donc il existe $x_1 \in 2^{-1} B_E$ tel que $\|y_1 - x_1\|_F < 2^{-2} \delta$. Par récurrence, on construit ainsi $x_k \in 2^{-k} B_E$ tel que

$$y_{k+1} = y_k - u(x_k)$$

vérifie $\|y_{k+1}\|_F < 2^{-k-1} \delta$. Par construction $y_{k+1} = y_0 - u(x_0 + x_1 + \dots + x_k)$, et la somme $\sigma = \sum_{k \geq 0} x_k$ est convergente dans E puisque $\|x_k\|_E < 2^{-k}$. On obtient ainsi $y_0 = u(\sigma)$ avec $\|\sigma\|_E < 2$, d'où $y = \frac{2\|y\|_F}{\delta} y_0 = u(x)$ avec $x = \frac{2\|y\|_F}{\delta} \sigma$, $\|x\| \leq \frac{4}{\delta} \|y\|$. Ceci montre que $u(B_E(0, r))$ contient $B_F(0, \frac{\delta r}{4})$ et il en résulte facilement par translation que u est une application ouverte. \square

1.10. Corollaire : théorème des isomorphismes de Banach. Soient E et F deux espaces de Banach, et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et bijective de E sur F . Alors l'application réciproque $u^{-1} : F \rightarrow E$ est continue, autrement dit u est une isomorphisme d'espaces de Banach.

Démonstration. D'après le théorème de l'application ouverte $u(B_E(0, 1))$ contient une certaine boule ouverte $B_F(0, r_1)$, $r_1 > 0$. On a donc $u^{-1}(B_F(0, r_1)) \subset u^{-1}(u(B_E(0, 1))) \subset B_E(0, 1)$, et après homothétie $u^{-1}(B_F(0, 1)) \subset B_E(0, 1/r_1)$. Ceci montre que u est une application linéaire continue telle que $\|u\| \leq 1/r_1$. \square

On va voir que la Proposition 1.3 s'étend de manière très analogue au cas des applications multilinéaires.

1.11. Proposition. Soient F et E_j , $1 \leq j \leq p$, des espaces normés sur le corps \mathbb{K} (toutes les normes seront notées $\|\cdot\|$ pour simplifier). Soit

$$\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$$

une application multilinéaire ; on munit $E_1 \times \dots \times E_p$ de la topologie produit. Alors il y a équivalence entre :

- (i) Φ est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$.
- (ii) Φ est continue en $(0, \dots, 0)$.
- (iii) $M = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_p\| \leq 1} \|\Phi(x_1, \dots, x_p)\| < +\infty$.
- (iv) Il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ on ait l'inégalité

$$\|\Phi(x_1, \dots, x_p)\| \leq M\|x_1\| \dots \|x_p\|.$$

On dit alors que Φ est une application multilinéaire continue (ou bornée).

Démonstration. Il est évident que (i) \Rightarrow (ii). Montrons que (ii) \Rightarrow (iii). Si Φ est continue en $(0, \dots, 0)$, il existe un voisinage de $(0, \dots, 0)$ dans la produit, soit $B_{E_1}(0, r_1) \times \dots \times B_{E_p}(0, r_p)$ sur lequel $\|\Phi(x_1, \dots, x_p)\| < \varepsilon = 1$. Par homothétie et passage à l'adhérence on voit facilement que

$$M = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_p\| \leq 1} \|\Phi(x_1, \dots, x_p)\| \leq \frac{1}{r_1 \dots r_p}, \quad \text{d'où (iii).}$$

Si (iii) est vérifié, (iv) s'en déduit en remplaçant x_j par $\frac{1}{\|x_j\|}x_j$ (compte tenu du fait que (iv) est aussi trivialement vérifié si $x_j = 0$). Enfin, si (iv) est vérifié, on prend des éléments $x_j, h_j \in E_j$, $1 \leq j \leq p$, quelconques et on part de l'identité de "distributivité"

$$(1.12) \quad \Phi(x_1 + h_1, \dots, x_p + h_p) = \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} \Phi(x_j, h_k)_{j \in \mathbb{C}I, k \in I, <}$$

où la notation $(x_j, h_k)_{j \in \mathbb{C}I, k \in I, <}$ désigne le p -uplet ordonné dont la i -ième composante est x_i si $i \in \mathbb{C}I$ et h_i si $i \in I$, par exemple $(h_1, x_2, x_3, h_4, x_5)$ si $I = \{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Le sommation comporte exactement 2^p termes (autant que de parties de $\{1, \dots, p\}$). En utilisant (iv) pour chaque terme, on en déduit

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \|\Phi(x_1 + h_1, \dots, x_p + h_p) - \Phi(x_1, \dots, x_p)\| &\leq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, p\}} \|\Phi(x_j, h_k)_{j \in \mathbb{C}I, k \in I, <}\| \\ &\leq M \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, p\}} \prod_{i \in \mathbb{C}I} \|x_i\| \prod_{i \in I} \|h_i\|. \end{aligned}$$

Si l'on pose $x = (x_i)$, $h = (h_i)$, $\|x\| = \max \|x_i\|$ et $\|h\| = \max \|h_i\|$, on voit en notant $s = \text{card } I$ que le membre de droite donne la majoration

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \|\Phi(x_1 + h_1, \dots, x_p + h_p) - \Phi(x_1, \dots, x_p)\| &\leq M \sum_{1 \leq s \leq p} \binom{p}{s} \|x\|^{p-s} \|h\|^s \\ &= M \|h\| \sum_{1 \leq s \leq p} \frac{p}{s} \binom{p-1}{s-1} \|x\|^{p-s} \|h\|^{s-1} \\ &\leq pM \|h\| (\|x\| + \|h\|)^{p-1}. \end{aligned}$$

On utilise pour cela l'inégalité triviale $\frac{1}{s} \leq 1$ et les identités

$$(\|x\| + \|h\|)^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1}{j} \|x\|^{p-1-j} \|h\|^j = \sum_{s=1}^p \binom{p-1}{s-1} \|x\|^{p-s} \|h\|^{s-1}, \quad j = s - 1.$$

En prenant $\|h\| = \max \|h_i\|$ assez petit, la quantité (1.14) peut être rendue arbitrairement petite. Il en résulte que Φ est bien continue, et (i) est démontré. \square

On notera $\mathcal{L}_c^p(E_1, \dots, E_p; F)$ l'espace de toutes les applications p -multilinéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F , et pour $\Phi \in \mathcal{L}_c^p(E_1, \dots, E_p; F)$ on définit la norme de Φ par l'une ou l'autre des formules

$$(1.15) \quad \|\Phi\| = \sup_{(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_p\| \leq 1} \|\Phi(x_1, \dots, x_p)\|,$$

$$(1.16) \quad \|\Phi\| = \sup_{(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x_1 \neq 0, \dots, x_p \neq 0} \frac{\|\Phi(x_1, \dots, x_p)\|}{\|x_1\| \dots \|x_p\|}.$$

2. Intégrale de Kurzweil-Henstock à valeur vectorielle

L'objet de cette section est de définir une notion d'intégrale très souple généralisant naturellement l'intégrale de Riemann. La définition se prête particulièrement bien à l'intégration à valeurs vectorielles, dans la mesure où on procède presque exclusivement par combinaisons linéaires, sans faire appel à la relation d'ordre. D'autre part, lorsqu'on intègre sur \mathbb{R} , l'intégrale de Kurzweil-Henstock est à la fois simple et puissante (elle est même plus générale que l'intégrale de Lebesgue). Dans toute cette section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow E$ est une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs dans un espace de Banach E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

2.1. Sommes de Riemann. Comme dans la théorie de l'intégrale de Riemann, l'idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ au moyen d'une subdivision en sous-intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, puis de sommer les "aires" de rectangles basés sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. La figure 1 ci-dessous résume le procédé.

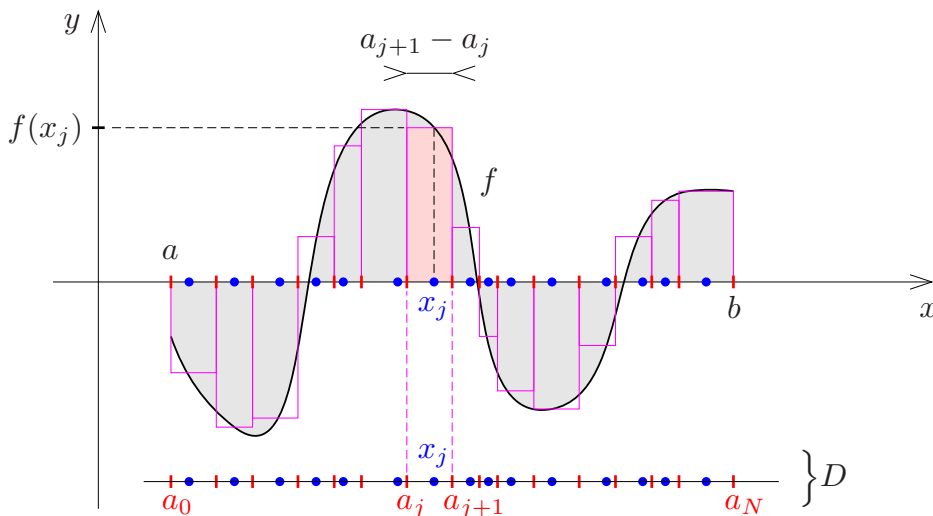


Fig. 1. Somme de Riemann associée à f sur D .

Étant donné des points intermédiaires $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ et des points $x_j \in [a_j, a_{j+1}]$, $0 \leq j < N$, on dit que $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$ est une *subdivision pointée* de $[a, b]$, et on définit la somme de Riemann de f associée à D par

$$S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) f(x_j).$$

La somme est ici une combinaison linéaire à valeurs dans E . Dans le cas d'une fonction f réelle, ceci s'interprète comme une aire algébrique (les aires sont comptées négativement là où la fonction est négative). Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, le procédé de Kurzweil-Henstock consiste à prendre la limite des sommes $S_D(f)$ en passant à des subdivisions de plus en plus fines. Cependant, comme le suggère la Fig. 2 ci-dessous, il est utile de prendre des pas plus serrés en certains endroits, là où f oscille davantage et là où f devient grande. Ceci amène la définition 2.2 ci-dessous.

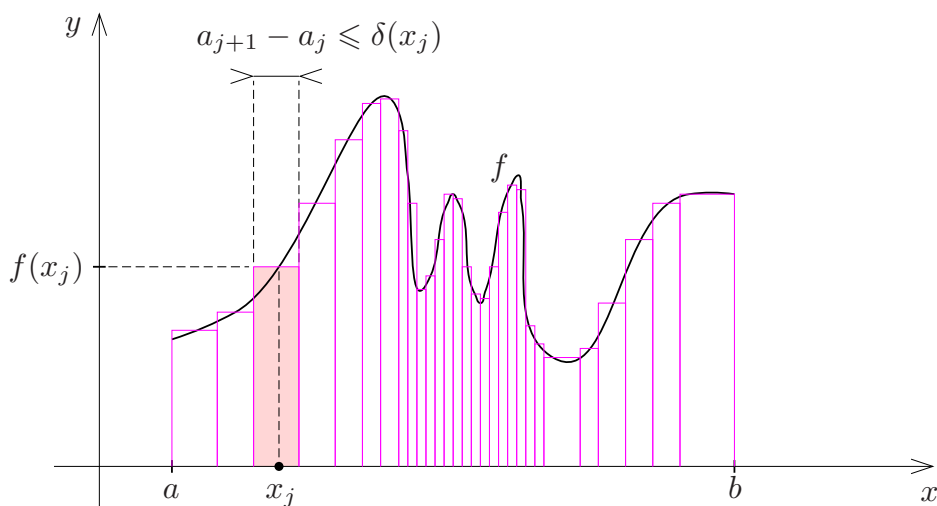


Fig. 2. Somme de Riemann à pas variable.

2.2. Définition. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction quelconque à valeurs dans un espace de Banach E . On dit que f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock (ou KH-intégrable) s'il existe un élément $A \in E$ qui représente la valeur de l'intégrale, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ donné a priori, on peut trouver une fonction $\delta : [a, b] \rightarrow]0, +\infty[$ en sorte que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, b]$ on ait

$$D \text{ } \delta\text{-fine, i.e. } \forall j, a_{j+1} - a_j \leq \delta(x_j) \Rightarrow \|S_D(f) - A\| \leq \varepsilon.$$

L'élément $A \in E$ de la définition précédente est appelé *intégrale de f sur $[a, b]$* , et on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = A = \lim_{\text{KH}, D} S_D(f) = \lim_{\text{KH}, D} \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) f(x_j).$$

La fonction $\delta(x) > 0$ est appelée "fonction jauge", et l'intégrale de Kurzweil-Henstock est souvent dénommée également *intégrale de jauge*. Dans le cas où la fonction δ

est prise constante, on obtient une définition beaucoup plus restrictive qui est celle classique de l'intégrale de Riemann : on dira alors que f est *intégrable au sens de Riemann* et on écrira

$$\int_a^b f(x) dx = A = \lim_{\text{Riemann}, D} S_D(f).$$

Pour que la définition générale soit valide, il faut cependant s'assurer de l'existence de subdivisions δ -fines :

2.3. Lemme. Soit $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une jauge. Alors il existe une subdivision pointée D de l'intervalle $[a, b]$ qui est δ -fine.

Démonstration. Elle est basée sur un procédé de dichotomie. Nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que $[a, b]$ n'admet pas de subdivision pointée δ -fine. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$: si chacune des deux admettait une subdivision δ -fine, la réunion de ces deux subdivisions serait une subdivision δ -fine de $[a_0, b_0]$. Donc l'une des deux moitiés au moins n'admet pas de subdivision δ -fine : on note celle-ci $[a_1, b_1]$.

On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(b - a)/2^k$, dont aucun n'admet de subdivision δ -fine. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Soit x_0 cette limite. Puisque $\delta(x_0) > 0$, il existe k_0 tel que

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subset [x_0 - \frac{1}{2}\delta(x_0), x_0 + \frac{1}{2}\delta(x_0)].$$

Donc la subdivision pointée de $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ formée seulement de l'intervalle tout entier et du point x_0 est δ -fine. D'où la contradiction. \square

Le critère de Cauchy fournit un critère commode d'intégrabilité, en utilisant la complétude de l'espace.

2.4. Critère de Cauchy. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ fermé borné. Pour que f soit KH-intégrable (resp. Riemann-intégrable), il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une jauge $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (resp. une constante $\delta > 0$), telle que pour toutes subdivisions pointées D et D' δ -fines on ait $\|S_{D'}(f) - S_D(f)\| \leq \varepsilon$.

Démonstration. Si f est KH-intégrable d'intégrale A , pour chaque jauge δ qui est $\varepsilon/2$ -adaptée à f , les inégalités $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon/2$ et $|S_{D'}(f) - A| \leq \varepsilon/2$ pour D, D' δ -fines entraînent $|S_{D'}(f) - S_D(f)| \leq \varepsilon$. La réciproque est une conséquence de la complétude de \mathbb{R} : il suffit de prendre une suite décroissante de jauges δ_ν telles que le critère de Cauchy soit satisfait avec $\varepsilon = 2^{-\nu}$ pour δ_ν . Si D_ν est une subdivision pointée δ_ν -fine, on trouve alors $\|S_{D_\ell}(f) - S_{D_k}(f)\| \leq 2^{-k}$ pour $\ell \geq k$, de sorte que $S_{D_\ell}(f)$ est une suite

(1) Le lecteur ayant quelques connaissances de topologie aura reconnu un cas élémentaire du théorème de Borel-Lebesgue relatif à la compacité du segment $[a, b]$. On notera que notre démonstration permet en fait d'énoncer un résultat un peu plus précis : pour toute jauge δ il existe une subdivision pointée δ -fine de $[a, b]$ formée d'intervalles dont les longueurs sont de la forme $(b - a)/2^{k_j}$. En effet, il suffit d'utiliser un raisonnement par l'absurde avec ce type d'intervalles pour aboutir à une contradiction.]

de Cauchy dans E . Il est alors immédiat de vérifier en prenant $A = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} S_{D_\ell}(f)$ que $\|A - S_D(f)\| \leq 2^{-k}$ pour toute subdivision D δ_k -fine, ce qui montre bien que f est KH-intégrable. \square

Il est facile de voir que les propriétés 2.2 impliquent à la limite les conséquences suivantes.

2.5. Propriétés. Soit E un espace de Banach sur le corps \mathbb{K} .

- (a) Linéarité. Si $f, g : [a, b] \rightarrow E$ sont des fonctions quelconques et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est KH-intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

- (b) Monotonie. Si $E = \mathbb{R}$ et si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions KH-intégrables, alors

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

En particulier, si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- (c) Majoration des normes. Pour toute fonction vectorielle $f : [a, b] \rightarrow E$ telle que f et $\|f\|$ soient KH-intégrables, on a

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

- (d) Formule de Chasles. Soient $a < b < c$ des réels et $f : [a, c] \rightarrow E$. Alors f est KH-intégrable sur $[a, c]$ si et seulement si f est KH-intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, et on a

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Ce dernier résultat est vrai aussi pour l'intégrabilité au sens de Riemann. \square

Démonstration. Par passage à la limite au sens KH, les propriétés (a), (b) et (c) sont des conséquences immédiates des propriétés correspondantes pour les sommes de Riemann :

- (a) $S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)$,
 (b) $f \geq g \Rightarrow S_D(f) \geq S_D(g)$,
 (c) $\|S_D(f)\| \leq S_D(\|f\|)$.

Vérifions maintenant l'implication \Leftarrow de (d), en supposant que f soit KH-intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, et posons

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx \in E, \quad A_2 = \int_b^c f(x) dx \in E.$$

Choisissons des jauges $\delta_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\delta_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ε -adaptées à f sur $[a, b]$ et $[b, c]$ respectivement. On définit une jauge δ sur $[a, c]$ en posant

$$\delta(x) = \begin{cases} \min(\delta_1(x), b - x) & \text{si } x \in [a, b[, \\ \min(\delta_2(x), x - b) & \text{si } x \in]b, c], \\ \min(\delta_1(b), \delta_2(b)) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

de sorte que $\delta \leq \delta_1$ sur $[a, b]$ et $\delta \leq \delta_2$ sur $[b, c]$. Soit $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ une subdivision δ -fine. Si $x_j \in [a, b[$, alors on a $a_{j+1} \leq x_j + \delta(x_j) \leq x_j + (b - x_j) = b$, donc $[a_j, a_{j+1}] \subset [a, b]$. De même, si $x_j \in]b, c]$, alors $[a_j, a_{j+1}] \subset [b, c]$. Dans le cas où $x_j = b \in]a_j, a_{j+1}[$, on remplace l'intervalle pointé $([a_j, a_{j+1}], x_j)$ par les deux intervalles pointés $([a_j, b], b)$ et $([b, a_{j+1}], b)$. On produit ainsi une subdivision pointée D_1 δ_1 -fine de $[a, b]$ et une subdivision pointée D_2 δ_2 -fine de $[b, c]$ telles que $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$. Si nous posons $A = A_1 + A_2$ il vient $\|S_D(f) - A\| \leq 2\varepsilon$ et la conclusion s'ensuit par passage à la limite. Dans le cas de l'intégrabilité au sens de Riemann, on utilise le fait que $\|f(x)\| \leq M < +\infty$ et on prend $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \varepsilon/2M)$; on peut ainsi modifier le point intermédiaire x_j de l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ contenant b pour prendre $x_j = b$, ce qui introduit une erreur $(a_{j+1} - a_j)\|f(x_j) - f(b)\| \leq 2\delta M \leq \varepsilon$. Pour compléter la démonstration de (d), il reste juste à vérifier l'implication \Rightarrow , c'est-à-dire que l'intégrabilité sur $[a, c]$ implique l'intégrabilité sur $[a, b]$ et $[b, c]$. Ceci résulte de l'énoncé ci-dessous. □

2.6. Proposition. *Si $f : [a, b] \rightarrow E$ est KH-intégrable, elle est KH-intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.*

Démonstration. On utilise le critère de Cauchy. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur $[a, b]$ telle que $|S_D(f) - S_{D'}(f)| \leq \varepsilon$ pour toutes subdivisions pointées δ -fines D et D' de $[a, b]$. Soient maintenant Δ et Δ' deux subdivisions pointées de $[c, d]$ qui sont $\delta_{|[c,d]}$ -fines. En considérant grâce au lemme 2.3 des subdivisions de $[a, c]$ et de $[d, b]$ qui sont δ -fines, on peut compléter Δ et Δ' en des subdivisions pointées D et D' de $[a, b]$ qui sont elles-mêmes δ -fines. On obtient alors

$$\|S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f)\| = \|S_D(f) - S_{D'}(f)\| \leq \varepsilon.$$

Le théorème est démontré. (Pour l'intégrabilité au sens de Riemann la preuve est tout à fait analogue, à ceci près que l'on prend des jauges δ constantes.) □

Le critère de Cauchy permet aussi d'obtenir le résultat classique suivant.

2.7. Théorème. *Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe une subdivision $a = c_0 < c_1 < \dots < c_s = b$ telle que f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]c_i, c_{i+1}[$. Alors f est Riemann intégrable (et donc KH-intégrable) sur $[a, b]$. La conclusion est la même si $E = \mathbb{R}$ et si f est monotone sur chaque intervalle $]c_i, c_{i+1}[$.*

Démonstration. Grâce à la formule de Chasles, il suffit de raisonner dans le cas où f est continue ou monotone sur l'intervalle $]a, b[$ lui-même. Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit et supposons $\|f\| \leq M$. Prenons deux subdivisions pointées $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0 \leq j < N}$, $\Delta = \{([\alpha_j, \alpha_{j+1}], \xi_j)_{0 \leq j < \nu}$ de pas inférieur ou égal à $\delta \leq \varepsilon/M$. On tronque D et Δ

en des subdivisions D' et Δ' de $[a', b'] = [a + \varepsilon/M, b - \varepsilon/M]$: pour D par exemple, on désigne par j_0 (resp. j_1) le plus grand indice j tel que $a_j < a'$, resp. $a_j \leq b'$, et on considère la subdivision pointée D' de $[a', b']$ formée par les intervalles $([a_j, a_{j+1}], j_0 + 1 \leq j \leq j_1 - 1)$, complétée par les intervalles pointés $([a', a_{j_0+1}], a')$ et $([a_{j_1}, b'], b')$ (s'ils sont non réduits à un point). On a

$$S_D(f) - S_{D'}(f) = \sum_{0 \leq j \leq j_0} (a_{j+1} - a_j)f(x_j) + \sum_{j_1 \leq j < N} (a_{j+1} - a_j)f(x_j) - (a_{j_0+1} - a')f(a') - (b' - a_{j_1})f(b'),$$

et comme par exemple $a_{j_0+1} - a = (a' - a) + (a_{j_0+1} - a') \leq \frac{\varepsilon}{M} + \delta \leq \frac{2\varepsilon}{M}$, il vient

$$\begin{aligned} \|S_D(f) - S_{D'}(f)\| &\leq ((a_{j_0+1} - a) + (b - a_{j_1}) + (a_{j_0+1} - a') + (b' - a_{j_1}))M \\ &\leq \left(\frac{2\varepsilon}{M} + \frac{2\varepsilon}{M} + \delta + \delta\right)M \leq 6\varepsilon, \end{aligned}$$

et de même $\|S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f)\| \leq 6\varepsilon$. Il suffit de montrer que $\|S_{D'}(f) - S_{\Delta'}(f)\| \leq \varepsilon$ pour δ assez petit, et on est donc ramené à montrer l'intégrabilité de f au sens de Riemann sur $[a', b']$. Par conséquent, on est ramené au cas où l'hypothèse de continuité ou de monotonie est vérifiée sur tout l'intervalle d'intégration.

(i) *Cas où f est supposée continue sur $[a, b]$.* Comme $[a, b]$ est compact, on sait alors que f est uniformément continue (théorème de Heine). Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que $|y - z| \leq \delta$ implique $\|f(y) - f(z)\| \leq \varepsilon$. Soient $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$ et $\Delta = ([\alpha_k, \alpha_{k+1}], \xi_k)$ des subdivisions pointées de pas $\leq \delta$. Si D et Δ sont constitués des mêmes intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ et de points x_j, ξ_j éventuellement différents, on a aussitôt

$$\begin{aligned} \|S_D(f) - S_\Delta(f)\| &= \left\| \sum_{0 \leq j < N} (a_{j+1} - a_j)(f(x_j) - f(\xi_j)) \right\| \\ &\leq \sum_{0 \leq j < N} (a_{j+1} - a_j)\|f(x_j) - f(\xi_j)\| \\ &\leq \sum_{0 \leq j < N} (a_{j+1} - a_j)\varepsilon = (b - a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Si les intervalles sont différents, on considère la subdivision pointée $U = \{([p_i, p_{i+1}], p_i)\}$ obtenue en prenant pour $\{p_i\} = \{a_j\} \cup \{\alpha_k\}$ la réunion de toutes les extrémités des intervalles intervenant dans D ou dans Δ . Une majoration analogue à la précédente donne $\|S_D(f) - S_U(f)\| \leq (b - a)\varepsilon$ et $\|S_U(f) - S_\Delta(f)\| \leq (b - a)\varepsilon$ par découpage des intervalles de D et Δ en réunions d'intervalles consécutifs $[p_i, p_{i+1}]$, donc

$$\|S_D(f) - S_\Delta(f)\| \leq 2(b - a)\varepsilon.$$

Ceci montre l'intégrabilité de f au sens de Riemann. Si on s'était contenté de vérifier la KH-intégrabilité, on aurait même pu éviter le théorème de continuité uniforme. Il aurait suffi de prendre pour tout $x \in [a, b]$ un nombre $\delta(x) > 0$ tel que $|y - x| \leq \delta(x)$ implique $\|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon/2$. Pour $y, z \in [x - \delta(x), x + \delta(x)]$ on a alors $\|f(y) - f(z)\| \leq \varepsilon$, de sorte que la majoration $\|S_D(f) - S_\Delta(f)\| \leq (b - a)\varepsilon$ a encore lieu si D et Δ sont des

subdivisions δ -fines basées sur les mêmes intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. Le cas général s'ensuit de la même manière.

(ii) *Cas où $E = \mathbb{R}$ et où f est monotone sur $[a, b]$.* Supposons par exemple $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et fixons $\varepsilon > 0$. En découpant $[a, b]$ en une subdivision équidistante $p_i = a + jh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $0 \leq j \leq N$, on définit un encadrement $\varphi \leq f \leq \psi$ de f par des fonctions en escalier telles que $\varphi(x) = f(p_j)$ et $\psi(x) = f(p_{j+1})$ sur $[p_j, p_{j+1}[$. Les fonctions φ et ψ sont Riemann intégrables d'après le cas déjà traité des fonctions continues par morceaux, et il vient

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{0 \leq j < N} h(f(p_{j+1}) - f(p_j)) = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a)) \leq \varepsilon$$

pour N choisi assez grand. De plus, il existe $\delta > 0$ tel que pour toutes les subdivisions δ -fines D, Δ on ait

$$S_D(f) \geq S_D(\varphi) \geq \int_a^b \varphi(x) dx - \varepsilon, \quad S_\Delta(f) \leq S_\Delta(\psi) \leq \int_a^b \psi(x) dx + \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $S_\Delta(f) \leq S_D(f) + 3\varepsilon$, et de même $S_D(f) \leq S_\Delta(f) + 3\varepsilon$, donc le critère de Cauchy est satisfait pour f . □

Il résulte de là que si $f : I \rightarrow E$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et si $x_0 \in I$, alors f peut s'intégrer sur tout intervalle $[a, b] \subset I$, et pour $C \in E$ fixé

$$(2.8) \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C$$

est une *primitive* de f , i.e. $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. En effet la formule de Chasles donne

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $|t - x| \leq \varepsilon \Rightarrow \|f(t) - f(x)\| \leq \varepsilon$, donc $|h| \leq \varepsilon$ implique

$$\left\| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right\| \leq \varepsilon$$

et donc $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$. On dit aussi que F est une *intégrale indéfinie* de f et on écrit

$$(2.9) \quad F(x) = \int f(x) dx + C. \quad \square$$

L'un des résultats les plus remarquables de la théorie KH est la possibilité d'intégrer des fonctions dérivées quelconques, même lorsque celles-ci ne sont pas continues. Dans le contexte KH, ceci permet d'obtenir que la dérivation et l'intégration soient des opérations (presque) parfaitement inverses l'une de l'autre⁽²⁾ :

⁽²⁾ On peut démontrer, mais nous n'en aurons pas besoin ici, que lorsque f est une fonction KH-intégrable non nécessairement continue, l'intégrale indéfinie (2.9) fournit une fonction F continue telle que $F'(x) = f(x)$ presque partout (au sens de Lebesgue).

2.10. Théorème fondamental de l'Analyse. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un ensemble fini ou dénombrable $Z = \{u_i; i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, tel que f soit dérivable sur $[a, b] \setminus Z$. Alors f' (prolongée arbitrairement aux points u_i) est KH-intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. La dérivabilité de f sur $[a, b] \setminus Z$ implique par définition de la limite $f'(x)$ l'existence d'une fonction $\delta : [a, b] \setminus Z \rightarrow]0, +\infty[$ telle que pour tout $x \in [a, b] \setminus Z$ on ait

$$\begin{aligned} y \in [a, b], \quad y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] &\Rightarrow \left\| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{si } y \neq x \\ (*) &\Rightarrow \|f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)\| \leq \varepsilon|y - x|, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant satisfaite même si $y = x$. D'autre part, la continuité de f au point u_i implique l'existence d'un nombre $\delta(u_i) > 0$ tel que

$$(**) \quad y \in [a, b], \quad y \in [u_i - \delta(u_i), u_i + \delta(u_i)] \Rightarrow \|f(y) - f(u_i)\| \leq 2^{-i}\varepsilon.$$

On peut choisir en outre $\delta(u_i)$ assez petit pour que

$$(***) \quad \delta(u_i) \|f'(u_i)\| \leq 2^{-i}\varepsilon$$

Ceci définit une fonction jauge $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Choisissons une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ δ -fine. Lorsque $x_j \in [a, b] \setminus Z$, on applique (*) à $x = x_j$ et $y = a_j$, $y = a_{j+1}$ successivement. Ceci donne

$$\begin{aligned} \|f(a_j) - f(x_j) - (a_j - x_j)f'(x_j)\| &\leq \varepsilon(x_j - a_j), \\ \|f(a_{j+1}) - f(x_j) - (a_{j+1} - x_j)f'(x_j)\| &\leq \varepsilon(a_{j+1} - x_j), \\ \|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)\| &\leq \varepsilon(a_{j+1} - a_j), \end{aligned}$$

la dernière ligne s'obtenant par soustraction des deux précédentes (ce qui conduit à ajouter les majorants, en vertu de l'inégalité $\|v - u\| \leq \|u\| + \|v\|$). Lorsque $x_j \in Z$, disons $x_j = u_i$, on applique (**) à $y = a_j$ et $y = a_{j+1}$, ce qui donne par soustraction

$$\|f(a_{j+1}) - f(a_j)\| \leq 2 \cdot 2^{-i}\varepsilon.$$

D'après (***) il vient $\|(a_{j+1} - a_j)f'(x_j)\| \leq 2^{-i}\varepsilon$ en $x_j = u_i$, et en combinant avec la dernière inégalité on obtient

$$\|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)\| \leq 3 \cdot 2^{-i}\varepsilon.$$

La sommation de toutes ces majorations, suivant que $x_j \in [a, b] \setminus Z$ ou que $x_j = u_i \in Z$, conduit à

$$\sum_{0 \leq j < N} \|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)\| \leq \sum_{0 \leq j < N} \varepsilon(a_{j+1} - a_j) + \sum_{i \in \mathbb{N}} 3 \cdot 2^{-i}\varepsilon,$$

ce qui implique

$$\|f(b) - f(a) - S_D(f')\| \leq \varepsilon(b-a) + 6\varepsilon = (b-a+6)\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a bien montré⁽³⁾ que

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{\text{KH}, D} S_D(f') = f(b) - f(a). \quad \square$$

2.11. Remarque. Le résultat précédent n'est pas vrai si l'on utilise l'intégrale de Lebesgue (et a fortiori l'intégrale de Riemann ordinaire), même lorsque f est partout dérivable. En effet, prenons par exemple

$$f(x) = x^2 \sin(1/x^2), \quad x \in]0, 1], \quad f(0) = 0.$$

On voit aussitôt que $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x^2) = 0$ et

$$f'(x) = 2x \sin(1/x^2) - \frac{2}{x} \cos(1/x^2), \quad x \in]0, 1].$$

La fonction $x \mapsto 2x \sin(1/x^2)$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$, mais on va montrer que $g(x) = \frac{1}{x} \cos(1/x^2)$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ et qu'on a en fait

$$\|g\|_{L^1} = \int_0^1 |g(x)| dx = +\infty.$$

Pour le voir, on se place sur les intervalles disjoints $I_k = [(k\pi)^{-1/2}, ((k-1/3)\pi)^{-1/2}]$, $k \geq 1$, et on observe que $|\cos(1/x^2)| \geq \frac{1}{2}$ sur I_k , d'où

$$\int_{I_k} |g(x)| dx \geq \frac{1}{2} \int_{I_k} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{k\pi}}{\sqrt{(k-1/3)\pi}} = \frac{1}{4} \log \frac{1}{1-1/3k} \geq \frac{1}{12k}.$$

L'intégrale $\int_0^1 |g(x)| dx$ est donc divergente, puisque $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. □

2.12. Corollaire. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , sauf peut-être sur un ensemble dénombrable $Z \subset I$, telle que $f' = 0$ sur $I \setminus Z$ (resp. $E = \mathbb{R}$ et $f' \geq 0$, resp. $f' \leq 0$). Alors f est constante (resp. croissante, resp. décroissante).

Démonstration. En effet, pour tous points $a < b$ dans I , on voit que la différence $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ est égale à 0 (resp. positive ou nulle, négative ou nulle). □

2.13. Remarque. Pour qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable soit strictement croissante, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que $f' \geq 0$ sur I et que la

⁽³⁾ On notera que la preuve de ce résultat est beaucoup plus directe que dans le contexte de l'intégrale de Riemann classique, en dépit du fait que l'on n'a pas supposé ici f' continue. En effet, dans la preuve classique, on utilise l'intégrabilité des fonctions continues et (2.8) pour voir que f' admet une primitive F , de sorte que $F' = f'$, puis on déduit du théorème des accroissements finis (qu'il faut alors démontrer indépendamment) que $F = f + \text{Cte}$, et on conclut in fine par le théorème de Chasles.

dérivée f' ne s'annule identiquement sur aucun sous-intervalle $J \subset I$ de longueur > 0 : la démonstration est immédiate. Ceci n'empêche pas que la dérivée d'une fonction strictement croissante puisse cependant être nulle sur un ensemble assez gros, même non dénombrable. Ainsi, si $K \subset [0, 1]$ est l'ensemble triadique de Cantor, la fonction $u(x) = d(x, K)$ est nulle sur K (qui est d'intérieur vide) et strictement positive sur $[0, 1] \setminus K$, et sa primitive $f(x) = \int_0^x u(t)dt$ définit donc une fonction strictement croissante dont la dérivée $f'(x) = u(x)$ s'annule sur l'ensemble non dénombrable K .

2.14. Théorème des accroissements finis. *Si $f : [a, b] \rightarrow E$ est continue et admet une dérivée telle que $\|f'(x)\| \leq M$ en dehors d'un ensemble au plus dénombrable $Z \subset [a, b]$, alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Démonstration. Si on pose $f' = 0$ sur Z , on obtient aussitôt grâce à 2.5 (c)

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left\| \int_a^b f'(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f'(x)\| dx \leq M(b - a). \quad \square$$

Le corollaire 2.12 montre en particulier que les primitives sont uniques à une constante additive C près. Le théorème fondamental 2.10 peut aussi s'énoncer comme une formule de calcul d'une intégrale à partir de la primitive d'une fonction.

2.15. Calcul des intégrales au moyen de primitives. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F (au sens généralisé où F est continue sur $[a, b]$ et F dérivable de dérivée $F' = f$ sur le complémentaire d'un ensemble au plus dénombrable $Z \subset [a, b]$), alors f est KH-intégrable et*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{encore noté} \quad [F(x)]_a^b.$$

2.16. Formule d'intégration par parties. Soient E un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, $v : [a, b] \rightarrow E$ deux fonctions dérivables. Le produit uv est alors dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. Par conséquent $uv' = (uv)' - u'v$ est intégrable si et seulement si $u'v$ l'est, et dans ce cas

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

On a donc la formule

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,$$

qui peut encore se récrire de manière plus abrégée

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

En termes de primitives et avec la notation des intégrales indéfinies, on peut aussi écrire

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

On utilisera enfin le résultat classique suivant relatif à la convergence uniforme dans les intégrales.

2.17. Théorème de convergence uniforme. Soit $f_k : [a, b] \rightarrow E$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une limite $f : [a, b] \rightarrow E$. Si les f_k sont KH-intégrables (resp. Riemann-intégrables), alors f est KH-intégrable (resp. Riemann-intégrable) et

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit k_0 tel que $\|f(x) - f_k(x)\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ et $k \geq k_0$. Ceci implique $\|f_l(x) - f_k(x)\| \leq 2\varepsilon$ pour $k, l \geq k_0$ et donc d'après 2.5 (c) nous avons

$$\left\| \int_a^b f_l(x) dx - \int_a^b f_k(x) dx \right\| \leq 2\varepsilon(b - a).$$

Les intégrales $A_l = \int_a^b f_l(x) dx$ forment une suite de Cauchy dans E , par conséquent $A = \lim_{l \rightarrow +\infty} A_l$ existe et $\|A - A_k\| \leq 2\varepsilon(b - a)$ pour $k \geq k_0$. Comme f_{k_0} est KH-intégrable, il existe une jauge δ telle que pour toute subdivision D δ -fine on ait $\|S_D(f_{k_0}) - A_{k_0}\| \leq \varepsilon$. Or il est clair que $\|S_D(f) - S_D(f_{k_0})\| \leq \varepsilon(b - a)$, donc

$$\|S_D(f) - A\| \leq \|S_D(f) - S_D(f_{k_0})\| + \|S_D(f_{k_0}) - A_{k_0}\| + \|A_{k_0} - A\| \leq 3\varepsilon(b - a) + \varepsilon.$$

Ceci montre que f est KH-intégrable et que $A = \int_a^b f(x) dx = \lim A_k$. Le cas des fonctions Riemann-intégrables s'obtient en prenant des jauges constantes. \square

3. Espaces affines

Il peut être utile en calcul différentiel de distinguer points et vecteurs - même si le plus souvent la différence est seulement d'ordre "psychologique". Les espaces de points seront appelés espaces affines, leur définition est liée de près à celle des espaces vectoriels ; on peut imaginer en quelque sorte qu'un espace affine est un espace vectoriel dans lequel l'origine n'est pas fixée d'avance, et que l'on raisonne toujours à translation près par changement éventuel de cette origine. Rappelons d'abord la définition des actions de groupes.

3.1. Définition. Une action (à gauche) d'un groupe $(G, *)$ sur un ensemble X est une application

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

satisfaisant les propriétés $1_G \cdot x = x$ et $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 * g_2) \cdot x$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et tout $x \in X$, où 1_G désigne l'élément neutre de $(G, *)$.

Il en résulte que la *translation* $\tau_g : x \mapsto \tau_g(x) = g \cdot x$ est une bijection de X d'inverse $\tau_{g^{-1}}$, et que $g \mapsto \tau_g$ est un homomorphisme de groupes de $(G, *)$ dans le groupe $(\text{Bij}(X), \circ)$ des bijections de X dans lui-même : on a en effet $\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 * g_2}$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. On pourrait d'ailleurs, de manière équivalente, définir une action à gauche de G dans X comme étant un homomorphisme de groupes $G \rightarrow \text{Bij}(X)$, $g \mapsto \tau_g$, et on poserait alors $g \cdot x = \tau_g(x)$.

De manière similaire, une *action à droite* de G sur X est une application

$$X \times G \rightarrow X, \quad (x, g) \mapsto x \cdot g$$

satisfaisant les propriétés $x \cdot 1_G = x$ et $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 * g_2)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et tout $x \in X$. Si $\tilde{\tau}_g(x) = x \cdot g$ est la translation à droite, on a

$$\tilde{\tau}_{g_2} \circ \tilde{\tau}_{g_1}(x) = \tilde{\tau}_{g_2}(\tilde{\tau}_{g_1}(x)) = \tilde{\tau}_{g_2}(x \cdot g_1) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$$

et on voit donc que $\tilde{\tau}_{g_2} \circ \tilde{\tau}_{g_1} = \tilde{\tau}_{g_1 * g_2}$. Si le groupe G est commutatif, on le note en général sous la forme d'un groupe additif $(G, +)$ et une action à gauche $(g, x) \mapsto g \dot{+} x$ est la même chose qu'une action à droite $(x, g) \mapsto x \dot{+} g$, on se permet donc d'utiliser indifféremment l'une ou l'autre des notations.

3.2. Définition. *Étant donné un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur un corps \mathbb{K} , un espace affine \mathcal{E} de direction E est un ensemble \mathcal{E} d'éléments appelés points, muni d'une action additive à droite de $(E, +)$ sur \mathcal{E} que l'on notera dans un premier temps*

$$\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}, \quad (M, v) \mapsto M \dot{+} v \quad (\text{parfois notée à gauche } v \dot{+} M),$$

satisfaisant les propriétés additionnelles suivantes :

- (i) *l'action est fidèle, c'est-à-dire que la translation $\tau_v : M \mapsto M \dot{+} v$ coïncide avec l'application identique $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ si et seulement si $v = 0$;*
- (ii) *l'action est transitive, c'est-à-dire que pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$, il existe un vecteur $v \in E$ tel que $M \dot{+} v = N$.*

L'axiome (i) revient à dire que l'homomorphisme $v \mapsto \tau_v$ est injectif. Il en résulte que le vecteur v stipulé par l'axiome (ii) est unique. En effet, si $N = M \dot{+} v = M \dot{+} w$, alors $M \dot{+} (v - w) = M$. Mais alors tout point P s'écrit sous la forme $P = M \dot{+} h$, $h \in E$ en utilisant de nouveau (ii), donc

$$\begin{aligned} \tau_{v-w}(P) &= P \dot{+} (v - w) = (M \dot{+} h) \dot{+} (v - w) = M \dot{+} (h + v - w) \\ &= (M \dot{+} (v - w)) \dot{+} h = M \dot{+} h = P \end{aligned}$$

d'où $\tau_{v-w} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ et par suite $v - w = 0$ d'après l'axiome (i).

Pour ne pas alourdir les notations, on notera simplement $\dot{+}$ l'action $\dot{+}$, et l'unique vecteur v tel que $M \dot{+} v = N$ sera noté simplement $v = \overrightarrow{MN}$, ou encore $v = N - M$.

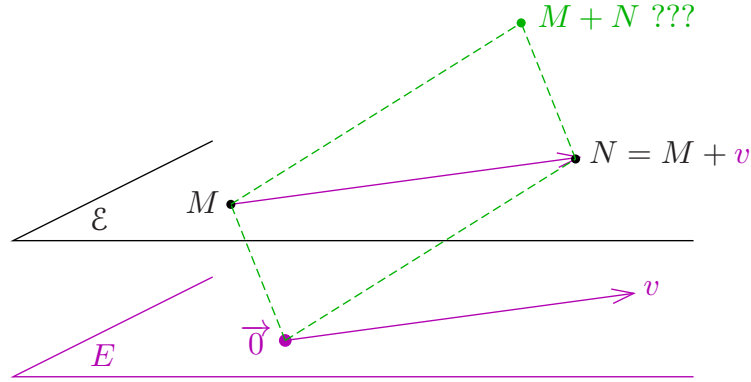


Fig. 3. Espace affine \mathcal{E} et espace vectoriel associé E

3.3. Remarque. Insistons sur le fait que \mathcal{E} ne possède pas d’origine privilégiée, alors que l’espace vectoriel E , quant à lui, possède un point privilégié qui est le vecteur $\vec{0}$. Outre l’addition d’un point et d’un vecteur, notée indifféremment à droite $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ ou à gauche, $E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ($v, M \mapsto M + v = v + M$), on a donc une opération de “soustraction” $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$, $(M, N) \mapsto N - M$ bien définie. On notera cependant qu’il n’existe pas d’opération d’addition des points $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $(M, N) \mapsto M + N$, cf. Fig. 3 ci-dessus. En revanche (voir Problème 3.14 ci-dessous), on peut définir un espace vectoriel $\widehat{\mathcal{E}}$ contenant à la fois l’espace vectoriel E et l’espace affine \mathcal{E} comme parties disjointes, dans lequel toutes les opérations algébriques usuelles d’addition et de combinaisons linéaires sont autorisées (comme c’est le cas dans tout espace vectoriel). Cet espace vectoriel $\widehat{\mathcal{E}}$ vérifie $\dim_{\mathbb{K}} \widehat{\mathcal{E}} = \dim_{\mathbb{K}} E + 1$ et s’appelle l’espace vectoriel universel associé à l’espace affine \mathcal{E} . Nous n’aurons pas l’occasion d’utiliser de tels espaces dans ce cours, mais ils peuvent être très utiles en géométrie projective.

3.4. Conséquence. Pour tout point $M_0 \in \mathcal{E}$, l’application $E \rightarrow \mathcal{E}$, $v \mapsto M = M_0 + v$ est une bijection, dont la bijection inverse est $\mathcal{E} \rightarrow E$, $M \mapsto v = \overrightarrow{M_0M} = M - M_0$. En outre, si $(e_i)_{i \in I}$ est une base algébrique de E , on a une bijection

$$\mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto M = M_0 + \sum_{i \in I} x_i e_i$$

de l’ensemble $\mathbb{K}^{(I)}$ des familles $(x_i)_{i \in I}$ à coefficients presque tous nuls dans \mathbb{K} vers \mathcal{E} . On voit alors M_0 comme point origine, et on dit que $(M_0; e_i)_{i \in I}$ est un repère de \mathcal{E} .

On notera que la bijection ainsi construite entre E et \mathcal{E} dépend du choix de l’origine, un changement d’origine $M_0 \mapsto M_1$ revenant juste à opérer une translation de vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ dans E .

3.5. Exemple. Tout espace vectoriel E , muni de l’action additive $E \times E \rightarrow E$, $(v, M) \mapsto v + M$ peut être considéré comme un espace affine de direction E . On écrit dans ce cas $\mathcal{E} = E$, l’identification entre E et \mathcal{E} étant réalisé par le choix du vecteur nul comme origine particulière.

3.6. Sous-espaces affines. On dit qu'une partie \mathcal{S} d'un espace affine \mathcal{E} est un sous-espace affine si $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et s'il existe un sous-espace vectoriel $S \subset E$ telle que la restriction de l'action $(v, M) \mapsto v + M$ à $S \times \mathcal{S}$ fasse de \mathcal{S} un espace affine de direction S .

Si S est un sous-espace vectoriel de E et $P \in \mathcal{E}$ un point quelconque, alors $P + S = \{M = P + v; v \in S\}$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} . Par définition, les sous-espaces affines sont tous de cette forme. On notera que les sous-espaces affines d'un espace vectoriel E sont des translatés $P + S$ des sous-espaces vectoriels, mais en général ils ne contiennent pas le vecteur nul et ne sont alors pas des sous-espaces vectoriels (c'est le cas seulement si $P \in S$, auquel cas $P + S = S$).

3.7. Proposition. Toute intersection $\bigcap S_i$ de sous-espaces affines $(S_i)_{i \in I}$ de directions S_i est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine \mathcal{S} de direction $S = \bigcap S_i$.

Nous laissons au lecteur la vérification très facile de ce résultat. On notera en particulier que si $\mathcal{S}_1 = P_1 + S$, $\mathcal{S}_2 = P_2 + S$ sont des sous-espaces affines de même direction S (sous-espaces affines *parallèles*), alors $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ dès que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$, ce qui équivaut à la condition $v = P_2 - P_1 \notin S$.

On introduit maintenant les applications affines, qui sont aux espaces affines ce que sont les applications linéaires aux espaces vectoriels.

3.8. Applications affines. Soient \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines associés à des espaces vectoriels E, F sur le corps \mathbb{K} . On dit qu'une application $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ telle que pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$ on ait

$$\overrightarrow{u(M)u(N)} = \ell(\overrightarrow{MN}), \quad \text{soit encore } u(N) - u(M) = \ell(N - M).$$

On notera que cette application linéaire ℓ si elle existe, est nécessairement unique du fait que les différences $N - M$ engendrent tous les vecteurs de E .

3.9. Écriture des applications affines. Fixons un point $O \in \mathcal{E}$ comme origine de \mathcal{E} et un point $O' \in \mathcal{F}$ comme origine de \mathcal{F} . Si $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine d'application linéaire associée ℓ , il existe un vecteur $b \in F$ tel que $u(O) = O' + b$. Pour tout point $M = O + x \in \mathcal{E}$ on a alors

$$u(M) - u(O) = \ell(M - O) = \ell(x) \implies u(M) = u(O) + \ell(x) = O' + (\ell(x) + b),$$

et on peut donc écrire au choix

$$(3.9) \quad u : O + x \longmapsto O' + (\ell(x) + b) \quad \text{ou}$$

$$(3.9') \quad u : M \longmapsto O' + \ell(M - O) + b.$$

Si l'on utilise les identifications

$$E \simeq \mathcal{E}, \quad x \mapsto O + x, \quad F \simeq \mathcal{F}, \quad y \mapsto O' + y,$$

on voit que u s'identifie à l'application

$$(3.10) \quad \tilde{u} : E \longrightarrow F, \quad x \longmapsto y = \ell(x) + b.$$

Réciproquement, si \tilde{u} est définie par (3.10), il est clair que $\tilde{u}(x') - \tilde{u}(x) = \ell(x' - x)$, donc \tilde{u} est bien une application affine d'application linéaire associée ℓ ; via les isomorphismes ci-dessus, il en est de même pour l'application $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ définie par les formules (3.9) ou (3.9'). En dimension finie, si l'on choisit un repère $(O; e_j)$ de \mathcal{E} et un repère (O', ε_i) de \mathcal{F} , l'application linéaire ℓ est définie par une matrice $A = (a_{ij}) = \text{Mat}_{(e_j), (\varepsilon_j)}(\ell)$ et on obtient en coordonnées

$$(3.11) \quad u : X \longmapsto Y = AX + B, \quad y_i = \sum_j a_{ij}x_j + b_i$$

où $X = (x_j)$, $Y = (y_i)$, $B = (b_i)$ sont les matrices colonnes respectives de x , y et b . Toute transformation de ce type est une application affine.

3.12. Propriété immédiate. Si $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine et si $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{F}$ sont des sous-espaces affines, alors $u(\mathcal{S})$ est un sous-espace affine de \mathcal{F} et $u^{-1}(\mathcal{S}')$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} , à moins que $u^{-1}(\mathcal{S}') = \emptyset$.

3.13. Exercice. Soient \mathcal{E} , \mathcal{F} des espaces affines euclidiens; ceci signifie que \mathcal{E} , \mathcal{F} sont associés à des espaces vectoriels E , F munis de produit scalaires euclidiens.

- (i) Si $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ est linéaire montrer qu'il y a équivalence entre le fait que ℓ préserve le produit scalaire (i.e. $\ell(x) \cdot \ell(y) = x \cdot y$ pour tous $x, y \in E$) et le fait que ℓ préserve la norme (i.e. $\|\ell(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$).
- (ii) Si $\ell : E \rightarrow F$ est une application préservant le produit scalaire, montrer que ℓ est nécessairement linéaire. [Pour cela on pourra calculer le carré scalaire de $\ell(\lambda x + \mu y) - (\lambda \ell(x) + \mu \ell(y))$].
- (iii) Si $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application préservant les distances euclidiennes (i.e. $d(u(M), u(N)) = d(M, N)$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$), montrer que u est une application affine [Indication : choisir des origines $O \in \mathcal{E}$ et $O' = u(O) \in \mathcal{F}$, et construire à l'aide de u une application $\ell : E \rightarrow F$ conservant les produits scalaires.]

3.14. Problème : espace vectoriel universel. Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace vectoriel associé E sur un corps \mathbb{K} . On définit $\widehat{\mathcal{E}}$ comme étant l'ensemble des applications $f : \mathcal{E} \rightarrow E$ telles que $f(N) - f(M) = \lambda(N - M)$ ($= \lambda \overrightarrow{MN}$) pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$ (ce sont donc exactement les applications affines d'endomorphisme associé $\ell = \lambda \text{Id}_E$, $\lambda \in \mathbb{K}$).

- (i) Montrer que $(\widehat{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, et que l'application $p : \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{K}$, $f \mapsto -\lambda$ est une forme linéaire (p s'appelle la forme linéaire *poïds*).
- (ii) Montrer qu'on peut définir une application linéaire $E \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}$ qui induit un isomorphisme de E sur $\text{Ker}(p) = p^{-1}(0)$ en associant à tout vecteur $v \in E$

l'application constante $f_v(M) = v$. Si E est de dimension finie, montrer que l'on a $\dim_{\mathbb{K}} \widehat{\mathcal{E}} = \dim_{\mathbb{K}} E + 1$.

- (iii) Montrer qu'on peut définir une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}$ en associant à tout point $A \in \mathcal{E}$ l'application $f_A(M) = \overrightarrow{MA}$ et que $A \mapsto f_A$ est une bijection de \mathcal{E} sur l'hyperplan affine $p^{-1}(1)$ de $\widehat{\mathcal{E}}$.

Dans la suite on identifie $E \subset \widehat{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathcal{E}}$ aux hyperplans vectoriel $p^{-1}(0)$ et affine $p^{-1}(1)$ de $\widehat{\mathcal{E}}$, via les injections définies en (ii) et (iii).

- (iv) Avec l'identification ci-dessus, calculer $B - A$ (c'est-à-dire $f_B - f_A$) dans $\widehat{\mathcal{E}}$. Plus généralement, si (A_i, α_i) est un système de points pondérés, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, calculer $\sum \alpha_i A_i$ suivant que $\sum \alpha_i$ est nul ou non, et interpréter $p(\sum \alpha_i A_i)$ [on utilisera bien sûr le barycentre ...]
- (v) Montrer qu'un repère $(O; e_i)$ de \mathcal{E} n'est pas autre chose qu'une base de $\widehat{\mathcal{E}}$ telle que $O \in \mathcal{E}$ et $e_i \in E$.
- (vi) Soit \mathcal{F} un autre espace affine, $\widehat{\mathcal{F}}$ son espace vectoriel universel, et $p' : \widehat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{K}$ le poids associé. Si $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine, montrer que u s'étend en une application linéaire $\widehat{u} : \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ unique, et que l'on a $p' \circ \widehat{u} = p$. Si $Y = AX + B$ est l'écriture de u dans des repères $(O; e_j)$ de \mathcal{E} et $(O'; \varepsilon_i)$ de \mathcal{F} , interpréter la matrice de \widehat{u} lorsqu'on considère ces repères comme des bases de $\widehat{\mathcal{E}}$ et $\widehat{\mathcal{F}}$ respectivement.

Chapitre I

Fonctions différentiables et dérivées successives

Contexte général. Nous travaillerons ici dans le contexte des espaces de Banach ; plus précisément on prendra souvent un espace affine \mathcal{E} associé à un espace de Banach E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (mais seule la structure d'espace vectoriel réel interviendra au niveau des variables). Les éléments de \mathcal{E} seront considérés comme des points, et souvent notés x , tandis que les éléments de $h \in E$ seront utilisés comme des petits accroissements vectoriels, de sorte que $x + h \in \mathcal{E}$ est un point voisin de x . La norme $\|\cdot\|$ de E définit une distance $d(x, y) = \|y - x\|$ sur \mathcal{E} , et (\mathcal{E}, d) peut ainsi être vu comme un espace métrique complet. Les calculs concrets et les exemples seront souvent présentés en dimension finie, mais beaucoup de démonstrations utilisent seulement la complétude, et fonctionnent sans changement en dimension infinie. L'intérêt de ce point de vue est aussi de permettre des notations plus concises – il est plus simple d'écrire $x \in \mathcal{E}$ que $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, outre le fait qu'on dégage ainsi davantage les structures géométriques mises en jeu et leur caractère intrinsèque.

1. Application linéaire tangente et dérivées directionnelles

Soient E, F des espaces de Banach réels et \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines associés. On considère un ouvert U de \mathcal{E} et une application $f : U \rightarrow \mathcal{F}$.

1.1. Définition. On dit que $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ est différentiable en un point $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et un voisinage V de 0 dans E tel que $x + V \subset U$ et

$$f(x + h) = f(x) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{pour tout } h \in V,$$

où $\varepsilon : V \rightarrow F$ est telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Lorsque $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} = 1$ on peut visualiser cette définition comme suit :

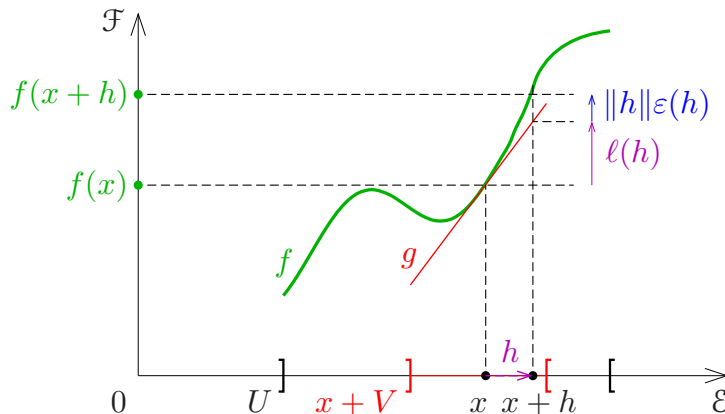


Fig. 1. Application f et son application linéaire tangente ℓ

On peut interpréter ici $\ell(h)$ comme la *partie linéaire* de l'accroissement $f(x+h) - f(x)$ et $\|h\|\varepsilon(h)$ comme un terme d'erreur, infiniment petit devant $\|h\|$ (le rapport vaut $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 en norme quand $h \rightarrow 0$). Pour cette raison le terme d'erreur est parfois noté $\|h\|\varepsilon(h) = o(\|h\|)$, mais par souci de précision nous n'utiliserons pas très souvent cette notation dans les démonstrations. La fonction affine $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que

$$(1.3) \quad g(x+h) = f(x) + \ell(h) \iff g(w) = f(x) + \ell(w-x), \quad w \in E$$

admet un graphe qui fournit la tangente – ou plutôt l'espace tangent – au graphe de f , cf. Chap. III); on l'appelle la *fonction affine tangente* à f au point $x \in U$.

1.3. Définition. L'application linéaire $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ (associée à l'application affine tangente g) s'appelle l'application linéaire tangente à f au point $x \in U$.

En dimension quelconque le schéma est le suivant (ici, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} = 2$).

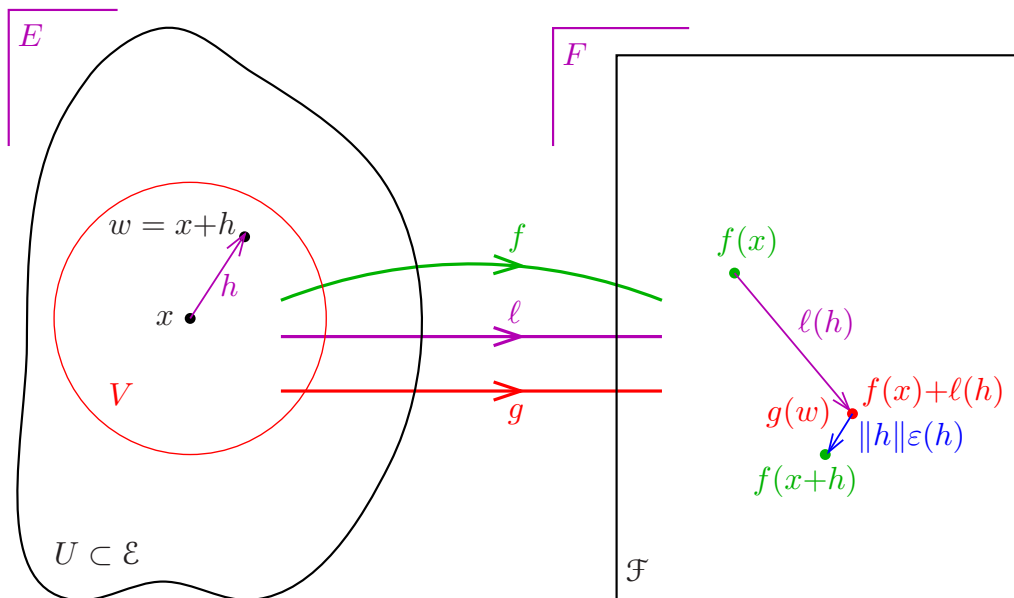


Fig. 2. Application linéaire tangente ℓ et affine tangente g à une fonction f

Une formule essentielle est la suivante :

$$(1.4) \quad \ell(h) = \partial_h f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

où $\partial_h f(x)$ est par définition la *dérivée directionnelle* de f suivant le vecteur h au point x . C'est aussi par définition la dérivée $u'(0)$ de la fonction $u(t) = f(x+th)$, $t \in]-\delta_0, \delta_0[$. Pour démontrer (1.4), on remplace h par th dans la définition de la différentiabilité, ce qui donne pour $t \neq 0$ assez petit

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \left(\ell(th) + \|th\| \varepsilon(th) \right) = \ell(h) \pm \|h\| \varepsilon(th),$$

et on a bien $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(th) = 0$. L'unicité de la limite dans un espace normé implique alors la conséquence suivante.

1.5. Théorème et définition. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est différentiable au point $x \in U$, l'application linéaire tangente $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est unique ; on la note $\ell = df(x)$. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$, et on appelle différentielle de f l'application

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F), \quad x \mapsto df(x).$$

On a alors $df(x)(h) = \partial_h f(x)$ pour tout $x \in U$ et tout $h \in E$.

Insistons sur le fait que df ne prend plus ses valeurs dans le même espace \mathcal{F} que f , mais plutôt dans un nouvel espace de Banach $G = \mathcal{L}_c(E, F)$. L'hypothèse de continuité de $\ell = df(x)$ implique que $\lim_{h \rightarrow 0} \ell(h) = 0$. On en déduit aussitôt la conséquence suivante (qui n'aurait pas été valide sans l'hypothèse de continuité de ℓ).

1.6. Proposition. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est différentiable au point x , alors f est continue au point x .

Bien entendu, la réciproque est fautive, la fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mais non différentiable au point 0. Voici un autre résultat encore plus immédiat.

1.7. Proposition. Soient \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines associés à des espaces de Banach E, F .

- (i) Si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine d'application linéaire associée $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors $df(x) = \ell$ en tout point, autrement dit $df : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ est une application constante égale à ℓ .
- (ii) La même conclusion s'applique en particulier au cas où $f = \ell : E \rightarrow F$ est une application linéaire.

Démonstration. L'hypothèse se traduit en effet par le fait que $f(x+h) - f(x) = \ell(h)$ pour tout $h \in E$. □

Lorsque E est de dimension finie, on sait que $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$, donc la question de vérifier la continuité de $\ell = df(x)$ ne se pose pas. Supposons maintenant \mathcal{E} de dimension finie n sur \mathbb{R} , et soit $(O; e_j)_{1 \leq j \leq n}$ un repère de \mathcal{E} . On peut alors identifier \mathcal{E} à \mathbb{R}^n par l'application affine bijective $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{E}$, $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \mapsto x = O + \sum x_j e_j$. Dans ce cas, la dérivée directionnelle $\partial_{e_j} f$ s'identifie à une dérivée partielle. Via l'identification précédente $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{e_j} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} \\ (1.8) \qquad & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f'_{x_j}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe des définitions.

1.9. Proposition. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est différentiable au point x , alors f admet des dérivées directionnelles $\partial_h f(x) = df(x)(h)$ suivant toutes les directions, et en particulier, en dimension finie, f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $1 \leq j \leq n = \dim \mathcal{E}$.

L'exemple suivant montre que la réciproque est fautive.

1.10. Exemple. Sur $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 x_2}{x_1^8 + x_2^2} \quad \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

Regardons la dérivée directionnelle en $x = (0,0)$ suivant un vecteur $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ quelconque. Si $t \neq 0$, on a

$$f(th) = f(th_1, th_2) = \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^8 h_1^8 + t^2 h_2^2} = t^2 \frac{h_1^3 h_2}{t^6 h_1^8 + h_2^2}, \quad \frac{f(th)}{t} = t \frac{h_1^3 h_2}{t^6 h_1^8 + h_2^2}.$$

Si $h_2 \neq 0$ le dénominateur ne s'annule pas, et on trouve $\partial_h f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th)}{t} = 0$. Mais il en est de même si $h_2 = 0$, car dans ce cas $f(th)$ est identiquement nul. Toutes les dérivées directionnelles $\partial_h f(0)$ existent et sont nulles, et on a donc en particulier $f'_{x_1}(0,0) = f'_{x_2}(0,0) = 0$. Cependant, si on prend la limite de $f(x_1, x_2)$ en $(0,0)$ le long de la courbe $(x_1, x_2) = (t, t^4)$, il vient

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^4) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^7}{2t^8} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} = \pm\infty,$$

la fonction f n'est même pas bornée au voisinage de $(0,0)$, a fortiori elle *n'est pas continue et pas différentiable* en $(0,0)$. Cet exemple souligne aussi le fait que pour étudier le comportement d'une fonction en un point x , il n'est pas du tout suffisant d'examiner le comportement de f le long des droites $t \mapsto x + th$ passant par x , les pathologies pouvant par exemple se manifester le long de certaines courbes passant par x autres que des segments de droites. \square

Un cas intéressant est le cas où la fonction f est à valeurs dans $\mathcal{F} = \mathbb{R}$. Alors $df(x) \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) = E^*$, c'est-à-dire que $df(x)$ peut être considéré comme une *forme linéaire* (continue) sur E . Si \mathcal{E} est de dimension finie et rapporté à un repère $(O; e_j)_{1 \leq j \leq n}$, les fonctions coordonnées $\xi_j : x \mapsto x_j$ sont alors des fonctions affines dont les applications linéaires associées $h \mapsto h_j$ ne sont autres que les formes linéaires coordonnées, c'est-à-dire par définition les éléments e_j^* de la base duale (e_j^*) de E^* . On convient de noter simplement dx_j ce que formellement on devrait plutôt noter $d\xi_j(x)$ [ou, pour pinailler encore plus, $d(x \mapsto x_j)(x)$] et d'après la Proposition 1.7 (i) on a

$$(1.11) \quad dx_j = e_j^*, \quad dx_j(h) = e_j^*(h) = h_j.$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \partial_{e_j} f(x) = df(x)(e_j)$, donc pour $h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j \in E$ quelconque

$$df(x)(h) = df(x) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j \right) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j(h)$$

On obtient ainsi l'expression usuelle de la différentielle

$$(1.12) \quad df(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

Si maintenant \mathcal{F} est un espace affine quelconque associé à un espace de Banach F , l'écriture (1.12) a encore un sens à condition d'interpréter le produit $v\varphi$ d'un élément $v = \frac{\partial f}{\partial x_j} \in F$ par une forme linéaire $\varphi = dx_j \in E^*$ comme étant l'application linéaire $h \mapsto \varphi(h)v$ de E dans F , ce qui, évidemment, pour $F = \mathbb{R}$, n'est rien d'autre que la multiplication externe par $v \in \mathbb{R}$ sur E^* . Les physiciens pensent généralement ce type d'égalités comme une identité entre quantités infiniment petites, les mathématiciens considèrent plutôt qu'il s'agit d'une égalité d'applications ou de formes linéaires, s'appliquant sur des vecteurs h quelconques (et éventuellement, en fonction des besoins, arbitrairement petits); il n'y a donc pas vraiment de différence, c'est tout au plus une question de point de vue ...

Supposons de plus que \mathcal{F} soit de dimension finie, rapporté à un repère $(\tilde{O}, \tilde{e}_i)_{1 \leq i \leq m}$. Si on identifie \mathcal{F} à F par le choix de l'origine \tilde{O} , on peut écrire

$$(1.13) \quad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{1 \leq i \leq m} f_i(x) \tilde{e}_i, \\ df(x) : h &= \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j \mapsto \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j \tilde{e}_i. \end{aligned}$$

On voit ainsi que la matrice de l'application linéaire tangente $df(x) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ n'est autre que la matrice $m \times n$ des dérivées partielles des fonctions composantes f_i :

$$(1.14) \quad \text{Mat}_{(e_j), (\tilde{e}_i)}(df(x)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette matrice est appelée *matrice jacobienne* de f au point x .

Dans la suite nous aurons parfois besoin de généraliser de telles écritures au cas d'espaces produits $E = E_1 \times \dots \times E_n$, $F = F_1 \times \dots \times F_m$ (avec disons $\mathcal{E} = E$ et $\mathcal{F} = F$, le cas d'une application $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ correspondant bien sûr au cas où tous les facteurs E_j et F_i sont pris égaux à \mathbb{R}). Dans ce cas plus général, on écrira sous forme de matrice colonne

$$f : E \supset U \rightarrow F, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

avec $x_j \in E_j$ et $f_i : U \rightarrow F_i$. Les accroissements de la variable x seront notés $h = (h_1, \dots, h_n) \in E = E_1 \times \dots \times E_n$, et on prendra $\|h\| = \max_{1 \leq j \leq n} \|h_j\|$ comme norme sur E (et de même pour F). On désignera par

$$d_{x_j} f_i(x) = d_{x_j} f_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_c(E_j, F_i),$$

si elle existe, l'application linéaire tangente au point $w_j = x_j$ de l'application

$$E_j \ni w_j \mapsto f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, w_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in F_i$$

où toutes les variables x_k , $k \neq j$, sont fixées. Il est facile de voir que $df(x)$ existe si et seulement si toutes les applications linéaires tangentes $df_i(x) \in \mathcal{L}_c(E, F_i)$ existent, et alors

$$df(x)(h) = \begin{pmatrix} df_1(x)(h) \\ \vdots \\ df_m(x)(h) \end{pmatrix}.$$

De plus, si $df(x)$ existe, toutes les “différentielles partielles” $d_{x_j}f_i(x)$ existent, et on a

$$d_{x_j}f_i(x)(h_j) = df_i(x)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0), \quad df_i(x)(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} d_{x_j}f_i(x)(h_j)$$

[cependant, l’existence des différentielles partielles $d_{x_j}f_i(x)$ n’implique pas celle de la différentielle totale $df(x)$, comme on l’a vu déjà dans le cas où $E_j = \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 2$, et $F = F_1 = \mathbb{R}$]. Enfin, si h et $df(x)(h)$ sont notés sous forme de matrices colonnes, on a

$$(1.15) \quad df(x)(h) = \left(\sum_{1 \leq j \leq n} d_{x_j}f_i(x)(h_j) \right)_{1 \leq i \leq m} = \left(d_{x_j}f_i(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

ce qu’on interprète en dimension finie par le fait que la matrice jacobienne de $df(x)$ se décompose en blocs qui sont les matrices jacobiniennes des différentielles partielles $d_{x_j}f_i(x) \in \mathcal{L}_c(E_j, F_i)$.

2. Opérations algébriques sur les différentielles

2.A. Linéarité

Une première opération très simple consiste à prendre des combinaisons linéaires, lorsque $\mathcal{F} = F$ est un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Dans ce cas, nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu’une combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est différentiable en un point x d’un ouvert U d’un espace affine de Banach \mathcal{E} dès que $f, g : U \rightarrow F$ sont différentiables au point x , et que

$$(2.1) \quad d(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda df(x) + \mu dg(x) \in \mathcal{L}_c(E, F).$$

Autrement dit, la différentiation est une opération linéaire, aussi bien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dès lors que l’espace d’arrivée $\mathcal{F} = F$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2.B. Composition des applications

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ des espaces affines associés à des espaces de Banach E, F, G . Soient U un ouvert de \mathcal{E} et V un ouvert de \mathcal{F} . On considère une composée

$$(2.2) \quad g \circ f : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathcal{G}, \quad x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x)).$$

Supposons que f soit différentiable en $x \in U$ et que g soit différentiable en $y = f(x)$, d’applications linéaires tangentes respectives

$$\ell = df(x) \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad m = dg(y) \in \mathcal{L}_c(F, G).$$

Pour étudier la différentiabilité de $g \circ f$, on calcule la variation $g \circ f(x + h) - g \circ f(x)$ en fonction de h , pour h assez petit. Le schéma est le suivant.

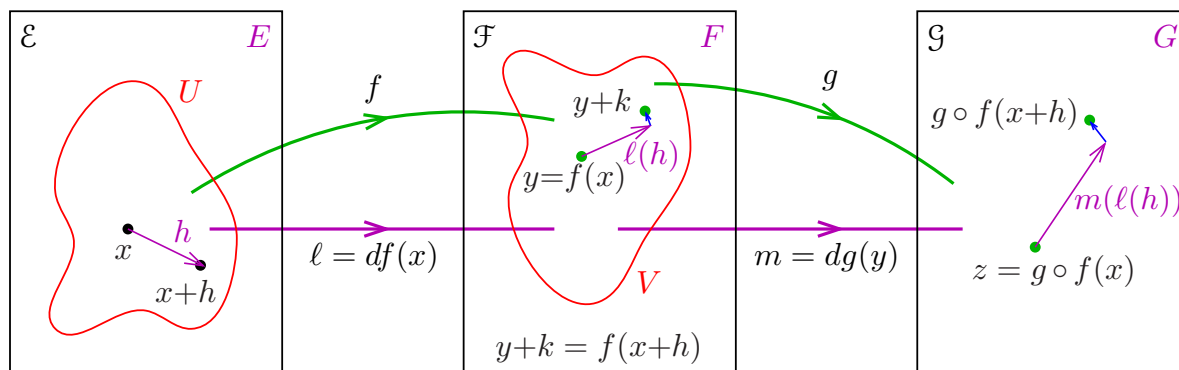


Fig. 3. Différentielle d'une composée $g \circ f$ de fonctions

Les hypothèses impliquent respectivement

$$f(x + h) - f(x) = \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h), \quad \text{si } \|h\| < \delta,$$

$$g(y + k) - g(y) = m(k) + \|k\|\eta(k), \quad \text{si } \|k\| < \delta',$$

pour $h \in E, k \in F, \delta > 0, \delta' > 0$ assez petits, et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0, \lim_{k \rightarrow 0} \eta(k) = 0$. Fixons δ assez petit pour que $\sup_{\|h\| < \delta} \|\varepsilon(h)\| \leq 1$. On choisira

$$(*) \quad k = f(x + h) - f(x) = \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

de sorte que $f(x + h) = f(x) + k = y + k$. Pour $\|h\| < \delta$, on obtient ainsi

$$(**) \quad \|k\| \leq (\|\ell\| + 1)\|h\| < (\|\ell\| + 1)\delta,$$

et on choisira donc aussi $\delta < \delta' / (\|\ell\| + 1)$ de façon que $\|k\| < \delta'$. Dans ces conditions

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) - g \circ f(x) &= g(y + k) - g(y) = m(k) + \|k\|\eta(k) \\ &= m(\ell(h) + \|h\|\varepsilon(h)) + \|k\|\eta(k) \\ &= m \circ \ell(h) + \|h\|m(\varepsilon(h)) + \|k\|\eta(k). \end{aligned}$$

Les termes d'erreur admettent d'après (*) et (**) la majoration

$$\begin{aligned} \left\| \|h\|m(\varepsilon(h)) + \|k\|\eta(k) \right\| &\leq \|h\| \left(\|m\| \|\varepsilon(h)\| + (\|\ell\| + 1)\|\eta(k)\| \right) \\ &= \|h\| \left(\|m\| \|\varepsilon(h)\| + (\|\ell\| + 1)\|\eta(\ell(h) + \|h\|\varepsilon(h))\| \right) \end{aligned}$$

et les termes en facteur de $\|h\|$ tendent bien vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Ceci montre que $g \circ f$ est différentiable en x et que $d(g \circ f)(x) = m \circ \ell = dg(y) \circ df(x)$. Nous pouvons énoncer :

2.3. Théorème. Soit $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathcal{G}$ où $U \subset E$ et $V \subset F$ sont des ouverts. Si f est différentiable en $x \in U$ et si g est différentiable en $y = f(x) \in V$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x) \in \mathcal{L}_c(E, G).$$

Dans des espaces de dimension finie \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} muni de repères, on a des isomorphismes $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{F} \simeq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{G} \simeq \mathbb{R}^p$, et en notant les coordonnées respectivement $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$, $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$, $(z_i)_{1 \leq i \leq p}$ sur \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} , la formule de composition équivaut à l'égalité matricielle

$$\left(\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_k}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq m}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \times \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}},$$

ou encore à

$$(2.4) \quad \frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_k}(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x), \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq k \leq m.$$

On notera que la démonstration directe d'une telle formule en coordonnées serait bien plus lourde que la démonstration géométrique en termes des différentielles ! De façon abrégée, et à la manière des physiciens, on écrit parfois

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq k \leq m,$$

en sous-entendant que $y = f(x)$ est fonction de x et $z = g(y)$ fonction de y (et donc aussi de x par composition).

Un cas particulier à noter est celui où l'espace de départ est $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, c'est à dire le cas où $x \mapsto f(x)$ est une fonction d'une variable. On utilise dans ce cas le lemme trivial suivant.

2.5. Lemme. *Pour tout \mathbb{R} -espace vectoriel F , on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \xrightarrow{\simeq} F, \quad \ell \mapsto v = \ell(1) \in F,$$

dont l'isomorphisme inverse est

$$F \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}(\mathbb{R}, F), \quad v \mapsto (\ell : h \mapsto hv).$$

Cet isomorphisme est "tellement canonique" qu'on se permet même souvent d'écrire $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F) = F$. Pour une fonction $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ définie sur un ouvert U de \mathbb{R} ceci revient à identifier $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) = \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F)$ avec le vecteur dérivé

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = df(x)(1) \in F.$$

Pour $g : V \rightarrow \mathcal{G}$ différentiable au point $y = f(x)$, la formule de composition s'écrit dans ce cas sous la forme

$$(2.6) \quad (g \circ f)'(x) = dg(f(x))(f'(x)),$$

comme il résulte de la formule générale appliquée sur l'accroissement $h = 1$. C'est aussi le cas particulier de la formule (2.4) lorsqu'il n'y a qu'une seule variable $x_1 = x$.

2.C. Formule de Leibniz généralisée

Nous commençons par calculer la différentielle d'une application multilinéaire continue, ce qui est assez facile.

2.7. Proposition. Soit E_1, \dots, E_p, F des espaces de Banach et

$$\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F, \quad (x_1, \dots, x_p) \longmapsto \Phi(x_1, \dots, x_p)$$

une application multilinéaire continue. Alors Φ est différentiable en tout point $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ et pour tout $(h_1, \dots, h_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ on a la formule

$$d\Phi(x_1, \dots, x_p)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p \Phi(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_p).$$

Démonstration. On reprend essentiellement les mêmes calculs que dans le Chap. 0, formules (1.12, 1.13, 1.14) et l'on pose $x = (x_i), h = (h_i), M = \|\Phi\|$. Il vient

$$\begin{aligned} \Phi(x_1 + h_1, \dots, x_p + h_p) - \Phi(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{j=1}^p \Phi(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_p) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}, \text{card } I \geq 2} \Phi(x_j, h_k)_{j \in \mathbb{C}I, k \in I, <} \end{aligned}$$

et en notant $\theta(h)$ cette différence on obtient

$$\begin{aligned} \|\theta(h)\| &\leq M \sum_{I, \text{card } I \geq 2} \prod_{i \in \mathbb{C}I} \|x_i\| \prod_{i \in I} \|h_i\| \leq M \sum_{s=2}^p \binom{p}{s} \|h\|^s \|x\|^{p-s} \\ &\leq M \sum_{s=2}^p \frac{p(p-1)}{s(s-1)} \binom{p-2}{s-2} \|h\|^s \|x\|^{p-s} \leq Mp(p-1) \|h\|^2 (\|x\| + \|h\|)^{p-2} \\ &= O(\|h\|^2) = o(\|h\|). \quad \square \end{aligned}$$

De là nous déduisons diverses généralisations de la formule de Leibniz pour la différentiation d'un produit.

2.8. Corollaire. Soit $U \subset \mathcal{G}$ un ouvert d'un espace affine \mathcal{G} , $f_j : U \rightarrow E_j$ des applications différentiables à valeurs dans des espaces de Banach $E_j, 1 \leq j \leq p$, et $\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$ une application multilinéaire continue. Alors la fonction $u(t) = \Phi(f_1(t), \dots, f_p(t)), t \in U \subset \mathcal{G}$ est différentiable, et

$$du(t)(k) = \sum_{j=1}^p \Phi(f_1(t), \dots, f_{j-1}(t), df_j(t)(k), f_{j+1}(t), \dots, f_p(t)), \quad k \in G.$$

Démonstration. On observe que $u = \Phi \circ f$ avec $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p$ et (de façon évidente)

$$df(t)(k) = (df_1(t)(k), \dots, df_p(t)(k)).$$

On applique alors la formule de composition des différentielles, qui donne

$$du(t)(k) = d\Phi(f(t))(df(t)(k)),$$

et on tient compte de la Proposition 2.7 pour conclure. \square

Le cas particulier standard est bien sûr celui où les espaces E_i sont tous égaux au corps de base \mathbb{K} et où $\Phi(x_1, \dots, x_p) = x_1 \dots x_p$ est la multiplication ordinaire. Dans ce cas la formule s'écrit plus classiquement

$$(2.9) \quad d(f_1 \dots f_p)(t)(k) = \sum_{j=1}^p f_1(t) \dots f_{j-1}(t) df_j(t)(k) f_{j+1}(t) \dots f_p(t), \quad k \in G.$$

Dans l'un ou l'autre cas, le calcul se fait en différentiant les facteurs un par un, et en ajoutant les termes obtenus. Un autre cas classique est celui de la différentiation d'un système de n fonctions vectorielles $t \mapsto f_j(t)$ à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n :

$$(2.10) \quad d(\det(f_1, \dots, f_p))(t)(k) = \sum_{j=1}^p \det(f_1(t), \dots, f_{j-1}(t), df_j(t)(k), f_{j+1}(t), \dots, f_p(t)).$$

Dans le cas où le déterminant est non nul, nous verrons une formule alternative dans la section suivante.

3. Différentiation dans une algèbre de Banach

Rappelons d'abord la définition des algèbres de Banach.

3.1. Définition. Une algèbre de Banach A sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est la donnée d'une structure d'algèbre normée $(A, +, \cdot, \times, \|\cdot\|)$, autrement dit une structure qui fournit en même temps un \mathbb{K} -espace vectoriel $(A, +, \cdot)$, un anneau $(A, +, \times)$ dont la multiplication est \mathbb{K} -bilinéaire, et un espace de Banach sur le corps \mathbb{K} pour la norme $\|\cdot\|$. On suppose en outre que A possède un élément unité 1_A pour la multiplication, et que la norme vérifie les deux propriétés additionnelles suivantes :

- (i) $\|1_A\| = 1$.
- (ii) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous $x, y \in A$.

Il résulte de ces axiomes que les trois opérations algébriques $+$, \cdot et \times sont continues. Un exemple important d'algèbre de Banach est l'algèbre $A = \mathcal{L}_c(E, E)$ des endomorphismes continus d'un espace de Banach E , muni de la norme d'opérateur $\|\|\cdot\|\|$. En particulier, lorsque E est un espace normé de dimension finie n sur le corps \mathbb{K} , on obtient alors une algèbre isomorphe à l'algèbre des matrices $n \times n$ sur le corps \mathbb{K} .

Soit A une algèbre de Banach. Une première observation simple est que les éléments $1_A - h$ et $1_A + h$ sont inversibles pour $\|h\| < 1$. En effet on obtient les inverses sous forme de séries géométriques convergentes

$$(3.2) \quad (1_A - h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} h^k,$$

$$(3.2') \quad (1_A + h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k h^k.$$

La formule (3.2) se vérifie immédiatement par passage à la limite à partir de l'identité algébrique

$$(1_A + h + \dots + h^N)(1_A - h) = 1_A - h^{N+1},$$

en utilisant le fait que $\|h^N\| \leq \|h\|^N$ tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. La formule (3.2') s'en déduit en remplaçant h par $-h$. De là on déduit :

3.3. Corollaire. *L'ensemble U des éléments inversibles de A est un ouvert. De façon précise, pour tout $x \in U$, la boule ouverte $B(x, r)$ de rayon $r < 1/\|x^{-1}\|$ est contenue dans U .*

Démonstration. Soit $x \in U$. On peut écrire $x + h = x(1_A + x^{-1}h)$ donc d'après (3.2'), $(x + h)^{-1} = (1_A + x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$ existe dès que $\|x^{-1}h\| < 1$. Comme on a $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\| \|h\|$, il suffit de supposer $\|h\| < 1/\|x^{-1}\|$, et dans ce cas

$$(3.4) \quad (x + h)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x^{-1}h)^k \right) x^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x^{-1}h)^k x^{-1}. \quad \square$$

On cherche maintenant à calculer la différentielle de l'application de passage à l'inverse

$$(3.5) \quad \Psi(x) = x^{-1}, \quad x \in U \subset A.$$

Comme les premiers termes de la série (3.4) sont x^{-1} , $-x^{-1}hx^{-1}$, $x^{-1}hx^{-1}hx^{-1}$, \dots , il vient

$$(x + h)^{-1} = x^{-1} - x^{-1}hx^{-1} + R_2(h), \quad R_2(h) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (x^{-1}h)^k x^{-1},$$

où $h \mapsto x^{-1}hx^{-1}$ est \mathbb{K} -linéaire et où

$$\|R_2(h)\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|x^{-1}\|^{k+1} \|h\|^k = \frac{\|x^{-1}\|^3 \|h\|^2}{1 - \|x^{-1}\| \|h\|} \leq 2\|x^{-1}\|^3 \|h\|^2$$

pour $\|h\| < 1/(2\|x^{-1}\|)$. Ceci donne la formule classique :

3.6. Formule. *La fonction $\Psi(x) = x^{-1}$ définie sur l'ouvert U des éléments inversibles de l'algèbre de Banach A admet pour différentielle*

$$d\Psi(x)(h) = -x^{-1}hx^{-1}, \quad h \in A.$$

Dans une algèbre commutative comme $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$ on a ainsi $d\Psi(x)(h) = -x^{-2}h$, mais ceci ne s'applique déjà plus aux matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.

Une autre fonction très importante dans une algèbre de Banach est la *fonction exponentielle*

$$(3.7) \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Comme $\|x^k\| \leq \|x\|^k$, le rayon de convergence de la série est infini, et \exp est donc définie sur A tout entier. Lorsque les éléments x, y commutent ($xy = yx$), la démonstration usuelle par série produit montre que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, mais en général cette égalité n'est pas vraie. Si l'algèbre A est *commutative*, l'égalité

$$\exp(x + h) = \exp(x)\exp(h) = \exp(x)(1_A + h + O(\|h\|^2))$$

montre facilement que $d\exp(x)(h) = \exp(x)h$, mais cette formule n'est pas valable dans le cas non commutatif. En général, la formule (attribuée à R.M. Wilcox, 1966) est la suivante :

$$(3.8) \quad d\exp(x)(h) = \int_0^1 \exp(tx) h \exp((1-t)x) dt.$$

Nous laissons le lecteur vérifier les détails. En utilisant les calculs déjà faits pour la différentiation des formes multilinéaires, on voit que

$$(x + h)^k - x^k = \sum_{j=0}^{k-1} x^j h x^{k-j-1} + O(\|h\|^2),$$

les termes d'erreur étant majorés précisément par $k(k-1)\|h\|^2(\|x\| + \|h\|)^{k-2}$. On trouve ainsi que la différentielle de l'exponentielle est donnée par la série convergente

$$d\exp(x)(h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} x^j h x^{k-j-1},$$

et il faut comparer ce résultat avec l'intégrale (3.8), ce qu'on fait en vérifiant par récurrence sur n que $\int_0^1 t^n (1-t)^p dt = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$.

Pour terminer, nous considérons le cas de l'algèbre A_n des matrices carrées $n \times n$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et allons donner de nouvelles formules pour la différentiation du déterminant. Commençons par le cas où $X = I_n$ (matrice unité d'ordre n). Dans ce cas, si $h = (h_{ij})$ un calcul direct donne

$$\det(I_n + h) = \prod_{1 \leq i \leq n} (1 + h_{ii}) + O(\|h\|^2)$$

car les termes non diagonaux du déterminant comportent nécessairement au moins deux termes situés hors de la diagonale (une permutation de n éléments ne peut pas fixer $(n-1)$ éléments sans les fixer tous). En développant le produit, on trouve ainsi

$$\det(I_n + h) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq n} h_{ii} + O(\|h\|^2) = 1 + \operatorname{tr}(h) + o(\|h\|)$$

ou $\text{tr} : h \mapsto \text{tr}(h)$ est la trace, la différentielle de $A \ni x \mapsto \det(x)$ au point $x = I$ n'est donc autre que la forme linéaire trace. En une matrice inversible x , on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \det(x + h) &= \det(x(I_n + x^{-1}h)) = \det(x) \det(I + x^{-1}h) \\ &= \det(x) \left(1 + \text{tr}(x^{-1}h) + o(\|h\|)\right), \end{aligned}$$

d'où, pour $x \in A_n$ inversible la formule

$$(3.9) \quad d \det(x)(h) = \det(x) \text{tr}(x^{-1}h) = \det(x) \text{tr}(hx^{-1}).$$

On observera que $\det(x)x^{-1}$ n'est autre que la transposée de la comatrice de x , que nous noterons \tilde{x} . Ceci donne encore

$$(3.10) \quad d \det(x)(h) = \text{tr}(\tilde{x}h) = \text{tr}(h\tilde{x}).$$

Si on écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$ sous forme de n matrices colonnes x_j consécutives, la formule de Leibniz donne pour tout $x \in A_n$

$$(3.11) \quad d \det(x)(h) = \sum_{j=1}^n \det(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

La comparaison de (3.10) et (3.11) implique qu'il s'agit d'une identité polynomiale en les coefficients de x et h , en particulier la formule (3.10) est vraie même lorsque x n'est pas une matrice inversible.

4. Formule des accroissements finis

Soient E, F des espaces de Banach, et \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines associés. On se donne une fonction différentiable $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ définie sur un ouvert U de \mathcal{E} . La question que l'on se pose est d'estimer la variation $f(b) - f(a)$ de f entre deux points $a, b \in U$ situés dans la même composante connexe de U . Rappelons d'abord le lemme topologique suivant.

4.1. Lemme. *Soit U sur un ouvert d'un espace normé (l'hypothèse de complétude n'est pas nécessaire ici). Alors deux points $a, b \in U$ sont dans la même composante connexe de U si et seulement si il peuvent être joints dans U par un chemin polygonal (ligne brisée $a = a_0, a_1, \dots, a_N = b$ avec $[a_i, a_{i+1}] \subset U$).*

Démonstration. Comme l'image d'un connexe par une application continue est un connexe, l'image d'un chemin continu $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ (en particulier un chemin polygonal) est connexe, et les extrêmités $a = \gamma(\alpha), b = \gamma(\beta)$ sont alors dans la même composante connexe de U . Inversement, considérons la relation \mathcal{R} dans U définie par $x \mathcal{R} y$ si x, y peuvent être joints dans U par un chemin polygonal. C'est clairement une relation d'équivalence, et d'après ce qui précède la classe d'équivalence $C_{\mathcal{R}}(x)$ de tout point $x \in U$ est contenue dans la composante connexe C_x de x . Or, si $y \in C_{\mathcal{R}}(x)$, il existe une boule ouverte $B(y, r)$ telle que $B(y, r) \subset U$, et comme tout point $z \in B(y, r)$ est relié à y par le segment $[y, z] \subset B(y, r) \subset U$, on en déduit que $B(y, r) \subset C_{\mathcal{R}}(x)$.

Ceci montre que les classes d'équivalence sont ouvertes. Mais alors, elles sont aussi nécessairement fermées dans U , car toute classe d'équivalence est le complémentaire de la réunion des autres classes. Il en résulte que $C_{\mathcal{R}}(x) \cap C_x$ est à la fois ouvert et fermé dans C_x , non vide (puisque $x \in C_{\mathcal{R}}(x) \cap C_x$). Ceci implique $C_{\mathcal{R}}(x) \cap C_x = C_x$, donc $C_x \subset C_{\mathcal{R}}(x)$. \square

Compte tenu de ce qui précède, il est naturel de supposer que les points $a, \in U$ sont reliés entre eux par un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ continu et disons de classe C^1 par morceaux, avec

$$\gamma(\alpha) = a, \quad \gamma(\beta) = b$$

(on peut prendre une ligne brisée, mais, bien sûr, si on le souhaite, il est possible d'arrondir les points anguleux pour avoir un chemin de classe C^1). Alors $f \circ \gamma$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ et différentiable en dehors des points anguleux de γ (en nombre fini par hypothèse). Comme $(f \circ \gamma)' = (df \circ \gamma)(\gamma')$ d'après (2.6), il vient

$$(4.2) \quad f(b) - f(a) = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (df(\gamma(t)))(\gamma'(t)) dt$$

On utilise maintenant l'inégalité

$$\|(df(\gamma(t)))(\gamma'(t))\| \leq \|df(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\|.$$

La quantité $\|\gamma'(t)\|dt$ s'interprète comme la norme du déplacement infinitésimal, et on pose par définition

$$(4.3) \quad \text{longueur}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\| dt$$

[dans le cas d'une ligne brisée, cette longueur n'est autre que $\sum_{i=0}^{N-1} \|a_{i+1} - a_i\|$, cf. aussi Exercice ???]. En passant au sup de la norme pour l'intégrande de (4.2), on en déduit :

4.4. Inégalités des accroissements finis. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est différentiable et si $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ est un chemin de classe C^1 par morceaux reliant $a, b \in U$, on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in \text{Im}(\gamma)} \|df(x)\| \times \text{longueur}(\gamma).$$

Le cas le plus simple est bien sûr celui d'un segment $[a, b]$ contenu dans l'ouvert U , paramétré par

$$\gamma(t) = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb, \quad t \in [0, 1].$$

Dans ce cas on trouve simplement

$$(4.5) \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\| \times \|b - a\|.$$

On notera qu'en fait 4.2 et 4.4 sont vérifiés dès lors que γ est continu sur $[a, b]$ et différentiable en dehors d'un ensemble dénombrable, et qu'il suffit de même que f soit continue sur $\text{Im}(\gamma)$ et différentiable en dehors d'une partie dénombrable de $\text{Im}(\gamma)$ (resp. du segment $[a, b]$, pour ce qui est du cas particulier (4.5)). Le cas particulier de (4.2) avec $\gamma(t) = x + th$, $t \in [0, 1]$, donne également la formule utile

$$(4.6) \quad f(x+h) - f(x) = \int_0^1 df(x+th)(h) dt$$

dès que f est différentiable sur le segment $[x, x+h]$. Voici quelques conséquences immédiates de ces inégalités.

4.7. Proposition. *Soit $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une fonction différentiable telle que $df = 0$ sur U . Alors f est constante sur chaque composante connexe de U .*

4.8. Proposition. *Soit $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une fonction différentiable.*

- (i) *Si f est lipschitzienne de rapport λ sur U , c'est-à-dire que $\|f(y) - f(x)\| \leq \lambda \|y - x\|$ pour tous $x, y \in U$, alors $\|df(x)\| \leq \lambda$ en tout point $x \in U$.*
- (ii) *Réciproquement, si U est convexe et si $\|df(x)\| \leq M$ sur U , alors f est lipschitzienne de rapport M sur U .*

Démonstration. (i) On sait que

$$df(x)(h) = \partial_h f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

L'hypothèse que f est λ -lipschitzienne implique $\|f(x+th) - f(x)\| \leq \lambda |t| \|h\|$, on trouve donc $\|df(x)(h)\| \leq \lambda \|h\|$ et donc $\|df(x)\| \leq \lambda$.

(ii) Cette affirmation résulte aussitôt de (4.5) appliqué à tout segment $[a, b] \subset U$, compte tenu de l'hypothèse de convexité. □

4.9. Remarque. L'énoncé 4.8 (ii) n'est pas vrai si U n'est pas convexe. Considérons par exemple dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ la couronne $U = \{z \in \mathbb{C}; 1 - \delta < |z| < 1 + \delta\}$ et la fonction

$$f(z) = \arcsin((1 - \delta) \sin \theta), \quad \delta \in]0, 1[,$$

où $z = x + iy = r e^{i\theta}$, de sorte que $\sin \theta = y/r = y/\sqrt{x^2 + y^2}$. Il est facile de vérifier que f est différentiable sur U tout entier et que pour un accroissement $h \in \mathbb{C}$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i d\theta \implies d\theta(h) = \text{Im} \frac{dz}{z}(h) = \text{Im} \frac{h}{z} \implies |d\theta(h)| \leq \frac{|h|}{1 - \delta} \text{ sur } U.$$

On en déduit

$$df(z)(h) = \frac{(1 - \delta) \cos \theta d\theta(h)}{\sqrt{1 - (1 - \delta)^2 \sin^2 \theta}} \implies |df(z)(h)| \leq \frac{|\cos \theta| |h|}{\sqrt{1 - (1 - \delta)^2 \sin^2 \theta}} \leq |h|.$$

Par conséquent on a bien $\|df(z)\| \leq 1$ sur U . Cependant $f(i) - f(-i) = 2 \arcsin(1 - \delta)$ est arbitrairement proche de π , qui est plus grand que $|i - (-i)| = 2$, quand $\delta \rightarrow 0$.

5. Fonctions ayant des dérivées partielles continues

Il résulte de l'exemple 1.10 qu'une fonction admettant des dérivées partielles en tout point n'est pas nécessairement différentiable. Cependant, la situation s'améliore beaucoup si on suppose que les dérivées partielles sont continues.

5.1. Théorème. Soit sur un ouvert U d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, muni d'un repère et de coordonnées $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une fonction admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sur un voisinage V d'un point $x \in U$, qui sont continues au point x . Alors f est différentiable au point x , et

$$df(x)(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j.$$

Démonstration. On peut supposer $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$. L'existence des dérivées partielles permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{j=1}^n \left[f(x_1+h_1, \dots, x_{j-1}+h_{j-1}, x_j+th_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1+h_1, \dots, x_{j-1}+h_{j-1}, x_j+th_j, x_{j+1}, \dots, x_n) h_j dt, \end{aligned}$$

l'intégrale étant bien définie au sens de Kurzweil-Henstock puisqu'on intègre la dérivée d'une fonction dérivable. Si on pose $\ell(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j$, il vient

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - \ell(h) &= \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1+h_1, \dots, x_{j-1}+h_{j-1}, x_j+th_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) h_j dt. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|y - x\| = \max |y_j - x_j| < \delta$ implique $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\| \leq \varepsilon$. Si on prend $\|h\| = \max |h_j| < \delta$, on obtient donc en norme

$$\|f(x+h) - f(x) - \ell(h)\| \leq \sum_{j=1}^n \varepsilon |h_j| \leq n\varepsilon \|h\|.$$

Ceci montre bien que f est différentiable en x et que $df(x) = \ell$. □

5.2. Généralisation. Une démonstration presque identique donnerait le résultat plus général suivant : soit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ un produit d'espaces de Banach, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathcal{F}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction admettant des différentielles partielles $d_{x_j} f(y) \in \mathcal{L}_c(E_j, \mathcal{F})$ pour y dans un voisinage V d'un point $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, avec de plus $y \mapsto d_{x_j} f(y)$ continue au point x . Alors f est différentiable en x et

$$df(x)(h) = \sum_{j=1}^n d_{x_j} f(x)(h_j) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{F}).$$

6. Différentielles d'ordre quelconque

6.A. Isomorphismes canoniques

Soient E_1, E_2, \dots, E_p, F des espaces de Banach. Nous affirmons qu'il existe un isomorphisme canonique

$$(6.1) \quad \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)) \simeq \mathcal{L}_c^2(E_1, E_2; F)$$

sur l'espace des applications bilinéaires continues $E_1 \times E_2 \rightarrow F$, et plus généralement un isomorphisme canonique

$$(6.1_p) \quad \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, \mathcal{L}_c(\dots \mathcal{L}_c(E_p, F) \dots))) \simeq \mathcal{L}_c^p(E_1, E_2, \dots, E_p; F)$$

sur l'espace des applications p -multilinéaires continues $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$. De plus ces isomorphismes sont aussi des *isométries d'espaces de Banach*, c'est-à-dire qu'ils conservent les normes $\|\cdot\|$. Démontrons-le par exemple pour (6.1).

Partons d'une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$. Pour $h_1 \in E_1, h_2 \in E_2$ nous avons $\ell(h_1) \in \mathcal{L}_c(E_2, F)$ et on peut donc évaluer $\ell(h_1)(h_2) \in F$. Posons

$$\varphi(h_1, h_2) = \ell(h_1)(h_2).$$

Il est clair que φ définit une application bilinéaire $E_1 \times E_2 \rightarrow F$. De plus

$$\|\varphi(h_1, h_2)\| = \|\ell(h_1)(h_2)\| \leq \|\ell(h_1)\| \|h_2\| \leq \|\ell\| \|h_1\| \|h_2\|,$$

donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq \|\ell\|$. Réciproquement, si nous partons d'une forme bilinéaire continue $\varphi \in \mathcal{L}_c^2(E_1, E_2; F)$ on peut lui associer l'application linéaire $\ell \in \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$ en posant

$$\ell : E_1 \ni h_1 \longmapsto \ell(h_1) = (h_2 \longmapsto \varphi(h_1, h_2)) \in \mathcal{L}_c(E_2, F).$$

Comme $\|\varphi(h_1, h_2)\| \leq \|\varphi\| \|h_1\| \|h_2\|$, on trouve $\|\ell(h_1)\| \leq \|\varphi\| \|h_1\|$ pour tout $h_1 \in E_1$, donc $\|\ell\| \leq \|\varphi\|$. L'isomorphisme (6.1_p) s'obtient de même en posant

$$(6.2) \quad \varphi(h_1, h_2, \dots, h_p) = \ell(h_1)(h_2) \dots (h_p).$$

Comme l'écriture ne diffère que par la position de virgules et des parenthèses, on se permet d'identifier les espaces obtenus : on identifiera ainsi φ et ℓ , et on utilisera le symbole $=$ au lieu de \simeq pour un tel isomorphisme canonique. Par récurrence sur p , on effectuera également l'identification

$$(6.3) \quad \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c^{p-1}(E_2, \dots, E_p; F)) = \mathcal{L}_c^p(E_1, E_2, \dots, E_p; F)$$

6.B. Différentielles d'ordre supérieur

On note ici $\mathcal{L}_c^p(E^p; F)$ l'espace des applications p -multilinéaires $E^p = E \times \dots \times E \rightarrow F$. D'après les isomorphismes 6.A, on peut définir par récurrence une différentielle p -ième

$$d^p f : U \rightarrow \mathcal{L}_c^p(E^p; F) \quad \text{par } d^p f = d(d^{p-1} f),$$

car on obtient inductivement

$$d(d^{p-1} f) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c^{p-1}(E^{p-1}; F)) = \mathcal{L}_c^p(E^p; F).$$

De façon précise :

6.4. Définition. Soient \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines associés à des espaces de Banach E, F , soit U un ouvert de \mathcal{E} et $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une application. On dit que

- (i) f est p -fois différentiable en un point $x \in U$ s'il existe un voisinage ouvert V de x sur lequel $df, d^2 f, \dots, d^{p-1} f$ existent, et si $d^p f(x)$ existe.
- (ii) que f est de classe C^p sur U si f est continue et admet des différentielles $df, d^2 f, \dots, d^p f$ qui sont elles-mêmes continues sur U tout entier (comme la différentiabilité implique la continuité, il suffit bien sûr de vérifier que la différentielle p -ième $d^p f$ est continue). Si $p = 0$, f de classe C^0 veut simplement dire que f est continue.

Prenons $(h_1, \dots, h_p) \in E^p$. Nous avons par définition

$$d^p f(x)(h_1) = d(d^{p-1} f)(x)(h_1) = \partial_{h_1}(d^{p-1} f)(x) \in \mathcal{L}_c^{p-1}(E^{p-1}; F).$$

Pour $h' = (h_2, \dots, h_p) \in E^{p-1}$, désignons par $\ell_{h'}$ l'application linéaire continue

$$\ell_{h'} : \mathcal{L}_c^{p-1}(E^{p-1}; F) \rightarrow F, \quad \Phi \mapsto \Phi(h_2, \dots, h_p).$$

Comme $\ell_{h'}$ est linéaire continue, elle coïncide avec sa différentielle en chaque point et on a donc

$$d(\ell_{h'} \circ d^{p-1} f) = \ell_{h'} \circ d(d^{p-1} f) = \ell_{h'} \circ d^p f.$$

Il vient

$$d^p f(x)(h_1, \dots, h_p) = \ell_{h'}(d^p f(x)(h_1)) = d(\ell_{h'} \circ d^{p-1} f)(x)(h_1) = \partial_{h_1}(\ell_{h'} \circ d^{p-1} f)(x)$$

avec

$$\ell_{h'} \circ d^{p-1} f(x) = d^{p-1} f(x)(h_2, \dots, h_p).$$

On peut encore reformuler ce calcul en écrivant de manière condensée que

$$d^p f(x)(h_1, \dots, h_p) = \partial_{h_1} \left(x \mapsto d^{p-1} f(x)(h_2, \dots, h_p) \right) (x).$$

Par récurrence sur p , on obtient donc

$$(6.5) \quad d^p f(x)(h_1, \dots, h_p) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_p} f(x)$$

où ∂_h désigne l'opérateur $f \mapsto \partial_h f$ de différentiation dans la direction $h \in E$. En dimension finie, disons $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$, il en résulte également par récurrence sur p que pour tout $(h_1, \dots, h_p) \in E^p$ on a la formule

$$(6.6) \quad d^p f(x)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(x) h_{1,j_1} \dots h_{p,j_p},$$

avec $h_i = (h_{i,1}, \dots, h_{i,n})$.

Nous verrons plus loin que l'ordre des différentiations n'importe pas si f est supposée p -fois différentiable. Mais ce n'est pas vrai si on suppose seulement l'existence de dérivées partielles, comme le montre l'exemple suivant.

6.7. Exemple de non commutation des dérivées partielles. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Les dérivées partielles premières sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), & \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), & \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Elles sont continues en $(0, 0)$, de sorte que f est partout différentiable (et même de classe C^1) sur \mathbb{R}^2 , et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = y &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Accessoirement, on peut vérifier que pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{(6x^2y^2 - 3x^4 + y^4)y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

n'a pas de limite en $(0, 0)$. □

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, le Théorème 5.1 fournit aussitôt la conséquence suivante qui montre que le point clé est la continuité des dérivées partielles d'ordre le plus élevé.

6.8. Proposition. *Si $U \subset \mathcal{E}$ est un ouvert d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ admet des dérivées partielles $\partial^s f / \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}$ jusqu'à l'ordre $s = p$, et si les dérivées partielles d'ordre p sont continues sur U , alors f est de classe C^p sur U .*

6.C. Différences finies et théorème de Schwarz

On va maintenant donner une expression commode de la différentielle p -ième en termes de différences finies itérées. Ce type de formule a d'ailleurs une grande importance en calcul numérique, car on obtient ainsi aisément des approximations des dérivées partielles. Pour $h \in E$, on introduit « l'opérateur aux différences finies »

$$(6.9) \quad \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

On suppose ici f définie et différentiable sur U , avec U ouvert, de sorte que $\Delta_h f$ est bien définie au voisinage de tout point $x \in U$ si h est assez petit. Pour $x \in U$ et $k \in E$ assez petit, la formule (4.6) donne

$$(6.10) \quad \Delta_k f(x) = f(x+k) - f(x) = \int_0^1 df(x+tk)(k) dt.$$

Supposons f deux fois différentiable au point x (c'est-à-dire f différentiable au voisinage de x et df différentiable en x). On peut alors écrire

$$(6.11) \quad \Delta_h \Delta_k f(x) = \Delta_k f(x+h) - \Delta_k f(x) = \int_0^1 (df(x+h+tk) - df(x+tk))(k) dt.$$

L'hypothèse de différentiabilité de df en x permet d'écrire

$$df(x+h) = df(x) + d^2 f(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

et on trouve donc par différence

$$\begin{aligned} df(x+h+tk) - df(x+tk) &= (df(x) + d^2 f(x)(h+tk) + \|h+tk\|\varepsilon(h+tk)) \\ &\quad - (df(x) + d^2 f(x)(tk) + \|tk\|\varepsilon(tk)) \\ &= d^2 f(x)(h) + \|h+tk\|\varepsilon(h+tk) - \|tk\|\varepsilon(tk). \end{aligned}$$

En évaluant cette différence (qui est un élément de $\mathcal{L}_c(E, F)$) sur le vecteur k , on obtient

$$\begin{aligned} &\| (df(x+h+tk) - df(x+tk))(k) - d^2 f(x)(h, k) \| \\ &\leq (\|h\| + t\|k\|)\|k\| \times \|\varepsilon(h+tk)\| + (t\|k\|)\|k\| \times \|\varepsilon(tk)\|. \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$ on a $\|\varepsilon(h)\| \leq \eta$ si $\|h\| \leq \delta$ est assez petit. Pour $\|h\| \leq \delta/2$ et $\|k\| \leq \delta/2$, on en déduit alors

$$\| (df(x+h+tk) - df(x+tk))(k) - d^2 f(x)(h, k) \| \leq \eta(\|h\| + 2t\|k\|)\|k\|.$$

Par intégration sur $[0, 1]$ et compte tenu de l'égalité (6.11) il vient

$$\| \Delta_h \Delta_k f(x) - d^2 f(x)(h, k) \| \leq \int_0^1 \eta(\|h\| + 2t\|k\|)\|k\| dt = \eta(\|h\| + \|k\|)\|k\|.$$

Si nous remplaçons (h, k) par $(\lambda h, \lambda k)$ avec λ tendant vers 0, alors η peut être pris arbitrairement petit, et on en déduit après division par λ^2 que

$$(6.12) \quad d^2 f(x)(h, k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} \Delta_{\lambda h} \Delta_{\lambda k} f(x).$$

Comme

$$\Delta_h \Delta_k f(x) = f(x + h + k) - f(x + h) - f(x + k) + f(x),$$

on voit que les opérateurs Δ_h et Δ_k commutent. Nous pouvons alors énoncer :

6.13. Théorème de Schwarz.

(i) Si f est deux fois différentiable en un point x d'un ouvert U , $d^2 f(x) \in \mathcal{L}_c(E^2, F)$ est toujours une application bilinéaire symétrique, c'est-à-dire que pour tous $h, k \in E$

$$d^2 f(x)(h, k) = d^2 f(x)(k, h) \iff \partial_h \partial_k f(x) = \partial_k \partial_h f(x).$$

(ii) Si f est p fois différentiable en un point x , $d^p f(x)(h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{L}_c^p(E^p; F)$ est p -multilinéaire symétrique, c'est-à-dire que

$$d^p f(x)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(p)}) = d^p f(x)(h_1, \dots, h_p), \quad \forall h_1, \dots, h_p \in E, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p.$$

La propriété 6.13 (ii) résulte de (6.5) et de la commutation des dérivées directionnelles. Lorsque f est p fois différentiable, on peut aussi vérifier cette symétrie directement à partir de la limite des différences finies itérées, qui fournit la formule

$$(6.14) \quad d^p f(x)(h_1, \dots, h_p) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_p} f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^p} \Delta_{\lambda h_1} \dots \Delta_{\lambda h_p} f(x).$$

La démonstration de cette dernière formule est très semblable au cas $p = 2$, on écrit par récurrence

$$\Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_p} f(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 d^{p-1} f(x + t_2 h_2 + \dots + t_p h_p)(h_2, \dots, h_p) dt_2 \dots dt_p$$

à l'aide d'une itération de (4.6), ce qui donne

$$\Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_p} f(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 (d^{p-1} f(x + h_1 + t_2 h_2 + \dots + t_p h_p) - d^{p-1} f(x + t_2 h_2 + \dots + t_p h_p))(h_2, \dots, h_p) dt_2 \dots dt_p.$$

Le reste de la preuve se poursuit de manière analogue en exprimant la condition de différentiabilité de $g = d^{p-1} f$ en x , qui fait apparaître par différence $d^p f(x)(h_1, \dots, h_p)$ et des termes d'erreur contrôlés par $\eta(\sum \|h_j\|) \|h_2\| \dots \|h_p\|$ au second membre. \square

6.D. Composition de fonctions de classe C^p

L'objet de cette courte section est de montrer le résultat assez peu surprenant qui suit.

6.15. Proposition. *Si $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont des espaces affines associés à des espaces de Banach E, F, G , si $U \subset E, V \subset F$ sont des ouverts et $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathcal{G}$ sont des applications p -fois différentiables (resp. de classe C^p), alors $g \circ f$ est p -fois différentiable (resp. de classe C^p).*

Démonstration. Pour $p = 0$, c'est le théorème de composition des fonctions continues. Pour $p = 1$, on a $d(g \circ f)(x) = (dg)(f(x)) \circ df(x)$, ce qui peut se récrire

$$d(g \circ f) = \Phi \circ (dg \circ f, df)$$

où $\Phi : \mathcal{L}_c(F, G) \times \mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathcal{L}_c(E, G)$, $(u, v) \mapsto u \circ v$ est une application bilinéaire continue (noter que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$). Si f et g sont de classe C^1 , alors f, df, dg et Φ sont continues, donc $d(g \circ f)$ est continue et par suite $g \circ f$ est bien de classe C^1 . On va voir en fait plus loin (Lemme 6.16) que toute application multilinéaire continue Φ est de classe C^∞ . Si nous admettons ce résultat, alors on voit facilement par récurrence sur p que f, g de classe $C^p \Rightarrow g \circ f$ de classe C^p . Supposons ce résultat déjà démontré à l'ordre $p - 1$. Alors dg étant de classe C^{p-1} , on en conclut que $dg \circ f$ est de classe C^{p-1} par l'hypothèse de récurrence. Mais si $f_1 : U \rightarrow E_1, f_2 : U \rightarrow E_2$ sont de classe C^k , il est trivial que $\psi = (f_1, f_2) : U \rightarrow E_1 \times E_2, x \mapsto \psi(x) = (f_1(x), f_2(x))$ est aussi de classe C^k et que $d^k \psi = (d^k f_1, d^k f_2)$. Par conséquent

$$(dg \circ f, df) : U \rightarrow \mathcal{L}_c(F, G) \times \mathcal{L}_c(E, F)$$

est de classe C^{p-1} , et comme Φ est de classe C^∞ (donc en particulier C^{p-1}), l'hypothèse de récurrence implique de nouveau que $d(g \circ f) = \Phi \circ (dg \circ f, df)$ est de classe C^{p-1} . Ceci entraîne bien que $g \circ f$ est de classe C^p . Le cas p -fois différentiable se démontre de même. □

6.16. Lemme. *Toute application p -multilinéaire continue*

$$\Phi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$$

est de classe C^∞ . Pour $h_{i,j} \in E_j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq p$, et $k \leq p$ on a

$$\begin{aligned} d^k \Phi(x_1, \dots, x_p) & \left((h_{1,1}, \dots, h_{1,p}), \dots, (h_{k,1}, \dots, h_{k,p}) \right) \\ & = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq p} \Phi(x_1, \dots, h_{\sigma(1),j_1}, \dots, h_{\sigma(k),j_k}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

où $h_{i,j}$ vient s'insérer à la place de x_j . En particulier $d^p \Phi$ est une forme p -multilinéaire constante (indépendante des x_j) et $d^k \Phi = 0$ pour $k > p$. □

Démonstration. Cette formule se réduit à 2.7 pour $k = 1$, et se démontre par récurrence sur k en évaluant $d^{k-1} \Phi(x + h_1) - d^{k-1} \Phi(x)$ pour $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $h_i = (h_{i,1}, \dots, h_{i,p})$. □

6.17. Remarque. On appelle application polynomiale $P : E \rightarrow F$ de degré s toute application de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x)^2 + \dots + a_s(x)^s$$

où $a_0 \in F$ est une constante et où, pour $k \geq 1$, $a_k : E^k \rightarrow F$ est une application k -multilinéaire continue. Ici $a_k(x)^k$ est une écriture abrégée pour $a_k(x, \dots, x)$ (la variable x figurant k fois). On remarquera que l'on peut toujours supposer a_k multilinéaire symétrique, quitte à remplacer a_k par sa symétrisée

$$\tilde{a}_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a_k(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, cette notion redonne exactement la notion usuelle de polynôme en n variables sur \mathbb{R}^n (la continuité étant alors automatique). Notons que pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$P(\lambda x) = a_0 + \lambda a_1(x) + \lambda^2 a_2(x)^2 + \dots + \lambda^s a_s(x)^s,$$

de sorte que $f_k(x) = a_k(x)^k$ est la composante homogène de f de degré k . Après composition de a_k avec l'application linéaire $x \mapsto (x)^k = (x, \dots, x)$, $E \rightarrow E^k$, le lemme 6.16 montre que f_k est de classe C^∞ et donne précisément $d^k f_k(x) = k! \tilde{a}_k$ pour tout $x \in E$ (si a_k est symétrique, on a donc plus simplement $d^k f_k(x) = k! a_k$). Pour $m > k$ il vient $d^m f_k = 0$, donc P est de classe C^∞ et $d^m P = 0$ pour $m > s$. \square

7. Formule de Taylor

Soit $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une fonction différentiable plusieurs fois. L'objectif est de trouver un développement de $f(x+h)$ en fonction des puissances successives de h . Pour cela, il est commode de poser $g(t) = f(x+th)$, $t \in [0, 1]$, en supposant que le segment $[x, x+h]$ soit contenu dans U . On trouve de proche en proche

$$g'(t) = df(x+th)(h), \quad g''(t) = d^2 f(x+th)(h, h), \quad \dots, \quad g^{(p)}(t) = d^p f(x+th)(h)^p$$

où $d^p f(x)(h)^p$ est une abréviation commode pour $d^p f(x)(h, \dots, h)$, comme dans la remarque 6.17. Si f est p -fois différentiable sur U , la fonction g est p -fois dérivable sur $[0, 1]$ et des intégrations par parties successives et un raisonnement par récurrence sur p donnent

$$(*) \quad g(1) = g(0) + g'(0) + \dots + \frac{1}{(p-1)!} g^{(p-1)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} g^{(p)}(t) dt.$$

Cette formule se réduit en effet à $g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t) dt$ pour $p = 1$, et si $g^{(p+1)}$ existe, une intégration par parties supplémentaire donne

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} g^{(p)}(t) dt = \left[-\frac{(1-t)^p}{p!} g^{(p)}(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} g^{(p+1)}(t) dt,$$

le terme entre crochets étant égal précisément à $\frac{1}{p!}g^{(p)}(0)$. En remplaçant les dérivées de g par leur expression dans (*), on obtient :

7.1. Formule de Taylor avec reste intégral. Soit $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une fonction p fois différentiable sur U . Alors pour tout segment $[x, x + h] \subset U$ on a

$$f(x + h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} d^j f(x)(h)^j + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} d^p f(x + th)(h)^p dt$$

en convenant de noter $d^0 f(x)(h)^0 = f(x)$.

Pour appliquer cette formule, il est indispensable de savoir calculer $d^p f(x)(h)^p$. Supposons que \mathcal{E} de dimension finie, $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$, et notons (h_1, \dots, h_n) les composantes de h dans la base choisie. D’après (6.6) appliqué avec le vecteur h répété p fois, on obtient

$$d^p f(x)(h)^p = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(x) h_{j_1} \dots h_{j_p}.$$

Il est souvent plus commode d’utiliser une notation en “multi-indices”. Pour cela, à chaque p -uplet (j_1, \dots, j_p) , $j_s \in \{1, \dots, n\}$ on associe un n -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, tel que

$$\alpha_i = \text{nombre d'indices } s \text{ tels que } j_s = i.$$

Par exemple, si $n = 4$, $p = 7$ et $(j_1, \dots, j_7) = (3, 4, 2, 4, 1, 3, 3)$, on trouve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 1, 3, 2)$. En regroupant les variables x_{j_s} et h_{j_s} dans l’ordre, on voit que

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(x) h_{j_1} \dots h_{j_p} = \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}.$$

La longueur du multi-indice α est par définition $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, ici on a $|\alpha| = p$ puisqu’il y a au total p indices j_s , $s = 1, \dots, p$. Cependant, il est clair qu’on obtient le même multi-indice α si (et seulement si) on permute les indices j_s . Le nombre de p -uplets (j_1, \dots, j_p) donnant un multi-indice α fixé est $p! / (\alpha_1! \dots \alpha_n!)$. En effet si on fait opérer le groupe \mathfrak{S}_p sur $J = (j_1, \dots, j_p)$, le sous-groupe G qui fixe J possède $\alpha_1! \dots \alpha_n!$ éléments, de sorte que l’orbite $\simeq \mathfrak{S}_p / G$ possède bien $p! / (\alpha_1! \dots \alpha_n!)$ éléments. Ceci implique la formule pratique

$$(7.2) \quad \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=p} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}.$$

Par exemple, pour un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathcal{F}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on obtient pour tout accroissement $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$(7.3) \quad \frac{1}{p!} d^p f(x, y)(h, k)^p = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \alpha + \beta = p} \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x, y) h^\alpha k^\beta.$$

Dans le cas où $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, on utilise aussi fréquemment la formule de Taylor en combinaison avec la formule de la moyenne.

7.4. Lemme (formule de la moyenne). Soit $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue ≥ 0 et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose ou bien que g est continue, ou bien que w est de classe C^1 et que $g = f'$ est une dérivée. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b w(t) g(t) dt = g(c) \int_a^b w(t) dt.$$

Démonstration. On peut supposer w non identiquement nulle, et donc $\int_a^b w(t) dt > 0$, sinon le résultat est trivial. Posons

$$m = \inf_{t \in [a, b]} g(t) \in]-\infty, +\infty[, \quad M = \sup_{t \in [a, b]} g(t) \in]-\infty, +\infty[.$$

L'encadrement $m \leq g(t) \leq M$ implique

$$m \int_a^b w(t) dt \leq \int_a^b w(t) g(t) dt \leq M \int_a^b w(t) dt \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b w(t) g(t) dt}{\int_a^b w(t) dt} \leq M.$$

Lorsque g est continue, les bornes m, M sont finies et il existe $a_1, b_1 \in [a, b]$ tels que $g(a_1) = m, g(b_1) = M$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$g(]a, b[) \supset g(]a_1, b_1[) \supset]m, M[,$$

on peut donc écrire le quotient des intégrales sous la forme $g(c), c \in]a, b[$, sauf éventuellement si les bornes m ou M sont atteintes. Si par exemple m est atteinte, on a

$$\int_a^b w(t) (g(t) - m) dt = 0, \quad \text{où } w(t) (g(t) - m) \geq 0.$$

Comme w est continue non nulle, il existe un intervalle non vide $]a_2, b_2[$ sur lequel $w(t) \geq \delta > 0$, ce qui implique $\int_{a_2}^{b_2} (g(t) - m) dt = 0$. Mais alors la continuité de g implique $g(t) - m = 0$ sur $]a_2, b_2[$, donc il existe certainement encore $c \in]a_2, b_2[$ tel que $g(c) = m$, ce qui donne le résultat voulu.

Supposons maintenant w de classe C^1 et $g = f'$. Une intégration par parties montre que l'intégrale

$$\int_a^b w(t) f'(t) dt = [w(t) f(t)]_a^b - \int_a^b w'(t) f(t) dt$$

existe au sens de Kurzweil-Henstock, w' et f étant continues. Le théorème de Darboux (cf. ci-dessous) montre que g satisfait encore la propriété des valeurs intermédiaires, donc $g(]a, b[) \supset]m, M[$. Ici les bornes ne sont plus nécessairement finies, mais le raisonnement est presque le même. En effet, si une borne est atteinte par le quotient des intégrales, elle est nécessairement finie et on conclut comme ci-dessus que (par exemple) $\int_{a_2}^{b_2} (g(t) - m) dt = 0$. Mais alors, pour tout $x \in]a_2, b_2[$ on a

$$0 = \int_{a_2}^x (g(t) - m) dt = \int_{a_2}^x (f'(t) - m) dt = f(x) - f(a_2) - m(x - a_2),$$

ce qui implique encore par dérivation que $g(x) = f'(x) = m$ identiquement sur $]a_2, b_2[$. La formule de la moyenne est démontrée dans tous les cas. \square

7.5. Théorème de Darboux. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle de \mathbb{R} . Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Il existe plusieurs preuves, en voici une directe (une autre consiste à se ramener au théorème des accroissements finis d'une variable). D'après la caractérisation des intervalles de \mathbb{R} , il suffit de vérifier que si f est dérivable sur $[a, b]$ et $p \in]f'(a), f'(b)[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = p$. Quitte à changer f en $-f$ et p en $-p$, on peut supposer par exemple $f'(a) < p < f'(b)$. Posons $h(x) = f(x) - px$. La fonction h est continue, elle atteint donc son minimum en un certain point $c \in]a, b[$. Mais comme $h'(a) < 0$, $h'(b) > 0$, il existe $x \in]a, b[$ tel que

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow h(x) < h(a), \quad \text{resp.} \quad \frac{h(x) - h(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow h(x) < h(b),$$

donc $c \in]a, b[$. Ceci implique $h'(c) = 0$, donc $f'(c) = p$. \square

En combinant la formule de Taylor avec reste intégral et la formule de la moyenne appliquée avec $w(t) = \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}$ et $g(t) = g_p(t) = d^p f(x + th)(h)^p$ (qui est la dérivée de g_{p-1}), on obtient l'énoncé suivant.

7.6. Corollaire (formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions à valeurs réelles). Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p -fois différentiable sur un ouvert $U \subset \mathcal{E}$ et si $[x, x+h] \subset U$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \dots + \frac{1}{(p-1)!} d^{p-1} f(x)(h)^{p-1} + \frac{1}{p!} d^p f(x+\theta h)(h)^p.$$

Cette formule se réduit à $f(x+h) - f(x) = df(x+\theta h)(h)$ pour $p = 1$, ce qui l'énoncé "classique" du théorème des accroissements finis. Aucune de ces formulations n'est applicable au cas des fonctions à valeurs vectorielles $f : U \rightarrow F$ avec $\dim_{\mathbb{R}} F \geq 2$. Ainsi pour $p = 1$, $F = \mathbb{C}$ et $f(x) = e^{ix}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(e^{2i\pi\theta}) \times 2\pi, \quad \forall \theta \in]0, 1[,$$

puisque $f'(x) = i e^{ix}$ ne s'annule pas.

Sous une hypothèse plus faible, la formule de Taylor avec reste intégral montre l'existence d'un développement limité :

7.7. Formule de Taylor-Young. Supposons que $f : U \rightarrow F$ soit p fois différentiable au point $x \in U$. Alors pour h tendant vers 0, f admet le développement limité

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \dots + \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p + o(\|h\|^p).$$

Démonstration. En effet, on peut appliquer 7.1 à l'ordre $p - 1$ et estimer terme à terme le reste intégral

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} d^{p-1} f(x+th)(h)^{p-1} dt,$$

au moyen de l'égalité de définition

$$d^{p-1} f(x+th) = d^{p-1} f(x) + d^p f(x+th)(th) + \|th\| \varepsilon(th),$$

qui exprime l'hypothèse de différentiabilité de $d^{p-1} f$ au point x . Étant donné $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|h\| \leq \delta$ implique $\|\varepsilon(h)\| \leq \eta$. Comme $\int_0^1 t \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} dt = \frac{1}{p!}$, on trouve alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} d^{p-1} f(x)(h)^{p-1} dt &= \frac{1}{(p-1)!} d^{p-1} f(x)(h)^{p-1}, \\ \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} d^p f(x)(th)(h)^{p-1} dt &= \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p, \\ \left\| \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!} \|th\| \varepsilon(th)(h)^{p-1} dt \right\| &\leq \frac{\eta}{p!} \|h\|^p \quad \text{pour } \|h\| \leq \delta, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de 7.7. □

7.8. Remarque. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est supposée de classe C^p sur U , on peut appliquer directement la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p pour obtenir

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + df(x)(h) + \dots + \frac{1}{p!} d^p f(x)(h)^p + \varepsilon(x, h) \cdot (h)^p, \\ \varepsilon(x, h) &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} (d^p f(x+th) - d^p f(x)) dt. \end{aligned}$$

On peut alors invoquer la continuité uniforme des fonctions continues sur les compacts pour en déduire que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x, h) = 0$ uniformément sur tout compact $K \subset U$, c'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta = \delta_K > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et tout $h \in E$ avec $\|h\| \leq \delta$ on ait $\|\varepsilon(x, h)\| \leq \eta$. □

8. Limites uniformes de fonctions différentiables

Remarquons tout d'abord que si (f_k) est une suite de fonctions C^∞ qui convergent uniformément vers une limite f sur un ouvert $U \subset \mathcal{E}$, on ne peut en général rien en conclure pour les différentielles $d^p f_k$. Par exemple, si $f_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx$, alors il est clair que la suite (f_k) converge uniformément vers $f = 0$ sur \mathbb{R} , mais les dérivées $f'_k(x) = \cos kx$ ne forment pas une suite convergente. En revanche, si l'on fait des hypothèses adéquates sur les dérivées, il n'est en principe pas trop difficile de remonter aux fonctions par intégration.

8.1. Théorème. Soit $f_k : U \rightarrow \mathcal{F}$ une suite de fonctions différentiables sur un ouvert convexe borné $U \subset \mathcal{E}$. On suppose que :

(i) la suite $df_k : U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ converge uniformément vers une fonction limite $g : U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$.

(ii) il existe un point $x_0 \in U$ tel que la suite $f_k(x_0)$ converge vers une limite $y_0 \in \mathcal{F}$.

Alors la suite (f_k) converge uniformément vers une limite f sur U , et on a $df = g$.
Si de plus les fonctions f_k sont de classe C^1 , alors f est de classe C^1 .]

Démonstration. Soit $\text{diam } U$ le diamètre de U , supposé fini. Pour $x \in U$, la formule (4.6) avec $h = x - x_0$ donne

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_0^1 df_k(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt.$$

Grâce au théorème I 2.17 et à la convergence uniforme des fonctions df_k vers g , on en déduit que $f_k(x)$ converge vers

$$f(x) = y_0 + \int_0^1 g(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt.$$

En majorant la différence, on obtient aisément

$$\|f_k(x) - f(x)\| \leq \|f_k(x_0) - y_0\| + \text{diam } U \times \sup_U \|df_k - g\|$$

compte tenu du fait que $\|x - x_0\| \leq \text{diam } U$. Ceci démontre bien la convergence uniforme de (f_k) vers f quand $k \rightarrow +\infty$. Considérons maintenant un point fixé $x \in U$ et $h \in E$ assez petit pour que $x + h \in U$. Nous avons $[x, x + h] \subset U$ et

$$f_k(x + h) - f_k(x) - df_k(x)(h) = \int_0^1 (df_k(x + th) - df_k(x))(h) dt.$$

La convergence de f_k vers f et la convergence uniforme de df_k vers g impliquent grâce au théorème I 2.17 que

$$f(x + h) - f(x) - g(x)(h) = \int_0^1 (g(x + th) - g(x))(h) dt.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier k_0 tel que $\|df_k - g\| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$, sur U tout entier. En soustrayant les deux égalités qui précèdent, on voit dans ces conditions que

$$\|(f_k(x + h) - f_k(x) - df_k(x)(h)) - (f(x + h) - f(x) - g(x)(h))\| \leq 2\varepsilon \|h\|.$$

En prenant par exemple $k = k_0$, l'hypothèse que f_k soit différentiable au point x implique l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta \implies \|f_k(x + h) - f_k(x) - df_k(x)(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

On en déduit

$$\|h\| < \delta \implies \|f(x + h) - f(x) - g(x)(h)\| \leq 3\varepsilon \|h\|.$$

Ceci montre que f est différentiable en x et que $df(x) = g(x)$. Si de plus f_k est de classe C^1 , alors $df = g = \lim df_k$ est continue comme limite uniforme des fonctions continues df_k , par suite f est de classe C^1 . \square

Dans les applications, il est utile de s'affranchir de l'hypothèse que U soit convexe, et également de l'hypothèse de convergence uniforme des différentielles df_k sur U tout entier. Il suffit en fait de supposer qu'on a *convergence uniforme locale* sur U , c'est-à-dire que tout point $x \in U$ possède un voisinage V sur lequel il y a convergence uniforme.

8.2. Théorème. Soit $f_k : U \rightarrow \mathcal{F}$ une suite de fonctions p -fois différentiables sur un ouvert connexe $U \subset \mathcal{E}$, $p \geq 1$. On suppose que :

- (i) la suite $d^p f_k : U \rightarrow \mathcal{L}_c^p(E, F)$ converge uniformément au voisinage de tout point $x \in V$ vers une fonction limite $g : U \rightarrow \mathcal{L}_c^p(E^p, F)$;
- (ii) pour tout $j = 0, 1, \dots, p - 1$, il existe un point $x_j \in U$ tel que les suites $d^j f_k(x_j)$ converge vers une limite $y_j \in \mathcal{F}$.

Alors

- (a) la suite (f_k) converge vers une limite f sur U , uniformément au voisinage de tout point $x \in U$, et f est p -fois différentiable sur U ;
- (b) pour tout $j = 0, 1, \dots, p - 1$, les dérivées $d^j f_k$ convergent vers $d^j f$, uniformément au voisinage de tout point $x \in U$;
- (c) si de plus les fonctions f_k sont de classe C^p , alors $f = \lim f_k$ est également de classe C^p .

Démonstration. Si l'on démontre (a) et (b), alors (c) résulte immédiatement de ce que $d^p f = g = \lim d^p f_k$ est continue par convergence uniforme locale. Il suffit donc de démontrer (a) et (b), et pour cela on procède par récurrence sur p .

Commençons par démontrer le cas $p = 1$. Soient $z, w \in U$. Écrivons $x \mathcal{R} w$ s'il existe une chaîne de points $w_0 = x, w_1, \dots, w_N = w$ et des boules ouvertes $B_j \subset U$, $0 \leq j \leq N - 1$, en sorte que (a) $w_j, w_{j+1} \in B_j$ et (b) df_k converge uniformément vers g sur B_j . Il est évident que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. Par hypothèse, tout point $x \in U$ possède un voisinage $V = B(x, \delta)$ sur lequel df_k converge uniformément vers une limite g , et on a donc $x \mathcal{R} w$ pour tout $w \in V = B(x, \delta)$. Ceci montre que les classes d'équivalence \dot{x} sont des ouverts. Mais comme chaque classe \dot{x} est le complémentaire dans U de la réunion des autres classes, c'est également une partie fermée (non vide), et la connexité de U montre que $\dot{x} = U$. En particulier on peut relier tout point $x \in U$ par une chaîne $w_0 = x_0, \dots, w_N = x$, avec des boules $B_j \ni w_j, w_{j+1}$ sur lesquelles df_k converge uniformément vers g . En utilisant le théorème 8.1 avec $U = B_j$ qui est un ouvert convexe borné, on voit de proche en proche par récurrence sur j que f_k converge uniformément sur B_j . Pour $j = N - 1$, on atteint la boule B_{N-1} qui contient $x = w_N$, et les propriétés (a), (b) s'ensuivent (dans ce cas, (b) est d'ailleurs contenue dans (a)).

Pour $p \geq 2$, on peut appliquer l'étape de récurrence aux fonctions $\psi_k = df_k$ qui vérifient les hypothèses à l'ordre $p - 1$. Les fonctions ψ_k convergent donc localement

uniformément vers une limite ψ telle que $d^{p-1}\psi = g$, et le cas $p = 1$ déjà démontré donne une limite $f = \lim f_k$ telle que $df = \psi$, d'où $d^p f = d^{p-1}\psi = g$. \square

Pour les séries de fonctions, on a la conséquence suivante.

8.3. Proposition. Soit $\sum_{k \geq k_0} f_k$ une série de fonctions $f_k : U \rightarrow F$ de classe C^p à valeurs dans un espace de Banach F , définies sur un ouvert connexe $U \subset \mathcal{E}$. On suppose que :

- (i) la série $\sum_{k \geq k_0} d^p f_k$ converge uniformément sur un voisinage V de tout point $x \in U$;
- (ii) il existe $x_j \in U$ tel que les séries $\sum_{k \geq k_0} d^j f_k(x_j)$ convergent pour $j = 0, 1, \dots, p-1$.

Alors la série $S(x) = \sum_{k \geq k_0} f_k(x)$ est uniformément convergente au voisinage de tout point de U , la somme S est de classe C^p et on a $d^j S = \sum_{k \geq k_0} d^j f_k$ avec convergence uniforme locale pour $j = 0, 1, \dots, p$ (« propriété de dérivation terme à terme »). \square

Démonstration. On se ramène au théorème 8.2 en considérant la suite des sommes partielles $S_k(x) = \sum_{k_0 \leq l \leq k} f_l(x)$, ce qui donne le résultat pour la convergence uniforme locale des différentielles $d^j f_l$. \square

8.4. Remarque. Sous des hypothèses de convergence normale locale, c'est-à-dire :

- (i) la série $\sum_{k \geq k_0} \|d^p f_k\|$ vérifie

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \sup_{z \in V} \|d^p f_k(z)\| < +\infty$$

pour $V \ni x$ assez petit ,

- (ii) il existe des points $x_j \in U$ tel que les séries $\sum_{k \geq k_0} \|d^j f_k(x_j)\|$ convergent pour tout $j = 0, 1, \dots, p-1$,

alors la série $S(x) = \sum_{k \geq k_0} f_k(x)$ et les séries dérivées terme à terme $\sum_{k \geq k_0} d^j f_k(x)$, $j \leq p$, sont normalement convergentes au voisinage de tout point de U .

Par récurrence, il suffit en effet de vérifier ceci pour $p = 1$ et pour un ouvert U convexe borné. Dans ce cas on utilise une majoration en norme

$$\|f_k(x)\| \leq \|f_k(x_0)\| + \int_0^1 \|df_k(x_0 + t(x - x_0))\| \|x - x_0\| dt$$

pour passer de la convergence normale de $\sum df_k$ à celle de $\sum f_k$. \square

Dans le cas d'un espace de départ \mathcal{E} de dimension finie et d'un ouvert $U \subset \mathcal{E}$, on peut munir l'espace $C^p(U, F)$ des fonctions $f : U \rightarrow F$ de classe C^p des "semi-normes"

$$(8.5) \quad N_{K,p}(f) = \max_{0 \leq j \leq p} \sup_{x \in K} \|d^j f(x)\|$$

pour tous les compacts $K \subset U$. Une suite (f_k) converge par définition vers f dans $C^p(U, F)$ si $N_{K,p}(f_k - f) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ pour tout compact $K \subset U$. Ceci

équivalent à la convergence uniforme de toutes les dérivées au voisinage de tout point (U étant localement compact en dimension finie). On voit aisément qu'on obtient ainsi un espace vectoriel topologique complet, mais la topologie est définie par une famille de semi-normes et non pas par une seule norme ; c'est ce qu'on appelle un *espace de Fréchet*, à savoir un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable et complet.

9. Extrema locaux

Rappelons d'abord quelques définitions standard.

9.1. Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle sur un espace métrique ou topologique U .

- (i) On dit que f présente un maximum global en $a \in U$ si $f(a) = \sup_{x \in U} f(x)$, autrement dit si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in U$.
- (ii) On dit que f présente un maximum local en $a \in U$ s'il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f(a) = \sup_{x \in V} f(x)$, autrement dit si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in V$.
- (iii) On dit que f présente un maximum local strict en $a \in U$ s'il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f(a) > f(x)$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$.
- (iv) Les notions de minimum global, minimum local, minimum local strict se définissent de même en renversant le sens des inégalités.
- (iv) On dit que f présente un extremum (resp. local, local strict) en un point $a \in U$ s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum (resp. local, local strict).

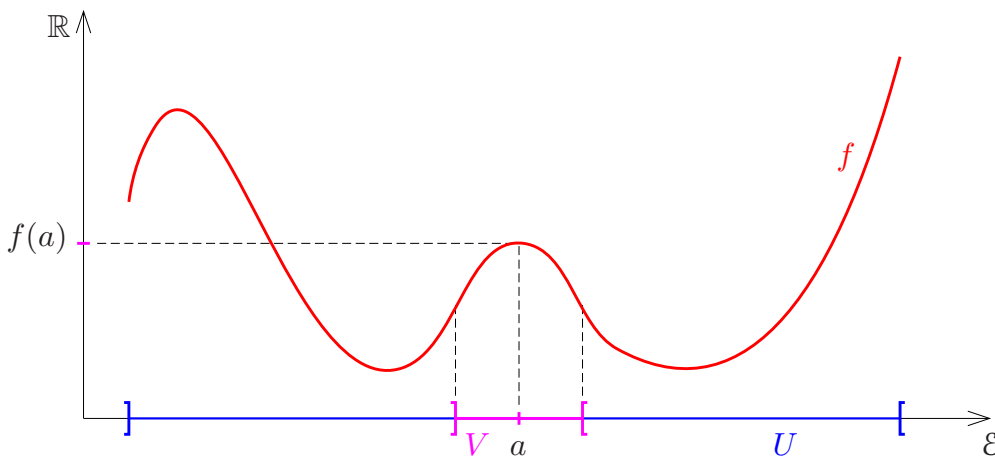


Fig. 4. Maximum local strict en a

On suppose désormais que U est un ouvert d'un espace affine \mathcal{E} associé à un espace de Banach E , et que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles.

9.2. Condition nécessaire à l'ordre 1. Si f admet un extremum local en un point $a \in U$ et si f est différentiable en a , alors $df(a) = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple que f possède un maximum local en $a \in U$, et soit V un voisinage sur lequel $f(a) = \sup_{x \in V} f(x)$. Prenons un vecteur $h \in E$ quelconque. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit nous avons $a + th \in V$, donc $f(a + th) \leq f(a)$. Ceci entraîne

$$\frac{f(a + th) - f(a)}{t} \leq 0 \quad \text{si } t \in]0, \delta[, \quad \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \geq 0 \quad \text{si } t \in]-\delta, 0[,$$

pour $\delta > 0$ assez petit. En calculant la limite à droite et la limite à gauche en $t = 0$, on obtient ainsi

$$df(a)(h) \leq 0, \quad \text{resp. } df(a)(h) \geq 0$$

donc $df(a)(h) = 0$. La démonstration est la même (avec des signes inversés) pour un minimum local. \square

9.3. Remarque. Il est important de n'appliquer ce résultat qu'en un point a intérieur au domaine U . Ainsi $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ admet bien un maximum en $a = 1$, mais on n'a pas pour autant $f'(a) = 0$.

9.4. Définition. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, on appelle point critique tout point $a \in U$ tel que $df(a) = 0$.

D'après la condition nécessaire 9.2, nous avons

$$(9.5) \quad \{\text{extrema locaux}\} \subset \{\text{points critiques}\}$$

mais l'inclusion peut être stricte. Ainsi, la fonction $f(x) = x^3$ admet $a = 0$ comme point critique sur \mathbb{R} , mais $a = 0$ n'est pas un extremum puisque f est strictement croissante. Par ailleurs, il suffit également que la différentiabilité de f fasse défaut en un seul point de l'ouvert U pour que (9.5) soit faux. Ainsi dans $U = \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = |x|$ admet un minimum global en $x = 0$ mais ce n'est pas un point critique car f n'est pas différentiable en 0. Dans la recherche des extrema, il convient donc de ne pas oublier de regarder ce qui se passe aux points de non différentiabilité !

9.6. Condition nécessaire à l'ordre 2. Si f admet un minimum (resp. maximum) local en un point $a \in U$ et si f est deux fois différentiable en a , alors $df(a) = 0$ et pour tout $h \in E$ on a

$$d^2f(a)(h)^2 \geq 0 \quad (\text{resp. } d^2f(a)(h)^2 \leq 0).$$

Démonstration. Raisonnons par exemple dans le cas d'un maximum local. On sait déjà que $df(a) = 0$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point a donne

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a)(h)^2 + \|h\|^2\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Comme $f(a + th) - f(a) \leq 0$ pour t petit, il vient alors aisément

$$\frac{1}{2}d^2f(a)(h)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t^2} \leq 0. \quad \square$$

La forme quadratique $q(h) = d^2f(a)(h)^2$ s'appelle la *Hessienne* de f au point a . En dimension finie $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$, nous avons

$$(9.7) \quad d^2f(a)(h)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j,$$

il s'agit de la forme quadratique définie par la matrice symétrique $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{1 \leq i, j \leq n}$. La méthode de Gauss (ou la recherche des valeurs propres) permet de déterminer la signature (r_+, r_-) de cette forme quadratique, à savoir le nombre r_+ de valeurs propres > 0 et le nombre r_- de valeurs propres < 0 . Comme toute matrice symétrique est diagonalisable, on a

$$r_+ + r_- = r \leq n, \quad \text{où } r = \text{rang de } q = \text{rang de la matrice Hessienne.}$$

9.8. Définition. *En dimension finie, on dit qu'un point critique $a \in U$ est non dégénéré si la forme quadratique Hessienne $d^2f(a)(h)^2$ est non dégénérée, c'est-à-dire si $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)) \neq 0$ (ceci suppose bien entendu que f soit au moins deux fois différentiable au point a).*

L'étude plus fine de la Hessienne permet (avec un peu de chance) de déterminer si un point critique a est un extremum local.

9.9. Condition suffisante à l'ordre 2. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. On suppose que a est un point critique, i.e. $df(a) = 0$.*

- (i) *Si $q = d^2f(a)$ est une forme coercive positive, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $q(h) \geq \varepsilon_0 \|h\|^2$, alors f présente un minimum local strict en a . En dimension finie, il suffit pour cela que q soit définie positive (i.e. positive non dégénérée).*
- (ii) *Si $q = d^2f(a)$ est une forme coercive négative, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $q(h) \leq -\varepsilon_0 \|h\|^2$, alors f présente un maximum local strict en a . En dimension finie, il suffit pour cela que q soit définie négative (i.e. négative non dégénérée).*

En revanche, si $h \mapsto q(h)$ change de signe, la fonction f ne peut avoir un extremum local au point a : on dit qu'il s'agit d'un col.

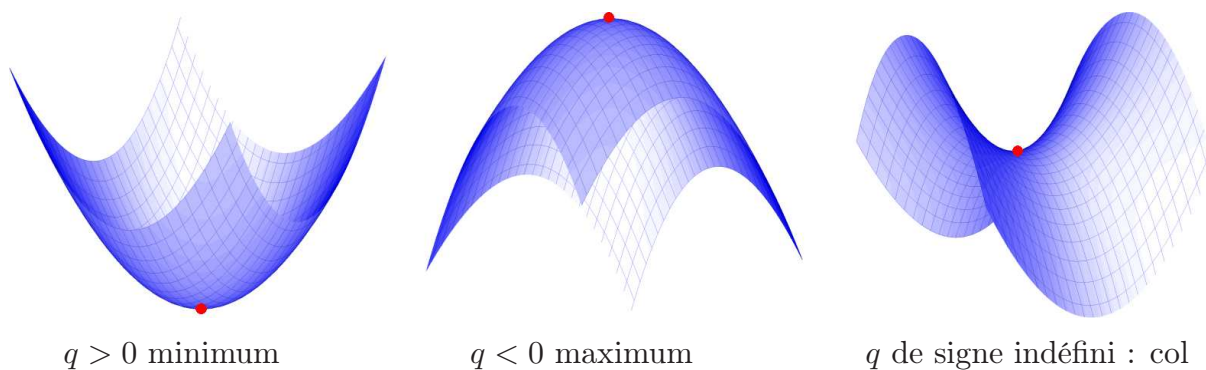


Fig. 5. *points critiques non dégénérés en dimension 2*

Démonstration. Elle est quasi immédiate : la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}q(h) + \|h\|^2\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

(i) Si par exemple q est coercive positive, avec $q(h) \geq \varepsilon_0\|h\|^2$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\varepsilon(h)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0$ pour $\|h\| < \delta$. On en déduit

$$f(a+h) \geq f(a) + (\varepsilon_0 - \varepsilon(h))\|h\|^2 \geq f(a) + \frac{1}{2}\varepsilon_0\|h\|^2 \quad \text{pour } \|h\| < \delta,$$

donc a est un minimum local strict. Le raisonnement est identique dans le cas (ii).

En dimension finie, la sphère unité $S = \{h \in E; \|h\| = 1\}$ est fermée bornée, donc compacte. Si $q > 0$ sur $E \setminus \{0\}$, on en déduit $\varepsilon_0 = \min_{h \in S} q(h) > 0$, donc $q(h/\|h\|) \geq \varepsilon_0$ pour tout $h \neq 0$, et $q(h) \geq \varepsilon_0\|h\|^2$ par homogénéité. La forme q est par conséquent automatiquement coercive.

Enfin, si $q(h) \neq 0$, on voit en remplaçant h par th que

$$\frac{1}{2}q(th) + \|th\|^2\varepsilon(th) = t^2(q(h) + \|h\|^2\varepsilon(th))$$

est du même signe que $q(h)$ pour $t > 0$ assez petit, donc $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a si $q(h)$ change de signe, et on a alors affaire à un col. \square

9.10. Remarque : cas ambigu. Dans le cas où l'espace E est de dimension finie n et où la forme quadratique q est *non dégénérée*, il n'y a jamais d'ambiguïté : on a un minimum local strict si q est de signature $(n, 0)$ ($q > 0$), un maximum local strict si la signature est $(0, n)$ ($q < 0$), et un col dans le cas des signatures intermédiaires.

On ne peut en revanche rien conclure en général si q est *dégénérée*. Par exemple, pour

$$f(x, y) = x^2 + \lambda y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

l'origine $(0, 0)$ est un point critique et la forme quadratique hessienne $q = d^2f(0, 0)$ est donnée par la matrice dégénérée

$$\text{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, on a affaire à un minimum local strict si $\lambda > 0$, un minimum local non strict si $\lambda = 0$ et un col (dégénéré) si $\lambda < 0$.

9.11. Cas de la dimension infinie. Considérons l'espace de Hilbert $E = \ell^2(\mathbb{N})$ des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de carré sommable, muni de la norme hilbertienne $\|x\| = (\sum |x_n|^2)^{1/2}$. On considère sur E la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n^2 - \|x\|^4$$

où (λ_n) est une suite bornée de nombres réels positifs. Il est clair que $f(x) = q(x) - \|x\|^4$ où q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique « diagonale » $\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n y_n$. Cette forme bilinéaire φ est continue si et seulement si la suite (λ_n) est bornée. On voit ainsi très facilement que $d^2 f(0) = 2q$, et q est coercive positive si et seulement si la suite des valeurs propres (λ_n) admet une minoration $\lambda_n \geq \varepsilon_0 > 0$. Supposons au contraire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$, $\lambda_n > 0$. Alors q est définie positive sur E mais non coercive. Dans ce cas, considérons le point $a_n \in E$ tel que

$$a_n = (0, \dots, 0, 2\sqrt{\lambda_n}, 0, \dots) \quad (\text{coefficient } \neq 0 \text{ en position } n),$$

de sorte que $\|a_n\|^2 = 4\lambda_n$ et $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. On trouve $f(a_n) = -12\lambda_n^2 < 0$, donc f n'admet pas de minimum local en 0, ceci bien que $d^2 f(0)$ soit définie positive. La condition de coercivité est donc indispensable en dimension infinie ! \square

Pour lever les ambiguïtés éventuelles, il peut être utile de pousser plus loin le développement limité de f . On a ainsi le résultat suivant.

9.12. Conditions à l'ordre p . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction p fois différentiable. On suppose que a est un point critique, i.e. $df(a) = 0$, et que f admet un développement limité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{p!} d^p f(a)(h)^p + \|h\|^p \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

où $d^p f(a)(h)^p$, $p \geq 2$, est le premier terme non identiquement nul.

Conditions nécessaires.

- (i) si a est un minimum local, alors p est pair et $d^p f(a)(h)^p \geq 0$ pour tout $h \in E$.
- (ii) si a est un maximum local, alors p est pair et $d^p f(a)(h)^p \leq 0$ pour tout $h \in E$.

Conditions suffisantes.

- (iii) Si p est pair et si $d^p f(a)$ est coercive positive, i.e. il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $d^p f(a)(h)^p \geq \varepsilon_0 \|h\|^p$, alors f présente un minimum local strict en a . En dimension finie, il suffit que $d^p f(a)(h)^p > 0$ pour $h \neq 0$.
- (iv) Si p est pair et si $d^p f(a)$ est coercive négative, i.e. il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $d^p f(a)(h)^p \leq -\varepsilon_0 \|h\|^p$, alors f présente un maximum local strict en a . En dimension finie, il suffit que $d^p f(a)(h)^p < 0$ pour $h \neq 0$.
- (v) Si p est pair et si $h \mapsto d^p f(a)(h)$ change de signe, alors a est un col (dégénéré pour $p \geq 4$).
- (vi) Si p est impair (donc $p \geq 3$), alors a est un col dégénéré.

Démonstration. Les propriétés (i, ii) résultent de ce qu'on a, sous les hypothèses faites,

$$\frac{1}{p!} d^p f(a)(h)^p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t^p}.$$

Si p est impair, il existe h tel que $d^p f(a)(h)^p \neq 0$ et on voit que

$$f(a+th) - f(a) \sim \frac{t^p}{p!} d^p f(a)(h)^p$$

change de signe avec t , de sorte qu'il s'agit d'un col (dégénéré puisqu'ici $d^2 f(a) = 0$). La propriété (vi) est démontrée, et la parité de p s'ensuit dans (i) et (ii), ainsi que les conclusions sur le signe de $d^p f(a)(h)^p$.

La preuve de (iii), (iv) et (v) est entièrement analogue au cas $p = 2$ (y compris le raisonnement de compacité de la sphère en dimension finie) : nous laissons les détails au lecteur. Les cas ambigus sont ceux où p est pair et $h \mapsto d^p f(a)(h)^p$ est semi-positive ou semi-négative, mais non coercive. □

10. Fonctions convexes

Nous étudions ici les fonctions convexes de plusieurs variables, définies sur un ouvert convexe arbitraire U d'un espace affine \mathcal{E} associé à un espace de Banach E .

10.1. Définition. Soit U un ouvert convexe. On dit qu'une fonction réelle $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tous points $a, b \in U$ et tout $t \in [0, 1]$ on a

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b),$$

ce qui revient à dire que le graphe de f est situé "sous" la corde reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. De façon équivalente, ceci signifie que l'épigraphe

$$\Gamma^{\geq}(f) = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\}$$

est une partie convexe de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$.

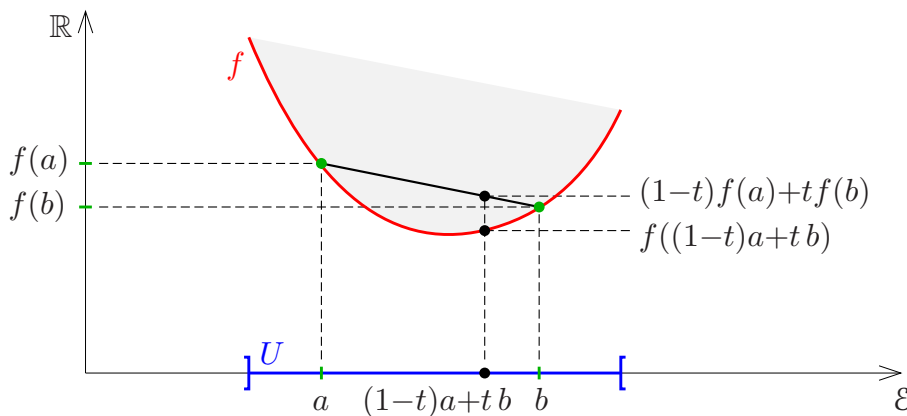


Fig. 6. Fonction convexe et son épigraphe

En renversant le sens des inégalités, on obtient la notion de fonction concave : par définition, une fonction est *concave* si

$$(10.2) \quad \forall a, b \in U, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Une fonction f est *concave* si et seulement si $-f$ est convexe, ce qui équivaut à dire via la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$ que l'hypographe $\Gamma^{\leq}(f) = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}; y \leq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$.

Dans la définition de la convexité (resp. de la concavité), on peut encore écrire $(1 - t)a + tb = a + t(b - a)$, et si l'on pose $h = b - a \in E$, ceci revient à demander que la fonction d'une variable $g_{a,h}(t) = f(a + th)$ soit convexe (resp. concave) sur l'intervalle ouvert $I = \{t \in \mathbb{R}; a + th \in U\}$. On va commencer par rappeler quelques caractérisations des fonctions convexes d'une variable. Pour une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et des points $t_1 \neq t_2$ dans I , on introduit le *taux d'accroissement*

$$(10.3) \quad \tau_g(t_1, t_2) = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1},$$

qui est trivialement symétrique en (t_1, t_2) . Notons aussi que g est convexe si et seulement si $t \mapsto g(-t)$ est convexe (idem pour la concavité).

10.4. Proposition. *Considérons une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} .*

- (i) *g est convexe si et seulement si pour tout $t_1 \in I$, le taux d'accroissement $t_2 \mapsto \tau_g(t_1, t_2)$ est une fonction croissante sur $]t_1, \sup I[$ (resp., sur $] \inf I, t_1[$).*
- (ii) *Si g est convexe, alors elle est continue et admet en tout point des dérivées à droite et à gauche*

$$g'(t + 0) = \lim_{h > 0, h \rightarrow 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h}, \quad g'(t - 0) = \lim_{h < 0, h \rightarrow 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h}.$$

De plus, $t \mapsto g'(t + 0)$ est croissante continue à droite, $t \mapsto g'(t - 0)$ est croissante continue à gauche, on a $g'(t - 0) \leq g'(t + 0)$, et le nombre de points anguleux $t \in I$ où $g'(t - 0) < g'(t + 0)$ est au plus dénombrable.

Démonstration. Si l'on pose $h = b - a$, l'inégalité de la définition 1 équivaut à $g(a + th) - g(a) \leq t(g(b) - g(a))$, soit encore $\tau_g(a, a + th) \leq \tau_g(a, b)$ pour tout $t \in [0, 1]$, et (i) s'ensuit facilement.

(ii) L'existence des dérivées à droite et à gauche résulte du fait que

$$h \mapsto \tau_g(t, t + h) = \frac{g(t + h) - g(t)}{h}$$

est croissante majorée sur $] - \varepsilon, 0[$ et croissante minorée sur $]0, \varepsilon[$; en fait, $\tau_g(t_1, t_2)$ est croissante en t_1 et t_2 , et pour $h < 0 < \tilde{h}$ on a donc

$$\tau_g(t, t + h) = \tau_g(t + h, t) \leq \tau_g(t + h, t + \tilde{h}) \leq \tau_g(t, t + \tilde{h}).$$

Par passage à la limite à droite et à gauche quand $h, \tilde{h} \rightarrow 0$ on en déduit bien $g'(t - 0) \leq g'(t + 0)$. La dérivabilité à droite et à gauche implique la continuité à droite et à gauche, donc la continuité. De plus, pour $t_1 < t_2$ et $h, \tilde{h} \in]0, t_2 - t_1[$ on a

$$(*) \quad \tau_g(t_1, t_1 + h) \leq \tau_g(t_1, t_2) \leq \tau_g(t_2 - \tilde{h}, t_2)$$

d'où à la limite $g'(t_1 + 0) \leq g'(t_2 - 0)$. La propriété (ii) en découle (cf. Exercice 10.12; pour la dénombrabilité des points anguleux, noter que les intervalles non vides $]g'(t - 0), g'(t + 0)[$ sont disjoints et contiennent des rationnels). □

10.5. Lemme. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle. Si u est dérivable à droite en tout point t de l'intérieur de I et $u'(t+0) \geq 0$ (resp. $u'(t+0) \leq 0$), alors u est croissante (resp. décroissante). Idem pour les dérivées à gauche.

Démonstration. Quitte à changer t en $-t$ et u en $-u$ il suffit de considérer les dérivées à droite, et le cas $u'(t+0) \geq 0$. Supposons par l'absurde qu'il y ait des points $a < b$ dans I tels que $u(a) > u(b)$. Grâce à un changement de variable $\tau = \alpha t + \beta$ avec $\alpha > 0$, on peut se ramener à la situation $a = 0$, $b = 1$, $u(0) > u(1)$. Pour $\delta = u(0) - u(1) > 0$, fixons $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand de sorte que $u(2^{-n}) > u(0) - \delta/2$, en utilisant la continuité de u en 0. La fonction $v(t) = u(t) - u(0) + \delta t^{1/n}$ vérifie $v(0) = 0$, $v(1) = u(1) - u(0) + \delta = 0$ et $v(2^{-n}) = u(2^{-n}) - u(0) + \delta/2 > 0$. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $v(c) = \max_{[0,1]} v > 0$. En ce point on a $v'(c+0) \leq 0$, donc $u'(c+0) + \frac{\delta}{n} c^{1/n-1} \leq 0$ et par conséquent $u'(c+0) < 0$, contradiction. \square

10.6. Proposition. Considérons une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On a les équivalences

- (i) g est convexe $\iff g$ est continue et admet en tout point une dérivée à droite $g'(t+0)$ qui est fonction croissante de $t \in I$.
- (i') g est convexe $\iff g$ est continue et admet en tout point une dérivée à gauche $g'(t-0)$ qui est fonction croissante de $t \in I$.
- (ii) Si g est dérivable, g est convexe $\iff g'$ est croissante.
- (iii) Si g est 2 fois dérivable, g est convexe $\iff g'' \geq 0$.

Démonstration. Les implications \implies résultent de la Proposition 10.4. Il suffit donc de démontrer les réciproques \impliedby pour chaque assertion. Il suffit de le faire pour (i), car (i') s'en déduit en changeant t en $-t$ et (ii), (iii) sont des conséquences immédiates. Supposons donc g continue dérivable à droite et $t \mapsto g'(t+0)$ croissante. Alors pour $a < b$ quelconques dans I , la fonction continue

$$u(t) = g(t) - g(a) - (t-a)\tau_g(a,b)$$

vérifie $u(a) = u(b) = 0$ et $u'(t+0) = g'(t+0) - \tau_g(a,b)$ est croissante. Si on avait

$$M = \sup_{[a,b]} u = \max_{[a,b]} u > 0,$$

il existerait $c \in]a, b[$ tel que $u(c) = M$, et on voit alors que $u'(c+0) \leq 0$, donc $u'(t+0) \leq u'(c+0) \leq 0$ pour $t \in [a, c]$. Mais alors d'après le Lemme 10.5, u serait décroissante sur $[a, c]$ et donc $M = u(c) \leq u(a) = 0$, contradiction. Par conséquent on a $u(t) \leq M \leq 0$ sur $[a, b]$, la fonction g est bien située sous sa corde sur l'intervalle $[a, b]$, et la fonction g est convexe. \square

Revenons au cas d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert convexe $U \subset \mathcal{E}$, et posons $g_{a,h}(t) = f(a+th)$. Nous avons

$$g''_{a,h}(t) = d^2 f(a+th)(h)^2.$$

On obtient donc le critère suivant.

10.7. Proposition. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable est convexe (resp. concave) si et seulement si la forme quadratique hessienne $h \mapsto d^2f(x)(h)^2$ est semi-positive (resp. semi-négative) en tout point $x \in U$. En dimension finie, $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$, cette condition s'exprime par le fait que la matrice hessienne $(\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est semi-positive (resp. semi-négative) en tout point $x \in U$.

10.8. Exemple. La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \log(e^x + e^y)$$

est convexe. En effet, des calculs immédiats donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{e^x}{e^x + e^y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}, \end{aligned}$$

et la matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est clairement semi-positive, telle que

$$d^2 f(x, y)(h, k) = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} (h - k)^2.$$

On peut vérifier de même (nous laissons les calculs au lecteur) que la fonction $f(x_1, \dots, x_n) = \log(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ est convexe sur \mathbb{R}^n .

10.9. Exemple. Soit U l'ouvert des matrices symétriques réelles $n \times n$ définies positives. C'est un cône convexe (que l'on peut aussi identifier à l'ouvert des formes quadratiques définies positives sur \mathbb{R}^n ; on peut utiliser le fait que toute forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n est coercive pour voir que c'est bien un ouvert). Alors la fonction

$$U \ni A \mapsto \log(\det A)$$

est concave. Pour le voir, il suffit de montrer que $g(t) = \log(\det((1-t)A + tB))$ est concave sur $[0, 1]$ pour tous $A, B \in U$. Mais on sait que deux formes quadratiques définies positives admettent une base orthogonale commune. On se ramène ainsi, après un changement de base dans \mathbb{R}^n , au cas où A, B sont diagonales. Si $a_i, b_i > 0$ sont les coefficients diagonaux, on trouve

$$g(t) = \log(\det((1-t)A + tB)) = \log \prod_{1 \leq i \leq n} ((1-t)a_i + tb_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \log((1-t)a_i + tb_i),$$

et la concavité de la fonction logarithme montre que g est bien concave. \square

La convexité et la concavité sont fréquemment utilisées pour démontrer des inégalités. Ainsi, si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe (resp. concave), on a l'inégalité plus générale

$$(10.10) \quad f\left(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i f(a_i) \quad \text{resp.} \quad \geq \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i f(a_i)$$

pour tout système de points $a_i \in U$ et tout barycentre $\sum \lambda_i a_i$ à coefficients $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$. La démonstration se fait par récurrence sur p , en utilisant "l'associativité" de la barycentration. Dans le cas de la fonction concave $x \mapsto \log x$ sur $]0, +\infty[$ on obtient

$$\log\left(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i a_i\right) \geq \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \log a_i$$

qui implique, après passage à l'exponentielle,

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i a_i \geq \prod_{1 \leq i \leq p} a_i^{\lambda_i}$$

(inégalité entre la moyenne arithmétique et géométrique, lorsque $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \frac{1}{p}$). Pour des matrices symétriques définies positives A_i , on a de même

$$\det\left(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i A_i\right) \geq \prod_{1 \leq i \leq p} \det(A_i)^{\lambda_i}.$$

10.11. Exercice. Montrer que la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{1/n} \dots x_n^{1/n}$$

est concave sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$ de \mathbb{R}^n (on pourra utiliser pour cela l'inégalité de Cauchy-Schwarz). En déduire que la fonction $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ est concave sur l'ouvert U des matrices symétriques $n \times n$ définies positives (ce résultat est en fait plus fort que la concavité de $A \mapsto \log \det A$ donnée à l'exemple 10.9 – on pourra observer à cet effet qu'une composée $g \circ f$ de fonctions concaves est concave dès que g est croissante).

10.12. Exercice. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert. En utilisant l'inégalité (*) dans la preuve de la Proposition 10.4, montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow t+0} g'(t_1 + 0) &= \lim_{t_1 \rightarrow t+0} g'(t_1 - 0) = g'(t + 0), \\ \lim_{t_1 \rightarrow t-0} g'(t_1 + 0) &= \lim_{t_1 \rightarrow t-0} g'(t_1 - 0) = g'(t - 0), \end{aligned}$$

et en particulier que $t \mapsto g'(t + 0)$ est continue à droite, et $t \mapsto g'(t - 0)$ continue à gauche.

Chapitre II

Méthode du point fixe et théorème des fonctions implicites

Les méthodes itératives, et en particulier la méthode de Newton, figurent parmi les méthodes numériques les plus puissantes permettant la résolution approchée des équations de toute nature. L'idée de ces méthodes est de partir d'une valeur approchée grossière de la solution, et d'en améliorer la précision par une application itérée d'un algorithme bien choisi. D'un point de vue théorique, il s'agit d'une application du théorème du point fixe dans un espace métrique complet, en l'occurrence une partie fermée d'un espace de Banach. Cette même méthode fournit la preuve de deux théorèmes fondamentaux du calcul différentiel : le théorème d'inversion local et le théorème des fonctions implicites. Ces deux théorèmes admettent eux-mêmes de nombreuses conséquences géométriques.

1. Le théorème du point fixe

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \rightarrow E$ une application continue. On dit que $a \in E$ est un *point fixe* de φ si $\varphi(a) = a$. On dit que φ est *contractante* si φ est lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$, c'est-à-dire s'il existe $\lambda < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

1.1. Théorème. *Soit $\varphi : E \rightarrow E$ une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Alors φ admet un point fixe unique $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée (x_p) définie par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a .*

Unicité du point fixe. Si φ avait deux points fixes $a \neq b$, alors $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a, b)$ et $d(a, b) \neq 0$, donc φ ne pourrait être contractante, contradiction.

Existence du point fixe. Soit $x_0 \in E$ un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a alors

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq \lambda d(x_{p-1}, x_p)$$

d'où par récurrence $d(x_p, x_{p+1}) \leq \lambda^p d(x_0, x_1)$. Pour tout entier $q > p$ il vient

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \left(\sum_{i=p}^{q-1} \lambda^i \right) d(x_0, x_1)$$

avec

$$\sum_{i=p}^{q-1} \lambda^i \leq \sum_{i=p}^{+\infty} \lambda^i = \frac{\lambda^p}{1 - \lambda}.$$

On a donc

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{\lambda^p}{1 - \lambda} d(x_0, x_1), \quad \forall p < q$$

ce qui montre que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$. L'égalité $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ et la continuité de φ impliquent à la limite $a = \varphi(a)$. \square

1.2. Estimation de la vitesse de convergence. L'inégalité

$$d(x_p, a) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(a)) \leq \lambda d(x_{p-1}, a)$$

implique par récurrence

$$d(x_p, a) \leq \lambda^p d(x_0, a).$$

La convergence est donc exponentiellement rapide. Lorsque $E = \mathbb{R}^m$, on dit parfois qu'il s'agit d'une *convergence linéaire*, dans le sens où le nombre de décimales exactes de x_p croît au moins linéairement avec p , de façon précise le nombre de décimales exactes est la partie entière $E(|\log_{10} d(x_p, a)|)$ et on a

$$-\log_{10} d(x_p, a) \geq p \log \lambda^{-1} - \log_{10} d(x_0, a).$$

1.3. Généralisation. *Le théorème du point fixe 1.1 reste entièrement valable si on remplace l'hypothèse que φ est contractante par l'hypothèse que φ est continue et qu'il existe une certaine itérée $\varphi^m = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ qui soit contractante.*

Démonstration. En effet, dans ce cas, l'hypothèse que φ^m soit contractante implique que φ^m admet un unique point fixe a . On a donc $\varphi^m(a) = a$ et en appliquant φ à cette égalité on trouve

$$\varphi^m(\varphi(a)) = \varphi^{m+1}(a) = \varphi(\varphi^m(a)) = \varphi(a),$$

de sorte que $\varphi(a)$ est encore un point fixe de φ^m . L'unicité du point fixe de φ^m entraîne $\varphi(a) = a$. Par ailleurs, comme tout point fixe de φ est aussi un point fixe de φ^m , ce point fixe est nécessairement unique. Enfin, pour tout point initial x_0 , la sous-suite $x_{mp} = \varphi^{mp}(x_0) = (\varphi^m)^p(x_0)$ (correspondant aux indices multiples de m) converge vers a . Il en résulte que $x_{mp+r} = \varphi^r(x_{mp})$ converge aussi vers $\varphi^r(a) = a$ pour $r = 0, 1, \dots, m-1$, et on en déduit $\lim_{q \rightarrow +\infty} x_q = a$.

Une autre démonstration de ce résultat consiste à utiliser la fonction distance modifiée

$$\tilde{d}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq m-1} \alpha^i d(\varphi^i(x), \varphi^i(y))$$

pour une constante $\alpha > 0$ bien choisie. On observe d'une part que $\tilde{d}(x, y) \geq d(x, y)$, et d'autre part, la continuité de φ implique que $\lim_{y \in E, d(x, y) \rightarrow 0} \tilde{d}(x, y) = 0$. Les distances d et \tilde{d} sont donc topologiquement équivalentes. Mais on a

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) &= \max_{0 \leq i \leq m-1} \alpha^i d(\varphi^{i+1}(x), \varphi^{i+1}(y)) \\ &\leq \max(\alpha^{-1} \tilde{d}(x, y), \alpha^{m-1} d(\varphi^m(x), \varphi^m(y))) \\ &\leq \max(\alpha^{-1} \tilde{d}(x, y), \alpha^{m-1} \lambda d(x, y)) \\ &\leq \max(\alpha^{-1}, \alpha^{m-1} \lambda) \tilde{d}(x, y). \end{aligned}$$

Si $\lambda \in]0, 1[$ et si l'on choisit $\alpha = \lambda^{-1/m}$, on voit que

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda^{1/m} \tilde{d}(x, y),$$

de sorte que φ est $\lambda^{1/m}$ -contractante pour \tilde{d} , et le Théorème 1.1 s'applique on voit alors que la convergence des suites itérées (x_p) est en $\lambda^{p/m}$. Si $\lambda = 0$, la fonction φ^m est constante et le résultat est trivial (le point fixe unique est cette constante). \square

1.4. Application à la résolution d'équations. Comme première application élémentaire du résultat précédent, soit à résoudre une équation $f(x) = 0$ d'une variable réelle x . Supposons qu'on ait une fonction différentiable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que disons $f(a) < 0, f(b) > 0$, et f strictement croissante, $0 < m \leq f'(x) \leq M$ sur $[a, b]$ (dans le cas opposé $f(a) > 0, f(b) < 0$, et $-M \leq f'(x) < -m < 0$ il suffira de changer f en $-f$). Si on pose

$$\varphi(x) = x - Cf(x)$$

avec une constante $C \neq 0$, il est clair que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\varphi(x) = x$ et donc la résolution de l'équation $f(x) = 0$ se ramène à rechercher les points fixes de φ . L'espace $J = [a, b]$ est complet, et il nous faut vérifier de plus

- que φ envoie bien J dans J ,
- que φ est bien contractante sur J .

Or nous avons $\varphi'(x) = 1 - Cf'(x)$, donc $1 - CM \leq \varphi'(x) \leq 1 - Cm$, et pour le choix $C = 1/M$, la fonction φ est bien contractante dans le rapport $k = 1 - m/M$. De plus φ est croissante et on a $\varphi(a) > a, \varphi(b) < b$, donc $\varphi([a, b]) \subset [a, b]$. Il en résulte que toute suite itérative $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ calculée à partir d'un point $x_0 \in [a, b]$ quelconque va converger vers l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

La vitesse de convergence peut être estimée par la suite géométrique $(1 - m/M)^p$, et on voit qu'on a intérêt à ce que les bornes m et M de l'encadrement $m \leq f' \leq M$ soient proches, ce qui est toujours possible si f' est continue et si l'encadrement initial $[a, b]$ de la solution x cherchée est suffisamment fin. L'objet de ce chapitre est d'étudier et de généraliser ce type de techniques, pour des fonctions d'une ou plusieurs variables.

2. Méthodes itératives, points fixes attractifs et répulsifs

2.A. Cas élémentaire des fonctions d'une variable

Notre objectif est ici d'étudier le comportement itératif d'une fonction d'une variable au voisinage de ses points fixes. Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow I$ une application de classe C^1 . Soit $a \in I$ un point fixe de φ . On peut distinguer trois cas :

(2.1) $|\varphi'(a)| < 1$.

Par continuité de φ' , il existe un intervalle $J = [a - h, a + h]$ sur lequel $|\varphi'| \leq \lambda < 1$, donc φ est contractante de rapport λ sur J ; on a nécessairement $\varphi(J) \subset J$ et par conséquent

$$\forall x_0 \in [a - h, a + h], \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = a.$$

On dit que a est un *point fixe attractif*. Dans ce cas la convergence de la suite (x_p) est au moins exponentiellement rapide : $|x_p - a| \leq \lambda^p |x_0 - a|$.

Cas particulier : $\varphi'(a) = 0$.

Supposons de plus que φ soit de classe C^2 et que $|\varphi''| \leq M$ sur $J = [a - h, a + h] \subset I$. La formule de Taylor donne

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(a) + (x - a)\varphi'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} \varphi''(c) \\ &= a + \frac{1}{2} \varphi''(c)(x - a)^2, \quad c \in]a, x[,\end{aligned}$$

d'où $|\varphi(x) - a| \leq \frac{1}{2} M |x - a|^2$, soit encore $\frac{1}{2} M |\varphi(x) - a| \leq \left[\frac{1}{2} M |x - a|\right]^2$. Supposons h pris assez petit pour que $\frac{1}{2} M h^2 \leq h$, c'est-à-dire $h \leq \frac{2}{M}$. On voit que $\varphi(J) \subset J$, et par récurrence, on en déduit successivement

$$\frac{1}{2} M |x_p - a| \leq \left[\frac{1}{2} M |x_0 - a|\right]^{2^p},$$

$$|x_p - a| \leq \frac{2}{M} \left[\frac{1}{2} M |x_0 - a|\right]^{2^p}.$$

En particulier si x_0 est choisi tel que $|x_0 - a| \leq \frac{1}{5M}$, on obtient

$$|x_p - a| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^p};$$

on voit donc que le nombre de décimales exactes double environ à chaque itération ; 10 itérations suffiraient ainsi théoriquement pour obtenir plus de 1000 décimales exactes ! La convergence est donc ici extraordinairement rapide.

Ce phénomène est appelé phénomène de *convergence quadratique*, et le point fixe a est alors appelé parfois point fixe *super-attractif*.

(2.2) $|\varphi'(a)| > 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \right| = |\varphi'(a)| > 1$, on voit qu'il existe un voisinage $[a - h, a + h]$ de a tel que

$$\forall x \in [a - h, a + h] \setminus \{a\}, \quad |\varphi(x) - a| > |x - a|.$$

On dit alors que le point fixe a est *répulsif*. Dans ce cas, la dérivée φ' est de signe constant au voisinage de a , donc il existe $h > 0$ tel que la restriction $\varphi|_{[a-h, a+h]}$ admette une application réciproque φ^{-1} définie sur $\varphi([a-h, a+h])$, qui est un intervalle contenant $\varphi(a) = a$. L'équation $\varphi(x) = x$ peut se récrire $x = \varphi^{-1}(x)$ au voisinage de a , et comme $(\varphi^{-1})'(a) = 1/\varphi'(a)$, le point a est un point fixe attractif pour φ^{-1} .

(2.3) $|\varphi'(a)| = 1$.

On est ici dans *un cas douteux*, comme le montrent les deux exemples suivants dans lesquels $a = 0$, $\varphi'(a) = 1$:

2.4. Exemple. $\varphi(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a ici $\sin x < x$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la suite itérée (x_p) est strictement décroissante minorée, donc convergente. La limite l vérifie $l = \sin l$, donc $l = 0$.

2.5. Exemple. $\varphi(x) = \sinh x$, $x \in [0, +\infty[$. Comme $\sinh x > x$ pour tout $x > 0$, on voit que le point fixe 0 est répulsif et que $\forall x_0 > 0$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = +\infty$.

2.6. Comportement graphique. Nous voulons décrire ici un peu plus finement le comportement de la suite itérative $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ au voisinage d'un point fixe attractif a . On suppose donc φ de classe C^1 et $|\varphi'(a)| < 1$. On peut de nouveau distinguer plusieurs cas.

(2.6a) $\varphi'(a) \in]0, 1[$.

Par continuité de φ' on va avoir $0 < \varphi'(x) < 1$ au voisinage de a , donc il existe un voisinage $[a-h, a+h]$ sur lequel $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto x - \varphi(x)$ sont strictement croissantes, par suite

$$\begin{aligned} x < \varphi(x) < \varphi(a) = a & \text{ pour } x \in [a-h, a[\\ a = \varphi(a) < \varphi(x) < x & \text{ pour } x \in]a, a+h], \end{aligned}$$

ce qui implique en particulier que $\varphi([a-h, a+h]) \subset [a-h, a+h]$. Il est facile de voir dans ce cas que la suite itérative $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ va être strictement croissante pour $x_0 \in [a-h, a[$ et strictement décroissante si $x_0 \in]a, a+h]$. On obtient alors typiquement un graphe « en escalier » :

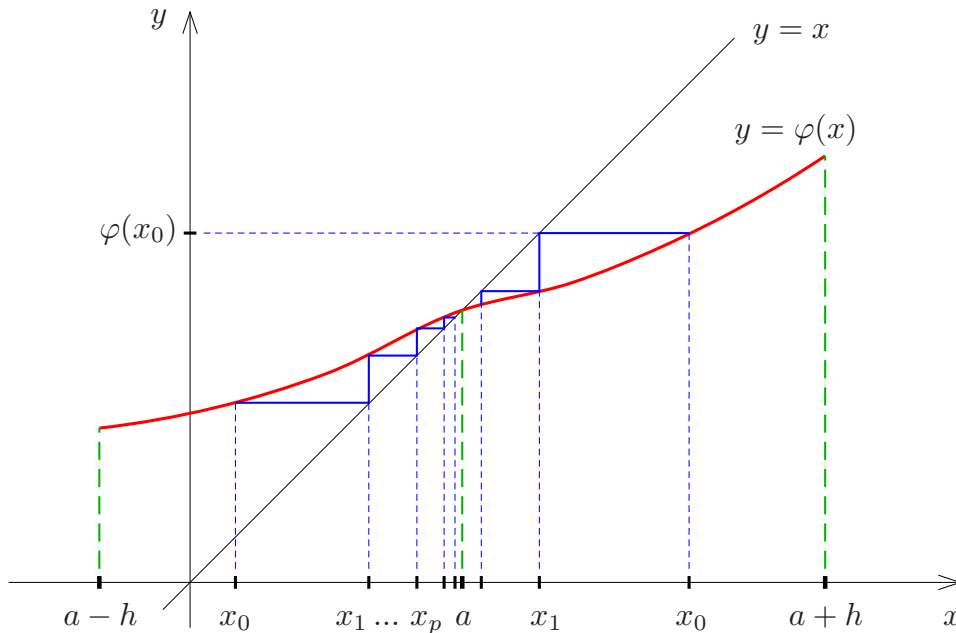


Fig. 1. Convergence « en escalier » lorsque $\varphi'(a) \in]0, 1[$.

(2.6b) $\varphi'(a) \in]-1, 0[$.

Par continuité de φ' on va avoir $-1 < \varphi'(x) < 0$ sur un voisinage $[a-h, a+h]$ de a , sur lequel φ est donc strictement décroissante. Si $x < a$, alors $\varphi(x) > \varphi(a) = a$, tandis que

si $x > a$, on $\varphi(x) < \varphi(a) = a$. Comme $\varphi \circ \varphi$ est strictement croissante (de dérivée < 1) sur $[a - h, a + h]$, le cas (1) montre que les suites x_{2p} et x_{2p+1} sont monotones de limite a . Il s'agit donc de suites *adjacentes*, et on obtient un graphe « en escargot » :

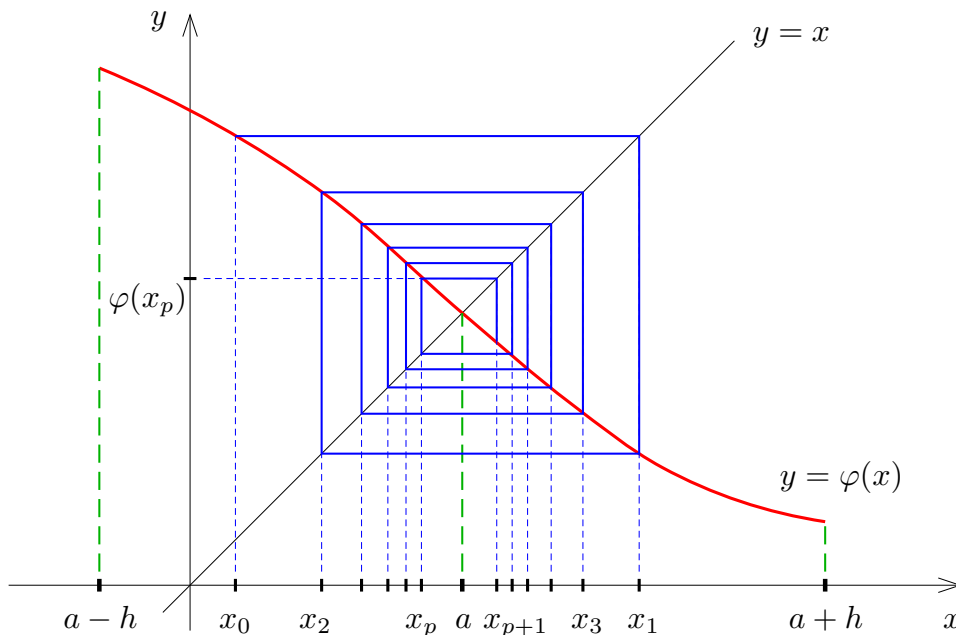


Fig. 2. Convergence « en escargot » lorsque $\varphi'(a) \in] - 1, 0[$.

(2.6c) $\varphi'(a) = 0$.

En général, on ne va rien pouvoir conclure. Cependant, si φ est de classe C^2 et $\varphi''(a) \neq 0$, alors le point a est un extremum local. On choisira h assez petit pour que φ'' ne change pas de signe et $|\varphi'| < 1$ sur $[a - h, a + h]$. Alors, si $\varphi''(a) < 0$ (resp. $\varphi''(a) > 0$), le point a est un maximum local (resp. un minimum local), et pour $x_0 \in [a - h, a + h] \setminus \{a\}$ quelconque, il est facile de voir que la suite (x_p) est strictement croissante (resp. décroissante), mis à part peut-être pour le terme initial x_0 . On aboutit encore à un graphe « en escalier ».

2.B. Notion de rayon spectral

En dimension quelconque, l'étude des suites itératives implique déjà le cas particulier des itérées ℓ^p d'une transformation linéaire continue $\ell \in \mathcal{L}_c(E, E)$ d'un espace de Banach E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Or $\mathcal{L}_c(E, E)$ est une algèbre de Banach, et il est donc très naturel de se placer dans ce cadre plus général.

2.7. Définition. Étant donné une algèbre de Banach $(A, +, \times, \|\cdot\|)$, on introduit le « rayon spectral » d'un élément $\ell \in A$ comme étant

$$\rho(\ell) = \inf_{p \in \mathbb{N}^*} \|\ell^p\|^{1/p}.$$

Il est clair que $\rho(\ell) \leq \|\ell\|$. Il est facile de voir d'autre part que

$$(2.8) \quad \rho(\ell) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\ell^k\|^{1/k}.$$

On a en effet par définition $\|\ell^k\|^{1/k} \geq \rho(\ell)$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|\ell^p\|^{1/p} \leq \rho(\ell) + \varepsilon$, par définition de l'inf. Prenons $k \in \mathbb{N}^*$ et utilisons la division euclidienne $k = pq + r$, $0 \leq r \leq p - 1$. Il vient

$$\ell^k = (\ell^p)^q \ell^r \implies \|\ell^k\| \leq \|\ell^p\|^q \|\ell\|^r \implies \|\ell^k\|^{1/k} \leq (\|\ell^p\|^{1/p})^{pq/k} \|\ell\|^{r/k}.$$

Ceci donne

$$\|\ell^k\|^{1/k} \leq (\rho(\ell) + \varepsilon)^{1-r/k} \|\ell\|^{r/k},$$

et comme $r/k \leq (p - 1)/k$ tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, on voit que la limite du membre de droite est égale à $\rho(\ell) + \varepsilon$, de sorte que $\|\ell^k\|^{1/k} \leq \rho(\ell) + 2\varepsilon$ pour $k \geq k_0(\varepsilon)$. La propriété (2.8) est démontrée. □

Dans le cas de l'algèbre de Banach $A = \mathcal{L}_c(E, E)$, le rayon spectral $\rho(\ell)$ ne dépend pas de la norme N choisie sur E , pourvu que la topologie ne change pas.

2.9. Proposition. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, N une norme équivalente à $\|\cdot\|$, et soient $\|\cdot\|, \|\cdot\|_N$ les normes sur l'algèbre de Banach $A = \mathcal{L}_c(E, E)$ associées respectivement à $\|\cdot\|$ et à N . Alors le rayon spectral $\rho(\ell)$ d'un élément $\ell \in A$ est le même pour ces deux normes.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$C^{-1}\|x\| \leq N(x) \leq C\|x\| \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Mais comme $\|\ell\|_N = \sup_{x \neq 0} N(\ell(x))/N(x)$, on voit que $C^{-2}\|\ell\| \leq \|\ell\|_N \leq C^2\|\ell\|$. En remplaçant ℓ par ℓ^k et en prenant la puissance $1/k$, la constante $C^{2/k}$ tend vers 1, ce qui donne le résultat à la limite. □

Toujours dans le cas où $A = \mathcal{L}_c(E, E)$, le rayon spectral peut aussi se calculer plus directement à partir de la famille des normes $\|\cdot\|_N$ où $N \sim \|\cdot\|$.

2.10. Proposition. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A = \mathcal{L}_c(E, E)$. Alors, pour tout $\ell \in A$, on a*

$$\rho(\ell) = \inf_{N \sim \|\cdot\|} \|\ell\|_N$$

où l'inf est étendu à toutes les normes N équivalentes à $\|\cdot\|$.

Démonstration. D'après 2.8 et 2.9, on a déjà $\rho(\ell) = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \|\ell^k\|_N^{1/k} \leq \|\ell\|_N$ pour toute norme $N \sim \|\cdot\|$. Dans l'autre sens, fixons $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|\ell^p\|^{1/p} \leq \rho(\ell) + \varepsilon$. On définit une nouvelle norme N sur E par

$$(2.11) \quad N(x) = \sqrt{\sum_{j=0}^{p-1} (\rho(\ell) + \varepsilon)^{-2j} \|\ell^j(x)\|^2}.$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme et l'inégalité $\|\ell(x)\| \leq \|\ell\| \|x\|$ implique bien que $\|x\| \leq N(x) \leq C\|x\|$. En posant $k = j + 1 \Leftrightarrow j = k - 1$, nous obtenons

$$N(\ell(x)) = \sqrt{\sum_{j=0}^{p-1} (\rho(\ell) + \varepsilon)^{-2j} \|\ell^{j+1}(x)\|^2} = (\rho(\ell) + \varepsilon) \sqrt{\sum_{k=1}^p (\rho(\ell) + \varepsilon)^{-2k} \|\ell^k(x)\|^2}.$$

Le terme $k=p$ de la sommation de droite est majoré par $\|x\|^2$ puisque $\|\ell^p\| \leq (\rho(\ell) + \varepsilon)^p$, par conséquent $N(\ell(x)) \leq (\rho(\ell) + \varepsilon)N(x)$ et on a bien $\|\ell\|_N \leq \rho(\ell) + \varepsilon$. \square

2.12. Remarque. Lorsque $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$, toutes les normes sont équivalentes, on peut donc choisir pour $\|\cdot\|$ une norme euclidienne ou hermitienne. Dans ce cas, on constate que la formule (2.11) fournit également des normes de ce type. La proposition 2.10 peut donc s'énoncer en restreignant l'inf aux seules normes euclidiennes ou hermitiennes.

\square

On va maintenant relier $\rho(\ell)$ au spectre de ℓ , qui n'est autre, en dimension finie, que l'ensemble des valeurs propres de ℓ .

2.13. Définition. Soit A une algèbre de Banach et $\ell \in A$. On appelle spectre de $\ell \in A$ l'ensemble $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell)$ des scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\ell - \lambda 1_A$ ne soit pas inversible dans A , et on note

$$\rho_{\mathbb{K}}(\ell) = \sup_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell)} |\lambda|.$$

Dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie et $A = \mathcal{L}_c(E, E) = \mathcal{L}(E, E)$, le spectre n'est autre que l'ensemble fini $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subset \mathbb{K}$ des valeurs propres, et on a donc simplement

$$(2.14) \quad \rho_{\mathbb{K}}(\ell) = \max \{|\lambda_j|; \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ valeur propre de } \ell\}.$$

En général, l'ensemble U des éléments inversibles de A est un ouvert, et par conséquent

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell) = \{\lambda \in \mathbb{K}; \ell - \lambda 1_A \in A \setminus U\}$$

est une partie fermée de \mathbb{K} , puisque $A \setminus U$ est fermé et que l'application $\mathbb{K} \rightarrow A$, $\lambda \mapsto \ell - \lambda 1_A$ est continue. On a en fait le résultat plus fort suivant.

2.15. Proposition. Pour tout $\ell \in A$, le spectre $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell)$ est une partie compacte de \mathbb{K} contenue dans le disque fermé $\overline{D}(0, \rho(\ell))$ (resp. dans l'intervalle $[-\rho(\ell), \rho(\ell)]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Démonstration. La compacité de $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell)$ résultera du fait que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell)$ est fermé borné. Or si $|\lambda| > \rho(\ell)$, il existe $\varepsilon > 0$ petit et k_0 assez grand tels que $\|\ell^k\|^{1/k} < |\lambda| - \varepsilon$ pour $k \geq k_0$, donc si l'on pose $h = \lambda^{-1}\ell$, il vient $\|h^k\| \leq ((|\lambda| - \varepsilon)/|\lambda|)^k$ pour $k \geq k_0$, et la série (I.3.2)

$$(1_A - \lambda^{-1}\ell)^{-1} = (1_A - h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} h^k$$

converge. Ceci montre que $\ell - \lambda 1_A = (-\lambda)(1_A - \lambda^{-1}\ell)$ est inversible, donc que $\lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell)$. On en déduit bien que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\ell) \subset \overline{D}(0, \rho(\ell))$. \square

Le résultat le plus fondamental de cette section est celui qui stipule que $\rho(\ell)$ coïncide en fait avec le rayon du spectre complexe (d'où la terminologie de rayon spectral).

2.16. Théorème. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\rho(\ell) = \rho_{\mathbb{C}}(\ell)$, autrement dit*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\ell^k\|^{1/k} = \rho_{\mathbb{C}}(\ell) = \sup_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\ell)} |\lambda|.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.15, on sait déjà que $\rho_{\mathbb{C}}(\ell) \leq \rho(\ell)$. On considère le disque $\Delta = D(0, \rho_{\mathbb{C}}(\ell)^{-1}) \subset \mathbb{C}$ (avec $\Delta = \mathbb{C}$ si $\rho_{\mathbb{C}}(\ell) = 0$). La fonction

$$\Phi : \Delta \rightarrow A, \quad z \mapsto \Phi(z) = (1_A - z\ell)^{-1}$$

est bien définie puisque $1_A - z\ell$ est inversible pour tout $z \in \Delta$. Au voisinage de tout point $z_0 \in \Delta$, la fonction $\Phi(z)$ est développable comme série entière de $z - z_0$, car

$$(1_A - z\ell)^{-1} = ((1_A - z_0\ell) - (z - z_0)\ell)^{-1} = (1_A - z_0\ell)^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k (\ell(1_A - z_0\ell)^{-1})^k$$

converge pour $|z - z_0| < r$ assez petit. C'est donc une fonction holomorphe $\Phi : \Delta \rightarrow A$; sa dérivée complexe $\Phi'(z_0) = (1_A - z_0\ell)^{-1}\ell(1_A - z_0\ell)^{-1}$ s'obtient par dérivation terme à terme de la série entière ci-dessus. Comme la série entière $\sum_{k \geq 0} z^k \ell^k$ de Φ en 0 a pour rayon de convergence $\rho(\ell)^{-1}$ et converge normalement sur tout disque fermé contenu dans $D(0, \rho(\ell)^{-1})$, on en déduit aisément en posant $z = re^{i\theta}$, $dz = ir e^{i\theta} d\theta$ que

$$(2.17) \quad \ell^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{z^{k+1}} \Phi(z) dz = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} e^{-ki\theta} \Phi(re^{i\theta}) d\theta$$

pour $r \in]0, \rho(\ell)^{-1}[$. Or l'intégrale est en fait bien définie pour tout $r \in]0, \rho_{\mathbb{C}}(\ell)^{-1}[$, et si on considère $\Psi_k(z) = \frac{1}{z^k} \Phi(z)$ qui est holomorphe sur $\Delta \setminus \{0\}$, elle vaut

$$I_k(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{z} \Psi_k(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(re^{i\theta}) d\theta.$$

Par dérivation sous le signe somme on trouve

$$I'_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi'_k(re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{ir} \Psi_k(re^{i\theta}) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

(il est bien connu pour les fonctions holomorphes à valeurs complexes qu'une intégrale telle que $I_k(r)$ ne dépend pas de r , et ce résultat s'étend aux fonctions holomorphes banachiques d'après la preuve qui précède). On a donc bien $I_k(r) = \ell^k$ pour tout $r \in]0, \rho_{\mathbb{C}}(\ell)^{-1}[$, et la formule (2.17) implique l'inégalité de Cauchy

$$\|\ell^k\| \leq \frac{M(r)}{r^k}, \quad M(r) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|\Phi(re^{i\theta})\|.$$

On en déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\ell^k\|^{1/k} \leq \frac{1}{r}$, et en faisant tendre r vers $\rho_{\mathbb{C}}(\ell)^{-1}$ on obtient $\rho(\ell) \leq \rho_{\mathbb{C}}(\ell)$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut utiliser une *complexification* de l'espace. Si E est un espace vectoriel réel, on pose $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ et on définit

$$(2.18) \quad \forall (x, y) \in E_{\mathbb{C}}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad (\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

On identifie E à un sous-espace de $E_{\mathbb{C}}$ en envoyant $x \in E$ sur $(x, 0) \in E \times \{0\}$. La formule (2.18) montre alors que $i(x, 0) = (0, x)$, de sorte qu'on a les identifications

$$E \times \{0\} \simeq E, \quad \{0\} \times E \simeq iE, \quad E_{\mathbb{C}} \simeq E \oplus iE, \quad (x, y) \simeq x + iy.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé réel, on pose

$$\forall x + iy \in E_{\mathbb{C}}, \quad \|x + iy\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \sqrt{\|\alpha x - \beta y\|^2 + \|\beta x + \alpha y\|^2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme complexe sur $E_{\mathbb{C}}$ induisant la norme $\|\cdot\|$ sur la partie réelle $E \subset E_{\mathbb{C}}$. Enfin, si $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est une application linéaire continue, on définit sa complexifiée $\ell_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}_c(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ par $\ell_{\mathbb{C}}(x + iy) = \ell(x) + i\ell(y)$ qui est bien une application \mathbb{C} -linéaire continue (exercice !). Si A est une algèbre de Banach réelle, la complexifiée $A_{\mathbb{C}}$ devient une algèbre de Banach complexe, lorsqu'on prend comme norme $\|z\|$ d'un élément $z = x + iy$ la norme d'opérateur $\|z\|_{\mathbb{C}}$ de l'application \mathbb{C} -linéaire $A_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$, $w \mapsto zw$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ complexifiée de la norme $\|\cdot\|$ sur A (toutes ces normes sont équivalentes, mais seule $\|z\|_{\mathbb{C}}$ vérifie clairement la propriété $\|z_1 z_2\|_{\mathbb{C}} \leq \|z_1\|_{\mathbb{C}} \|z_2\|_{\mathbb{C}}$, par composition des opérateurs). L'inclusion $A \subset A_{\mathbb{C}}$, $\ell \mapsto \ell_{\mathbb{C}} = \ell + i0$ permet d'identifier un élément $\ell \in A$ à son complexifié $\ell_{\mathbb{C}} \in A_{\mathbb{C}}$. Dans le cas particulier $A = \mathcal{L}_c(E, E)$ et $\ell, m \in A$, on peut poser ainsi

$$(\ell + im)(x + iy) = (\ell(x) - m(y)) + i(m(x) + \ell(y)),$$

ce qui amène bien à voir $\ell + i0$ comme étant égal au complexifié $\ell_{\mathbb{C}}$ sur $E_{\mathbb{C}}$, et on voit aisément que $\mathcal{L}_c(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) = A_{\mathbb{C}}$. Dans le cas où $\ell \in A = \mathcal{L}_{\mathbb{R},c}(E, E)$, le théorème 2.16 et les définitions des normes montrent que l'on a $\|\ell_{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|\ell\|$, donc

$$(2.19) \quad \rho(\ell) = \rho(\ell_{\mathbb{C}}) = \rho_{\mathbb{C}}(\ell_{\mathbb{C}}) \quad \forall \ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{R},c}(E, E).$$

Dans le cas où E est un espace de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $A = \mathcal{L}_c(E, E)$, cette formule équivaut à

$$(2.20) \quad \rho(\ell) = \max \{|\lambda_j|; \lambda_j \in \mathbb{C} \text{ valeur propre de } \ell\},$$

où le maximum est étendu à l'ensemble des valeurs propres complexes λ_j de la matrice de ℓ , ceci même lorsque le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; en effet si A est la matrice de ℓ dans une base (e_j) réelle de E , il est facile de voir que (e_j) est encore une base de $E_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et il est évident que la matrice de $\ell_{\mathbb{C}}$ dans cette base est encore A . En revanche, il n'est pas vrai en général que $\rho(\ell) = \rho_{\mathbb{R}}(\ell)$, par exemple en

dimension finie un endomorphisme réel peut très bien ne pas avoir de valeur propre réelle (considérer une rotation d'angle $\neq k\pi$ dans $\mathbb{R}^2 \dots$).

2.21. Remarque. Lorsque $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$, une démonstration alternative directe de (2.20), au moins pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, consiste à choisir une base (e_1, \dots, e_n) de E dans laquelle $A = \text{Mat}_{(e_j)}(\ell)$ devient triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad j \geq i, \quad a_{ii} = \lambda_i.$$

Si on remplace la base (e_1, \dots, e_m) par la base

$$(\tilde{e}_{j,\varepsilon}) = (e_1, \varepsilon e_2, \varepsilon^2 e_3, \dots, \varepsilon^{m-1} e_m)$$

avec $\varepsilon > 0$ petit, on voit que la matrice A est remplacée par une matrice A_ε dont les coefficients d'indices i, j sont $\varepsilon^{j-i} a_{ij}$. On a donc $A_\varepsilon = D + N_\varepsilon$ où D est la matrice diagonale de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et N_ε une matrice nilpotente strictement triangulaire supérieure dont les coefficients sont $O(\varepsilon)$. Si l'on choisit la norme hermitienne N_ε sur E pour laquelle $(\tilde{e}_{j,\varepsilon})$ est orthonormée et si $\|\cdot\|$ est la norme induite sur $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ induite par la norme hermitienne canonique de \mathbb{C}^n , on trouve

$$\|\ell\|_{N_\varepsilon} = \|A_\varepsilon\| \leq \|D\| + \|N_\varepsilon\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| + O(\varepsilon),$$

donc $\rho(\ell) \leq \inf_\varepsilon \|\ell\|_{N_\varepsilon} \leq \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$. L'inégalité inverse est évidente : si v_j est un vecteur propre de norme 1 pour λ_j , on a $\ell^p(v_j) = \lambda_j^p v_j$, donc $|\lambda_j| \leq \|\ell^p\|^{1/p}$ et à la limite $\max |\lambda_j| \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\ell^p\|^{1/p} = \rho(\ell)$. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il suffit de nouveau de raisonner sur le complexifié $\ell_{\mathbb{C}}$ et de trianguler la matrice sur \mathbb{C} . □

2.C. Points fixes attractifs dans les espaces de Banach

On se place ici dans un espace affine \mathcal{E} associé à un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$.

2.22. Théorème. Soit U un ouvert de \mathcal{E} , $\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}$ une application de classe C^1 et $a \in U$ un point fixe de φ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un voisinage fermé V de a tel que $\varphi(V) \subset V$ et une norme $N \sim \|\cdot\|$ sur E telle que $\varphi|_V$ soit contractante pour N .
- (ii) Le rayon spectral de $d\varphi(a)$ vérifie $\rho(d\varphi(a)) < 1$.

On dit alors que le point fixe a est attractif.

Démonstration. Si $\varphi|_V$ est contractante de rapport $\lambda < 1$ alors $\|d\varphi(a)\| \leq \lambda$ d'après la proposition I.4.8 (i) et on a par conséquent

$$\rho(d\varphi(a)) \leq \|d\varphi(a)\|_N \leq \lambda < 1.$$

Inversement, on a $\rho(d\varphi(a)) = \inf_{N \sim \|\cdot\|} \|d\varphi(a)\|_N$ d'après la Proposition 2.10. Si $\rho(d\varphi(a)) < 1$, il existe donc une norme $N \sim \|\cdot\|$ telle que $\|d\varphi(a)\|_N < 1$. Par continuité

de $d\varphi$, il existe une boule fermée $V = \overline{B}(a, r)$, $r > 0$, relativement à la norme N , telle que $\sup_{x \in V} \|d\varphi(x)\|_N = \lambda < 1$. Comme V est convexe, φ est alors contractante de rapport λ sur V d'après I.4.8 (ii) ; en particulier $\varphi(V) \subset \overline{B}(a, \lambda r) \subset V$. \square

2.23. Complément. Si φ est de classe C^2 et si $d\varphi(a) = 0$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée avec $h = x - a$ donne

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_0^1 (1-t) d^2\varphi(a + t(x-a))(x-a)^2 dt$$

au voisinage de a . Choisissons une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ sur laquelle

$$M = \sup_{x \in \overline{B}(a, r)} \|d^2\varphi(x)\| < +\infty.$$

La continuité de $d^2\varphi$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir $M = \|d^2\varphi(a)\| + \varepsilon$, si $r = r(\varepsilon)$ est assez petit. Comme $\int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$, il vient alors

$$\|\varphi(x) - a\| \leq \frac{1}{2} M \|x - a\|^2, \quad \forall x \in \overline{B}(a, r).$$

Le phénomène de convergence quadratique a donc encore lieu ici, et le point a est *super-attractif*.

3. Méthode de Newton

3.A. Cas des fonctions d'une variable

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On cherche à évaluer numériquement la racine a d'une équation $f(x) = 0$, en supposant qu'on dispose d'une valeur grossière x_0 de cette racine.

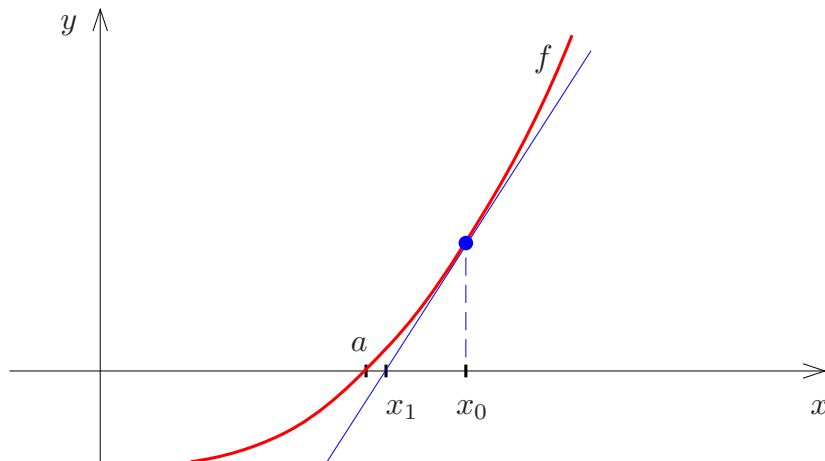


Fig. 3. Approximation de f par sa fonction affine tangente.

L'idée est de remplacer f par sa fonction affine tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe $y = 0$ est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} ;$$

x_1 est en général une meilleure approximation de a que x_0 . On est donc amené à itérer la fonction

$$(3.1) \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Supposons que f soit de classe C^2 et que $f'(a) \neq 0$. La fonction φ est alors de classe C^1 au voisinage de a et

$$(3.2) \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

ce qui donne $\varphi(a) = a$, $\varphi'(a) = 0$. La racine a de $f(x) = 0$ est donc un point fixe super-attractif de φ . Le résultat suivant donne une estimation de l'écart $|x_p - a|$.

3.3. Théorème. *On suppose que f est de classe C^2 sur l'intervalle $I = [a - r, a + r]$ et que $f' \neq 0$ sur I . Soit $M = \max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$ et $h = \min(r, \frac{1}{M})$. Alors pour tout $x \in [a - h, a + h]$ on a $|\varphi(x) - a| \leq M|x - a|^2$, et pour tout point initial $x_0 \in [a - h, a + h]$*

$$|x_p - a| \leq \frac{1}{M} (M|x_0 - a|)^{2^p}.$$

Démonstration. Introduisons la fonction $u(x) = f(x)/f'(x)$. La fonction f est monotone sur I , nulle en a , donc f a même signe que $f'(a)(x - a)$, ce qui entraîne que $u(x)$ a même signe que $x - a$. De plus

$$u'(x) = 1 - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)} u(x),$$

donc $|u'(x)| \leq 1 + M|u(x)|$ sur I . Cette inégalité permet d'obtenir le

3.4. Lemme. *On a $|u(x)| \leq \frac{1}{M} (e^{M|x-a|} - 1)$ sur I .*

Montrons-le par exemple pour $x \geq a$. Posons $v(x) = u(x)e^{-Mx}$. Il vient $u'(x) \leq 1 + Mu(x)$, d'où

$$v'(x) = (u'(x) - Mu(x))e^{-Mx} \leq e^{-Mx}.$$

Comme $v(a) = u(a) = 0$, on en déduit par intégration

$$v(x) \leq \frac{1}{M} (e^{-Ma} - e^{-Mx}),$$

soit encore $u(x) \leq \frac{1}{M} (e^{M(x-a)} - 1)$. Le lemme 3.4 est donc démontré. \square

3.5. Lemme. Pour $|t| \leq 1$, $e^{|t|} - 1 \leq 2|t|$.

En effet la fonction exponentielle est convexe, donc sur tout intervalle la courbe est située sous sa corde. Sur l'intervalle $[0, 1]$, ceci donne $e^t \leq 1 + (e - 1)t$, d'où le lemme 3.5 puisque $e - 1 < 2$. \square

On peut maintenant écrire $\varphi'(x) = u(x) \frac{f''(x)}{f'(x)}$, et le lemme 3.4 implique

$$|\varphi'(x)| \leq M|u(x)| \leq e^{M|x-a|} - 1.$$

Grâce au lemme 3.5, on obtient $|\varphi'(x)| \leq 2M|x-a|$ pour $|x-a| \leq \min(r, \frac{1}{M})$. Comme $\varphi(a) = a$, on voit par intégration que pour tout $x \in [a-h, a+h]$ on a

$$|\varphi(x) - a| \leq M|x-a|^2,$$

soit encore $M|\varphi(x) - a| \leq (M|x-a|)^2$. L'estimation $M|x_p - a| \leq (M|x_0 - a|)^{2^p}$ s'en déduit aussitôt par récurrence.

3.B. Méthode de Newton-Raphson

On cherche maintenant à résoudre une équation $f(x) = 0$ où $f : U \rightarrow \mathcal{E}$ est une application de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathcal{E}$ d'un espace affine \mathcal{E} associé à un espace de Banach E . On cherche à évaluer numériquement une solution a du système $f(x) = 0$, connaissant une valeur approchée grossière x_0 de a . Comme dans la méthode de Newton usuelle, l'idée est d'approximer f par sa partie linéaire au point x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

On résout alors l'équation $f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) = 0$. Si $df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, E)$ est inversible, on a une solution unique x_1 telle que $x_1 - x_0 = -(df(x_0))^{-1}(f(x_0))$, soit

$$x_1 = x_0 - (df(x_0))^{-1}(f(x_0)).$$

On va donc itérer ici l'application de classe C^1

$$(3.6) \quad \varphi(x) = x - (df(x))^{-1}(f(x))$$

qui est la généralisation ad hoc de (3.1) en dimension quelconque.

3.7. Théorème. On suppose que f est de classe C^2 , que $f(a) = 0$ et que l'application linéaire tangente $df(a) \in \mathcal{L}_c(E, E)$ est inversible. Alors a est un point fixe super-attractif de φ .

Démonstration (première méthode). Calculons la différentielle de φ . Soient $\Psi : \Omega \rightarrow \Omega$ l'application d'inversion $\ell \mapsto \ell^{-1}$ des applications linéaires définie sur l'ouvert Ω de

$\mathcal{L}_c(E, E)$ des éléments inversibles, et $\Phi : \mathcal{L}_c(E, E) \times E \rightarrow E$ l'application bilinéaire continue $(\ell, x) \mapsto \ell(x)$. On peut écrire ici $\varphi(x) = x - \Phi((\Psi \circ df)(x), f(x))$. Les formules de différentiation des applications bilinéaires et de l'inversion donnent

$$\begin{aligned} d\Phi(\ell, x)(s, h) &= \Phi(\ell, h) + \Phi(s, x) = \ell(h) + s(x), \\ d\Psi(\ell)(s) &= -\ell^{-1} \circ s \circ \ell^{-1}, \\ d(\Psi \circ g)(x)(h) &= -(g(x))^{-1} \circ (dg(x)(h)) \circ (g(x))^{-1}. \end{aligned}$$

On applique ici ces identités à $g = df : U \rightarrow \Omega \subset \mathcal{L}_c(E, E)$ pour trouver

$$\begin{aligned} d\varphi(x)(h) &= h - \left(\Phi(\Psi \circ df(x), df(x)(h)) + \Phi(d(\Psi \circ df)(x)(h), f(x)) \right) \\ &= h - \left((\Psi \circ df(x))(df(x)(h)) + (d(\Psi \circ df)(x))(h)(f(x)) \right) \\ &= h - \left((df(x))^{-1}(df(x)(h)) - (df(x))^{-1} \circ (d^2 f(x)(h)) \circ (df(x))^{-1}(f(x)) \right), \end{aligned}$$

et on obtient ainsi la généralisation de (3.2) en dimension quelconque

$$(3.8) \quad d\varphi(x)(h) = (df(x))^{-1} \circ (d^2 f(x)(h)) \circ (df(x))^{-1}(f(x)).$$

Comme $f(a) = 0$ ceci montre déjà que $d\varphi(a) = 0$, et on va voir que a est un point fixe super-attractif de φ en estimant plus précisément $\|\varphi(x) - a\|$ au voisinage de a . Fixons un rayon $r > 0$ assez petit et notons

$$\widetilde{M}_1 = \sup_{x \in \overline{B}(a, r)} \|(df(x))^{-1}\|, \quad M_2 = \sup_{x \in \overline{B}(a, r)} \|d^2 f(x)\|$$

(on peut prendre $\widetilde{M}_1 = \|(df(a))^{-1}\| + \varepsilon$ et $M_2 = \|d^2 f(a)\| + \varepsilon$ pour r assez petit, du fait de la continuité de df et $d^2 f$). La formule de Taylor avec reste intégral appliquée au point x avec $h = a - x$ entraîne

$$0 = f(a) = f(x) + df(x)(a - x) + \int_0^1 (1 - t) d^2 f(x + t(a - x))(a - x)^2 dt,$$

d'où

$$(df(x))^{-1}(f(x)) = x - a - \int_0^1 (1 - t) (df(x))^{-1}(d^2 f(x + t(a - x))(a - x)^2) dt,$$

et par conséquent

$$\|(df(x))^{-1}(f(x))\| \leq \|x - a\| + \frac{1}{2} \widetilde{M}_1 M_2 \|x - a\|^2, \quad \forall x \in \overline{B}(a, r).$$

En combinant ceci avec (3.8) il vient

$$\|d\varphi(x)\| \leq \widetilde{M}_1 M_2 \left(\|x - a\| + \frac{1}{2} \widetilde{M}_1 M_2 \|x - a\|^2 \right).$$

La formule $\varphi(x) - a = \int_0^1 d\varphi(a + t(x - a))(x - a)dt$ fournit après intégration

$$\|\varphi(x) - a\| \leq \frac{1}{2} \widetilde{M}_1 M_2 \|x - a\|^2 + \frac{1}{6} (\widetilde{M}_1 M_2)^2 \|x - a\|^3,$$

d'où $\|\varphi(x) - a\| \leq \frac{1}{2} (\widetilde{M}_1 M_2 + \varepsilon) \|x - a\|^2$ pour $x \in \overline{B}(a, r)$ avec $r > 0$ assez petit.

Démonstration (deuxième méthode). Calculons un développement limité à l'ordre 2 de $\varphi(a + h)$ quand h tend vers 0. Comme $f(a) = 0$ et $(1 + \ell)^{-1} = 1 - \ell + o(\|\ell\|)$, on trouve

$$\begin{aligned} f(a + h) &= df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h)^2 + o(\|h\|^2) \\ &= df(a) \left[h + \frac{1}{2} df(a)^{-1} (d^2 f(a)(h)^2) + o(\|h\|^2) \right], \\ df(a + h) &= df(a) + d^2 f(a)(h) + o(\|h\|) \\ &= df(a) \circ \left[\text{Id} + df(a)^{-1} \circ (d^2 f(a)(h)) + o(\|h\|) \right], \\ df(a + h)^{-1} &= [\dots]^{-1} \circ df(a)^{-1} \\ &= \left[\text{Id} - df(a)^{-1} \circ (d^2 f(a)(h)) + o(\|h\|) \right] \circ df(a)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df(a + h)^{-1}(f(a + h)) &= \left(\text{Id} - df(a)^{-1} \circ (d^2 f(a)(h)) + o(\|h\|) \right) \left(h + \frac{1}{2} df(a)^{-1} (d^2 f(a)(h)^2) + o(\|h\|) \right) \\ &= h - \frac{1}{2} df(a)^{-1} (d^2 f(a)(h)^2) + o(\|h\|)^2, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} \varphi(a + h) &= a + h - df(a + h)^{-1}(f(a + h)) \\ &= a + \frac{1}{2} df(a)^{-1} (d^2 f(a)(h)^2) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

On en déduit $d\varphi(a) = 0$ et $d^2\varphi(a) = df(a)^{-1} \circ d^2 f(a)$ (il n'est pas évident a priori que φ soit deux fois différentiable au point a si f est seulement de classe C^2 , mais ceci peut se démontrer sans trop de peine en utilisant la formule (3.8) – exercice pour le lecteur !). En particulier

$$\|\varphi(a + h) - a\| \leq \frac{1}{2} (M + \varepsilon(h)) \|h\|^2$$

avec $M = \|d^2\varphi(a)\| = \|df(a)^{-1} \circ d^2 f(a)\|$. Le théorème est démontré. \square

3.9. Exemple. Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4 \\ xe^x + ye^y = 0. \end{cases}$$

On commence par tracer les courbes $C_1 : x^2 + xy - 2y^2 = 4$ et $C_2 : xe^x + ye^y = 0$ de manière à obtenir graphiquement une approximation grossière des solutions.

C_1 est une hyperbole d'asymptotes $x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y) = 0$; cette hyperbole passe par les points $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La courbe C_2 est symétrique par rapport à la droite $y = x$; de plus x, y sont nécessairement de signe opposés. Supposons par exemple $x \leq 0, y \geq 0$. Comme la fonction $y \mapsto ye^y$ est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, à chaque point $x \leq 0$ correspond un unique point $y \geq 0$. Ce point y est la solution de $xe^x + ye^y = 0$, et peut par exemple s'obtenir par itération de la fonction

$$\varphi(x) = y - \frac{xe^x + ye^y}{(1 + y)e^y} = \frac{y^2 - xe^{x-y}}{1 + y},$$

fournie par la méthode de Newton appliquée à la variable y . Pour $x = 0$, on a $y = 0$; en décrémentant x par pas de $0,1$ avec comme valeur initiale de y_0 la valeur de la solution y trouvée pour la valeur x précédente, on obtient la courbe C_2 .

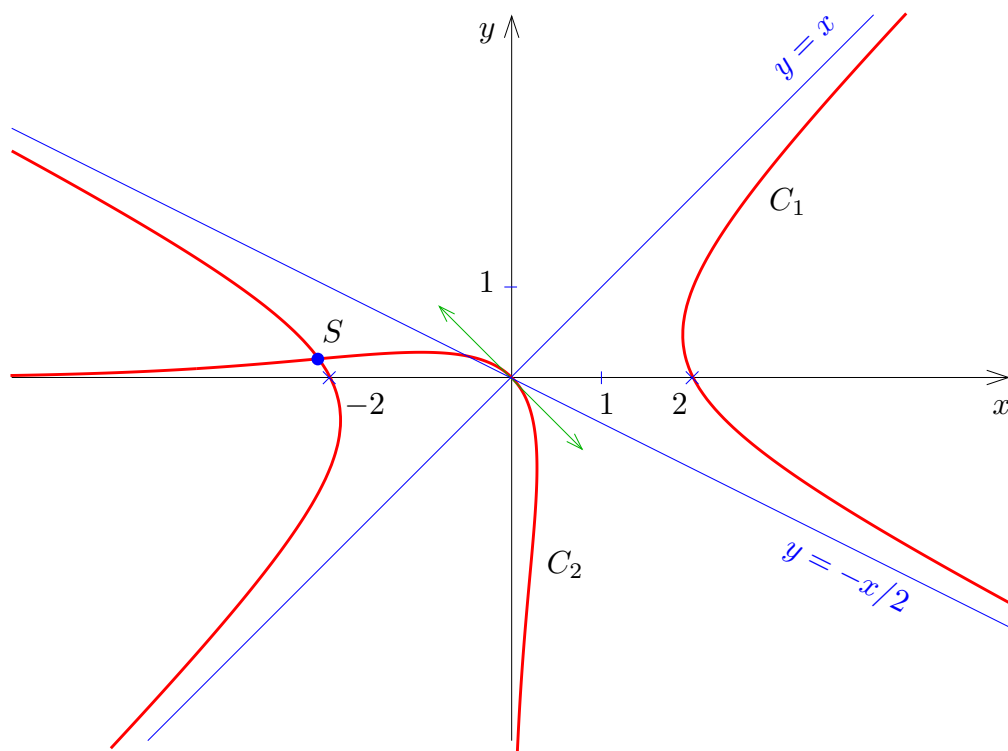


Fig. 4. Approximation grossière des solutions via une représentation graphique.

On voit que le système précédent admet une solution $S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ unique, avec $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ très grossièrement. Pour obtenir une valeur approchée plus précise, on

cherche à résoudre l'équation $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy - 2y^2 - 4 \\ xe^x + ye^y \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire tangente à f est donnée par

$$f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - 4y \\ (x + 1)e^x & (y + 1)e^y \end{pmatrix}$$

La condition $f'(S)$ inversible signifie que les tangentes

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(S)(x - a) + \frac{\partial f_i}{\partial y}(S)(y - b) = 0, \quad i = 1, 2,$$

aux courbes C_1, C_2 au point S sont distinctes. C'est bien le cas ici. On obtient

$$\left[f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{\Delta(x, y)} \begin{pmatrix} (x + 1)e^y & -x + 4y \\ -(x + 1)e^x & 2x + y \end{pmatrix}$$

avec $\Delta(x, y) = (2x + y)(y + 1)e^y - (x - 4y)(x + 1)e^x$. On est alors amené à calculer les itérés $\begin{pmatrix} x_{p+1} \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ avec

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta(x, y)} \begin{pmatrix} (y + 1)e^y & -x + 4y \\ -(x + 1)e^x & 2x + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + xy - 2y^2 - 4 \\ xe^x + ye^y \end{pmatrix}$$

Partant du point initial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0, 2 \end{pmatrix}$, on trouve

p	x_p	y_p
0	-2	0, 2
1	-2, 130690999	0, 205937784
2	-2, 126935837	0, 206277868
3	-2, 126932304	0, 206278156
4	-2, 126932304	0, 206278156

d'où $S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2, 126932304 \\ 0, 206278156 \end{pmatrix}$.

4. Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

Nous allons ici exploiter le théorème du point fixe pour démontrer quelques résultats fondamentaux du calcul différentiel. Notre objectif est aussi d'obtenir des estimations quantitatives pour ces théorèmes, parce que ces estimations sont souvent nécessaires pour majorer les erreurs commises dans les calculs numériques.

4.A. Un lemme de perturbation

Nous commençons par un lemme de perturbation, qui s'applique dans un espace de Banach quelconque $(E, \|\cdot\|)$. Rappelons qu'on appelle homéomorphisme entre espaces métriques ou topologiques une application *bijjective continue d'application réciproque continue*.

4.1. Lemme de perturbation. Soit $f : B(x_0, r) \rightarrow E$ une application définie sur une boule de rayon r dans E , telle que

$$f(x) = x + u(x)$$

où u est une application contractante de rapport $\lambda < 1$ (« petite perturbation de l'identité »). Alors

- (i) f est un homéomorphisme de $B(x_0, r)$ sur un ouvert $V = f(B(x_0, r))$ de E ;
- (ii) f est $(1 + \lambda)$ -lipschitzienne et son application réciproque $f^{-1} : V \rightarrow B(x_0, r)$ est $(1 - \lambda)^{-1}$ lipschitzienne ;
- (iii) l'image $V = f(B(x_0, r))$ satisfait l'encadrement

$$B(f(x_0), (1 - \lambda)r) \subset V \subset B(f(x_0), (1 + \lambda)r).$$

Si $\lambda = 0$, $u(x) = u(x_0)$ est une constante et f est une translation. Le résultat est alors trivial. En général, l'allure graphique de f et de son image $V = f(B(x_0, r))$ est la suivante.

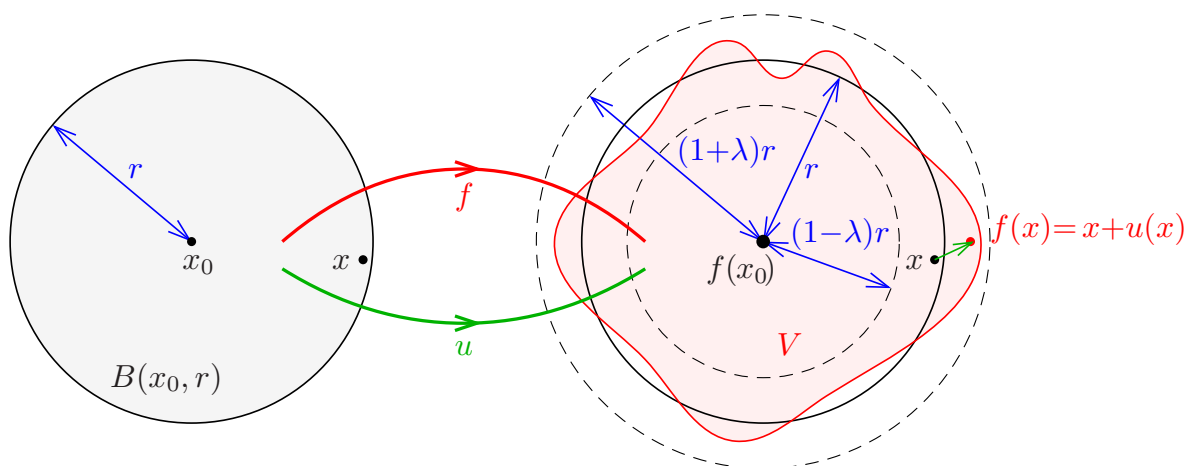


Fig. 5. Perturbation de l'identité par une application contractante, avec sur ce schéma $u(x_0) = 0$, $\|u(x) - u(x_0)\| \leq \lambda \|x - x_0\| \leq \lambda r$.

Démonstration. On a de façon évidente

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| - \|u(x_2) - u(x_1)\| &\leq \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|u(x_2) - u(x_1)\| \\ \implies (1 - \lambda)\|x_2 - x_1\| &\leq \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq (1 + \lambda)\|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

En particulier $f(x_1) = f(x_2)$ implique $\|x_2 - x_1\| = 0$, donc $x_1 = x_2$. Il en résulte que f est injective et $(1 + \lambda)$ -lipschitzienne, et que $\|f(x) - f(x_0)\| \leq (1 + \lambda)\|x - x_0\|$. Par suite f est une bijection de $B(x_0, r)$ sur son image V , et

$$V = f(B(x_0, r)) \subset B(f(x_0), (1 + \lambda)r).$$

Pour $y \in E$ donné, l'équation $y = f(x)$ se réécrit $y = x + u(x)$, soit encore $x = y - u(x)$. Ceci nous amène à considérer les points fixes de l'application

$$\varphi(x) = y - u(x).$$

De même que u , c'est une application λ -lipschitzienne sur la boule $B(x_0, r)$, et comme $\varphi(x) - x_0 = (y - f(x_0)) - (u(x) - u(x_0))$, on a

$$\|\varphi(x) - x_0\| \leq \|y - f(x_0)\| + \lambda\|x - x_0\|.$$

On voit ainsi que φ envoie toute boule fermée $\overline{B}(x_0, r') \subset B(x_0, r)$ dans $\overline{B}(x_0, r')$ dès lors que $\|y - f(x_0)\| \leq (1 - \lambda)r'$, et ceci quel que soit $r' < r$. Le théorème du point fixe appliqué à l'espace complet $E = \overline{B}(x_0, r')$ implique que φ possède un point fixe $\varphi(x) = x$ unique, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ détermine un unique antécédent $x \in \overline{B}(x_0, r')$. On en déduit que $f(\overline{B}(x_0, r')) \supset \overline{B}(x_0, (1 - \lambda)r')$. Comme $r' < r$ peut être pris arbitrairement proche de r , on a bien

$$V = f(B(x_0, r)) \supset B(x_0, (1 - \lambda)r).$$

Ceci démontre déjà (iii). En se plaçant en un point $x_1 \in B(x_0, r)$ quelconque et en remplaçant (x_0, r) par (x_1, ε) avec $\varepsilon > 0$ petit, on voit que l'image $f(B(x_1, \varepsilon))$ contient un voisinage $B(f(x_1), (1 - \lambda)\varepsilon)$ de $f(x_1)$, par suite $V = f(B(x_0, r))$ est un voisinage de tout point $y_1 = f(x_1) \in V$. Ceci montre bien que V est un ouvert. Enfin, en prenant $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ dans l'inégalité de gauche de l'encadrement de Lipschitz de f , on obtient

$$(1 - \lambda)\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq \|y_2 - y_1\|$$

pour tous $y_1, y_2 \in V$, ce qui entraîne que f^{-1} est continue $(1 - \lambda)^{-1}$ -lipschitzienne, et donc que f est un homéomorphisme de $B(x_0, r)$ sur V . Le lemme est démontré. \square

4.B. Le théorème d'inversion locale

On considère ici des espaces affines \mathcal{E}, \mathcal{F} associés à des espaces de Banach E, F .

4.2. Définition. Soit U un ouvert de \mathcal{E} et V un ouvert de \mathcal{F} . Un C^k -difféomorphisme $f : U \rightarrow V$ est une application bijective de classe C^k telle que $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ soit également de classe C^k . Lorsque $k = 0$, il s'agit donc d'un homéomorphisme.

Remarquons que si $f : U \rightarrow V$ est un C^k -difféomorphisme ($k \geq 1$) et $g = f^{-1}$, alors la formule de composition des différentielles et les égalités $g \circ f = \text{Id}_U$ et $f \circ g = \text{Id}_V$ fournissent pour tous points $x \in U$ et $y = f(x) \in V$

$$(4.3) \quad df(x) \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad dg(y) \in \mathcal{L}_c(F, E), \quad dg(y) \circ df(x) = \text{Id}_E, \quad df(x) \circ dg(y) = \text{Id}_F,$$

de sorte que $df(x)$ et $dg(y) = (df(x))^{-1}$ sont des isomorphismes d'espaces de Banach. Pour que cette situation soit possible il est donc nécessaire de supposer que E et F soient (linéairement et topologiquement) *isomorphes*, donc en particulier de même dimension, si celle-ci est finie. On notera qu'en vertu du théorème des isomorphismes de Banach, toute application linéaire continue bijective entre espaces de Banach est automatiquement un isomorphisme. Nous aurons besoin de l'exemple important suivant.

4.4. Exemple. Soient E, F des espaces de Banach isomorphes et soit $U_{E,F} \subset \mathcal{L}_c(E, F)$, resp. $U_{F,E} \subset \mathcal{L}_c(F, E)$, l'ensemble des applications linéaires continues qui sont des isomorphismes d'espaces de Banach. Ce sont des parties ouvertes : en effet, si $\sigma : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, $\ell \mapsto \sigma \circ \ell$ définit un isomorphisme de $\mathcal{L}_c(E, E)$ sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui envoie $U_{E,E}$ sur $U_{E,F}$, et on sait déjà (Corollaire I.3.3) que $U_{E,E}$ est un ouvert. Nous affirmons que l'application

$$\Psi : U_{E,F} \rightarrow U_{F,E}, \quad \ell \mapsto \Psi(\ell) = \ell^{-1}$$

est un C^∞ -difféomorphisme, et que sa différentielle est donnée par

$$(4.5) \quad d\Psi(\ell)(h) = -\ell^{-1} \circ h \circ \ell^{-1}, \quad \forall \ell \in U_{E,F}, \quad \forall h \in \mathcal{L}_c(E, F).$$

La formule (4.5) est en fait connue pour $F = E$, et le cas général $F \simeq E$ s'ensuit. Maintenant, considérons l'application bilinéaire « évidente »

$$\Phi : \mathcal{L}_c(F, E) \times \mathcal{L}_c(F, E) \longrightarrow \mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c(E, F), \mathcal{L}_c(F, E)), \quad (u, v) \mapsto (h \mapsto u \circ h \circ v).$$

Elle est trivialement continue de norme $\|\Phi\| \leq 1$ (exercice !), donc Φ est une application C^∞ d'après le lemme I.6.16. Avec ces notations, la formule (4.5) se réécrit $d\Psi(\ell) = -\Phi(\ell^{-1}, \ell^{-1}) = -\Phi(\Psi(\ell), \Psi(\ell))$, soit $d\Psi = -\Phi \circ (\Psi, \Psi)$. On voit que si Ψ est k -fois différentiable, alors $d\Psi$ l'est aussi, et donc Ψ est $(k + 1)$ -fois différentiable. Par récurrence sur k , Ψ est donc de classe C^∞ . De plus Ψ est bijective de manière évidente et sa réciproque $\Psi^{-1} : U_{F,E} \rightarrow U_{E,F}$ n'est autre que l'application $\ell \mapsto \ell^{-1}$ obtenue en échangeant les rôles de E et F . Par conséquent Ψ^{-1} est elle aussi de classe C^∞ . \square

4.6. Théorème d'inversion locale. Soit U un ouvert de \mathcal{E} et $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une application de classe C^k avec $k \geq 1$. On se donne un point $x_0 \in U$ et on suppose que l'application linéaire tangente $\ell = df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est un isomorphisme. Alors

- (i) Il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que f soit un C^k -difféomorphisme de classe C^k de V sur un voisinage ouvert W de $y_0 = f(x_0)$ dans \mathcal{F} .
- (ii) Pour tout $y = f(x)$, $x \in U$, la différentielle de $g = f^{-1}$ est donnée par $dg(y) = (df(x))^{-1}$, soit $dg(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$ ou encore

$$d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1} \in \mathcal{L}_c(F, E).$$

(iii) (*Estimation effective pour les rayons*) On suppose ici $k \geq 2$. Si $B(x_0, r_0) \subset U$ est une boule sur laquelle on a un majorant $\sup_{B(x_0, r_0)} \|d^2 f\| \leq M$, on peut choisir $V = B(x_0, r)$ avec un rayon $r > 0$ quelconque tel que

$$r \leq R_0 := \min(r_0, \lambda M^{-1} \|\ell^{-1}\|^{-1}), \quad \lambda < 1, \quad \ell = df(x_0).$$

Dans ce cas

$$W' = B(f(x_0), (1 - \lambda) \|\ell^{-1}\|^{-1} r) \subset W \subset B(f(x_0), (1 + \lambda) \|\ell\| r).$$

En restreignant encore les voisinages, on obtient aussi un C^k -difféomorphisme $f : V' \rightarrow W'$ où W' est la boule ci-dessus et $V' = V \cap f^{-1}(W')$ vérifie

$$B(x_0, (1 - \lambda)(1 + \lambda)^{-1} \|\ell\|^{-1} \|\ell^{-1}\|^{-1} r) \subset V' \subset B(x_0, r)$$

(mais dans ce cas on ne peut pas imposer simultanément que V' soit une boule).

4.7. Remarque. Lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^k , $k \geq 1$, satisfaisant $f'(x_0) \neq 0$ en un point $x_0 \in U$, la dérivée f' est par continuité de signe constant sur un intervalle ouvert I de centre x_0 . On en conclut que f est une bijection strictement monotone de I sur un intervalle ouvert $J = f(I)$. Son application réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est également monotone, et la formule de différentiation 4.6 (ii) se réduit à l'expression bien connue

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration du théorème d'inversion locale. Quitte à choisir des origines dans \mathcal{E} et \mathcal{F} , on peut supposer $\mathcal{E} = E$ et $\mathcal{F} = F$.

(i) (Propriété d'homéomorphie). L'application $u(x) = \ell^{-1}(f(x)) - x$ est de classe C^1 et on a

$$du(x_0) = \ell^{-1} \circ df(x_0) - \text{Id}_E = 0 \quad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, E).$$

Par continuité de du , il existe une boule $B(x_0, r)$ sur laquelle $\|du(x)\| \leq \lambda < 1$, ce qui entraîne que u est contractante de rapport λ . Le lemme de perturbation montre alors que $\tilde{f}(x) = \ell^{-1} \circ f(x) = x + u(x)$ définit un homéomorphisme lipschitzien de $V = B(x_0, r) \subset E$ sur un ouvert $\tilde{W} = \tilde{f}(V) \subset E$, donc $f = \ell \circ \tilde{f}$ est un homéomorphisme lipschitzien de V sur $W = \ell(\tilde{W}) \subset F$. De plus, la constante de Lipschitz de f est majorée par $\Lambda = (1 + \lambda) \|\ell\|$ et celle de $g = f^{-1} = \tilde{f}^{-1} \circ \ell^{-1}$ par $\Lambda' = (1 - \lambda)^{-1} \|\ell^{-1}\|$.

(ii) Pour tous $y, \eta \in W$ et $x = g(y)$, $\xi = g(\eta) \in V = B(x_0, r)$, l'hypothèse de différentiabilité de f au point x s'exprime sous la forme

$$\eta - y = f(\xi) - f(x) = df(x)(\xi - x) + \|\xi - x\| \varepsilon(\xi - x)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Comme $\ell^{-1} \circ df(x) = \text{Id}_E + du(x)$ où $\|du(x)\| \leq \lambda < 1$ sur $B(x_0, r)$, l'application linéaire $\ell^{-1} \circ df(x)$ est bien inversible. Par conséquent $df(x)$ l'est aussi, et nous pouvons écrire

$$\xi - x = df(x)^{-1}(\eta - y - \|\xi - x\| \varepsilon(\xi - x)),$$

soit, en posant $\eta = y + h$ avec h petit et $\xi = g(\eta) = g(y + h)$:

$$g(y + h) - g(y) = df(x)^{-1}(h) - \|g(y + h) - g(y)\| df(x)^{-1}(\varepsilon(g(y + h) - g(y)))$$

avec $\|g(y + h) - g(y)\| \leq \Lambda' \|h\|$ et $\tilde{\varepsilon}(h) := df(x)^{-1}(\varepsilon(g(y + h) - g(y)))$ qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ par continuité de g et de $df(x)^{-1}$. On voit ainsi que $g = f^{-1}$ est bien différentiable au point y et que $dg(y) = df(x)^{-1} = df(g(y))^{-1}$, ce qui démontre la formule annoncée pour la différentielle de $g = f^{-1}$.

(i) (Preuve du fait que g est de classe C^k , et donc que $f : V \rightarrow W$ est un C^k difféomorphisme). En notant $\Psi : U_{E,F} \rightarrow U_{F,E}$, $\ell \mapsto \ell^{-1}$, la formule de différentiation de $g = f^{-1}$ s'écrit encore

$$(*) \quad dg = \Psi \circ df \circ g.$$

Or on sait que Ψ est de classe C^∞ (exemple 4.4) et que g est continue. Ceci implique que dg est continue, donc g est de classe C^1 . Supposons la propriété déjà démontrée pour $k - 1$, avec $k \geq 2$. Alors g est au moins de classe C^{k-1} , de même que df . Par composition des applications différentiables, (*) implique que dg est de classe C^{k-1} , donc g est bien de classe C^k .

(iii) Nous avons $d^2u = \ell^{-1} \circ d^2f$. Si f est de classe C^2 et $\|d^2f\| \leq M$ sur la boule $B(x_0, r_0) \subset \Omega$, alors $\|d^2u\| \leq M \|\ell^{-1}\|$ et le théorème des accroissements finis donne $\|du(x)\| \leq M \|\ell^{-1}\| \|x - x_0\|$ sur $B(x_0, r_0)$. Pour $r \leq R_0 = \min(r_0, \lambda M^{-1} \|\ell^{-1}\|^{-1})$, on voit que $\|du\| \leq \lambda < 1$ sur $B(x_0, r)$ et on peut appliquer le lemme de perturbation pour conclure que le choix $V = B(x_0, r)$ convient. Si $r \leq R_0$, on obtient également

$$B(\tilde{f}(x_0), (1 - \lambda)r) \subset \tilde{f}(B(x_0, r)) \subset B(\tilde{f}(x_0), (1 + \lambda)r).$$

Les isomorphismes ℓ et ℓ^{-1} fournissent quant à eux des inclusions

$$\begin{aligned} \ell(B(0, \rho)) \subset B(0, \|\ell\| \rho) &\implies B(0, \rho) \subset \ell^{-1}(B(0, \|\ell\| \rho)), \\ \ell^{-1}(B(0, \rho)) \subset B(0, \|\ell^{-1}\| \rho) &\implies B(0, \rho) \subset \ell(B(0, \|\ell^{-1}\| \rho)) \end{aligned}$$

pour tout $\rho > 0$, et comme $f = \ell \circ \tilde{f}$ on obtient

$$\begin{aligned} W' = B(f(x_0), (1 - \lambda) \|\ell^{-1}\|^{-1} r) &\subset \ell(B(\tilde{f}(x_0), (1 - \lambda)r)) \subset W = f(V) = f(B(x_0, r)) \\ &\subset \ell(B(\tilde{f}(x_0), (1 + \lambda)r)) \subset B(f(x_0), (1 + \lambda) \|\ell\| r). \end{aligned}$$

L'inclusion $V' = V \cap f^{-1}(W') \supset B(x_0, (1 - \lambda)(1 + \lambda)^{-1} \|\ell\|^{-1} \|\ell^{-1}\|^{-1} r)$ résulte du fait que f est lipschitzienne de rapport $\Lambda \leq (1 + \lambda) \|\ell\|$. Le théorème est démontré. \square

4.8. Remarque. Si on regarde la preuve de plus près, on constate que la résolution de l'équation $f(x) = y$ est ramenée à $\ell^{-1}(f(x)) = \ell^{-1}(y)$, soit $x = x - \ell^{-1}(f(x) - y)$, (qui n'est autre que $\ell^{-1}(y) - u(x)$ avec les notations de la démonstration). La méthode du point fixe conduit à itérer la fonction

$$\psi(x) = x - \ell^{-1}(f(x) - y) = x - df(x_0)^{-1}(f(x) - y)$$

en partant d'un point initial de la boule $\overline{B}(x_0, r)$, par exemple $x = x_0$. D'un point de vue numérique, si le calcul de $df(x)^{-1}$ n'est pas trop coûteux en temps, il est plus efficace d'utiliser la méthode de Newton appliquée à la fonction $F(x) = \ell^{-1}(f(x) - y)$, qui donne $dF(x) = \ell^{-1} \circ df(x)$, $dF(x)^{-1} = df(x)^{-1} \circ \ell$, et conduit à itérer la fonction

$$\varphi(x) = x - df(x)^{-1}(f(x) - y). \quad \square$$

On peut également formuler une version plus globale du théorème d'inversion, qui est une conséquence immédiate de la version locale.

4.9. Théorème d'inversion globale. Soient \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines associés à des espaces de Banach E, F, U un ouvert de \mathcal{E} et $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une application de classe $C^k, k \geq 1$. On suppose que f est injective et que pour tout $x \in U$ l'application $df(x) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est un isomorphisme. Alors $f(U)$ est un ouvert de \mathcal{F} et $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^k difféomorphisme de U sur $f(U)$. On a de plus

$$df^{-1}(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1} \quad \text{pour tout } y \in f(U).$$

4.10. Remarque. Lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{R}$ et que U est un intervalle, la condition $f'(x) \neq 0$ entraîne que f' est de signe constant, et l'injectivité de f sur U résulte alors de la monotonie – il faut néanmoins que U soit connexe pour que ceci soit vrai. En dimension $n \geq 2$ ceci n'est plus vrai. Par exemple $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^z$ est bien telle que $df(z)(h) = e^z h$ soit inversible en tout point $z \in \mathbb{C}$, mais f n'est pas injective.

4.C. Le théorème des fonctions implicites

Le théorème d'inversion locale admet de nombreuses conséquences, dont beaucoup ont une signification géométrique profonde. La conséquence la plus importante est le théorème des fonctions implicites. Quitte à fixer si nécessaire des origines, on peut toujours se ramener à travailler dans des espaces de Banach. On aura besoin par la suite de l'observation suivante.

4.11. Proposition. Soit E un espace de Banach admettant une décomposition $E = E' \oplus E''$ comme somme directe de deux sous-espaces fermés $E' \subset E, E'' \subset E$. Alors l'application linéaire évidente

$$u : E' \times E'' \rightarrow E, \quad (x', x'') \mapsto x = x' + x''$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach, ce qui équivaut à dire que u^{-1} est continue, ou encore que l'on a des projections continues

$$p' : E \rightarrow E', \quad x \mapsto x', \quad p'' : E \rightarrow E'', \quad x \mapsto x''.$$

Démonstration. L'application linéaire u est clairement bijective et continue de norme 1, puisque $\|x' + x''\| \leq \|x'\| + \|x''\|$. D'après le théorème des isomorphismes de Banach $u^{-1} = (p', p'') : E \rightarrow E' \times E''$ est continue, donc les composantes p', p'' sont continues. \square

4.12. Théorème des fonctions implicites. Soit E, F des espaces de Banach, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^k , $k \geq 1$, α un point de U et $\beta = f(\alpha) \in F$. On suppose qu'on a une décomposition $E = E' \oplus E''$ en somme directe de sous-espaces fermés pour laquelle la restriction $df(\alpha)|_{E''} \in \mathcal{L}_c(E'', F)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach. On identifie E à $E' \times E''$ par l'isomorphisme 4.11.

Alors :

- (i) Il existe un voisinage ouvert $V = V' \times V''$ de $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ sur lequel la restriction $df(x)|_{E''} \in \mathcal{L}_c(E'', F)$ est inversible, une application $g : V' \rightarrow V''$ de classe C^k telle que pour tout $(x', x'') \in E = E' \times E''$ on ait

$$(x', x'') \in V' \times V'' \text{ et } f(x', x'') = \beta \iff x' \in V' \text{ et } x'' = g(x').$$

- (ii) On a $g(\alpha') = \alpha''$ et, quitte à rétrécir V' pour que $f(x', g(x'))|_{E''}$ soit inversible lorsque $x' \in V'$, on a la formule

$$dg(x') = -(df(x', g(x'))|_{E''})^{-1} \circ df(x', g(x'))|_{E'}, \quad \forall x' \in V'.$$

Avant de démontrer le théorème, nous allons faire quelques commentaires et étudier un certain nombre de cas particuliers. Le théorème des fonctions implicites dit que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x', x'') = \beta$ au voisinage d'un point $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ peut être « explicité » comme le graphe $x'' = g(x')$ d'une fonction $g : V' \rightarrow V''$ de classe C^k sur $V = V' \times V'' \ni \alpha$, à condition que $df(\alpha)|_{E''}$ soit bijective, pour une décomposition en somme directe $E = E' \oplus E''$ bien choisie (ce qui impose au minimum que $df(\alpha)$ soit surjective). Si $h = h' + h'' \in E$, la différentielle $df(\alpha)$ s'écrit

$$h = h' + h'' \simeq (h', h'') \mapsto df(\alpha)(h) = df(\alpha', \alpha'')|_{E'}(h') + df(\alpha', \alpha'')|_{E''}(h''),$$

la partie qui doit être un isomorphisme est la différentielle partielle de $x'' \mapsto f(\alpha', x'')$ au point $x'' = \alpha''$.

- En dimension finie, le cas particulier intéressant le plus simple est celui où $U \subset E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, ce qui conduit à résoudre une équation réelle à deux variables

$$f(x_1, x_2) = \beta$$

au voisinage d'une solution connue (α_1, α_2) . Si on prend $x' = x_1$, $x'' = x_2$ et si on fait l'hypothèse $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, le théorème dit alors que l'on a une solution $x_2 = g(x_1)$ de classe C^k au voisinage de α_1 , telle que $g(\alpha_1) = \alpha_2$. En dérivant l'identité $f(x_1, g(x_1)) = \beta$ il vient $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, g(x_1)) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, g(x_1))g'(x_1) = 0$, ce qui donne le cas particulier suivant de 4.12 (ii) :

$$(4.13) \quad g'(x_1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, g(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, g(x_1))},$$

sur un voisinage V' de α_1 assez petit pour que le dénominateur ne s'annule pas.

- Plus généralement, lorsque $U \subset E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, on cherche à résoudre une équation réelle de classe C^k en n variables

$$f(x_1, \dots, x_n) = \beta$$

au voisinage d'un point $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $f(\alpha) = \beta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on fait l'hypothèse qu'une au moins des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, est non nulle. on prend $E'' = \mathbb{R}e_j$ et $E' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n)$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . La conclusion est qu'on peut alors résoudre cette équation sous la forme d'une "explicitation" de la variable x_j en fonction des autres variables $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ au voisinage de α' :

$$x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad \text{avec } g \text{ de classe } C^k, \quad g(\alpha') = \alpha_j.$$

En dérivant l'identité $f(x_1, \dots, x_{j-1}, g(x'), x_{j+1}, \dots, x_n) = \beta$ par rapport à x_s , $s \neq j$, on obtient ici la formule

$$(4.14) \quad \frac{\partial g}{\partial x_s}(x') = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_s}(x_1, \dots, x_{j-1}, g(x'), x_{j+1}, \dots, x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, g(x'), x_{j+1}, \dots, x_n)}, \quad x' \in V'.$$

- De manière encore plus générale, pour $U \subset E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

faisons l'hypothèse que la matrice jacobienne en un point $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in U$

$$\text{Mat}(df(\alpha)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\alpha) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\alpha) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\alpha) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\alpha) \end{pmatrix}$$

soit de rang $p = \dim F$ (ceci équivaut à dire que $df(\alpha)$ est surjective). Alors il existe un déterminant mineur $p \times p$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}}(\alpha) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_p}}(\alpha) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{j_1}}(\alpha) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{j_p}}(\alpha) \end{vmatrix} \neq 0$$

pour un certain choix de colonnes $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$. Soient $1 \leq k_1 < \dots < k_{n-p} \leq n$ les autres colonnes. Si (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . On peut alors utiliser la décomposition en somme directe $E = \mathbb{R}^n = E' \oplus E''$ avec $E' = \text{Vect}(e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-p}})$ et $E'' = \text{Vect}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$. On a dans ce cas un isomorphisme

$$x = (x_1, \dots, x_n) \simeq (x', x'')_\sigma \quad \text{avec } x' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_p}), \quad x'' = (x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-p}})$$

où l'indice σ indique que l'on effectue une permutation σ ad hoc des coordonnées pour remettre les indices dans l'ordre. Dans cette circonstance, si $\beta = f(\alpha) \in \mathbb{R}^p$, le théorème des fonctions implicites dit que le système d'équation

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq p$$

se résout dans un voisinage V de α en prenant $x' = (x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-p}}) \in V'$ quelconque, et $x'' = g(x') \in V''$ avec $V \simeq V' \times V''$, soit

$$x_{j_s} = g_s(x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-p}}), \quad 1 \leq s \leq p,$$

pour un système de fonctions $(g_1, \dots, g_p) : V' \rightarrow V''$ de classe C^k convenable. On a d'autre part l'égalité matricielle

$$\left(\frac{\partial g_s}{\partial x_{k_t}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-p}}) \right)_{\substack{1 \leq s \leq p \\ 1 \leq t \leq n-p}} = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_s}}(x', g(x'))_{\sigma} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq s \leq p}}^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k_t}}(x', g(x'))_{\sigma} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq t \leq n-p}}.$$

On remarquera que la possibilité de résoudre un système d'équations en calculant certaines des inconnues à partir des autres arbitrairement fixées est un résultat bien connu d'algèbre linéaire lorsque les f_i sont des formes linéaires $f_i(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}x_j$. Dans ce cas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ et les solutions $x_{j_s} = g_s(x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-p}})$, $1 \leq s \leq p$, s'obtiennent par les formules de Cramer usuelles. En ce sens, le théorème des fonctions implicites est une généralisation au cas différentiable du théorème de résolution des systèmes linéaires, lorsqu'un déterminant ad hoc est inversible.

Démonstration du théorème des fonctions implicites. (i) L'idée est de se ramener au théorème d'inversion locale. Pour cela, on considère la fonction de classe C^k

$$\Phi : U \longrightarrow E' \times F, \quad x = (x', x'') \longmapsto \Phi(x) = (x', f(x', x'')).$$

Résoudre l'équation $f(x) = \beta$ équivaut à résoudre l'équation $\Phi(x', x'') = (x', \beta)$. Or, la différentielle $d\Phi(x', x'') \in \mathcal{L}_c(E' \times E'', E' \times F)$ est donnée sous forme matricielle par

$$d\Phi(x', x'') \begin{pmatrix} h' \\ h'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' \\ df(x', x'')|_{E'}(h') + df(x', x'')|_{E''}(h'') \end{pmatrix},$$

ce qui se traduit en une représentation "matricielle par blocs"

$$d\Phi(x', x'') = \begin{pmatrix} \text{Id}_{E'} & 0 \\ df(x', x'')|_{E'} & df(x', x'')|_{E''} \end{pmatrix}.$$

Comme le bloc $df(\alpha', \alpha'')|_{E''} \in \mathcal{L}_c(E'', F)$ est inversible par hypothèse, il est facile d'en déduire que $d\Phi(\alpha', \alpha'')$ est inversible : on voit aisément que $d\Phi(\alpha', \alpha'') \begin{pmatrix} h' \\ h'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}$ a une solution unique

$$(4.15) \quad h' = k', \quad h'' = (df(\alpha', \alpha'')|_{E''})^{-1}(k'' - df(\alpha', \alpha'')|_{E'}(k')),$$

expression par ailleurs continue en (k', k'') , donc $d\Phi(\alpha', \alpha'')^{-1} \in \mathcal{L}_c(E' \times F, E' \times E'')$.

Le théorème d'inversion locale montre que Φ est un C^k difféomorphisme d'un voisinage $V_1 = V'_1 \times V''_1$ de $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ sur un voisinage W_1 de (α', β) . Pour $(x', \beta) \in W_1$ et $(x', x'') \in V'_1 \times V''_1$, l'équation $\Phi(x', x'') = (x', \beta)$ admet une solution unique $(x', x'') = \Phi^{-1}(x', \beta)$, ce qui équivaut (la composante x' étant de toute manière laissée invariante par Φ et Φ^{-1}) à $x'' = p'' \circ \Phi^{-1}(x', \beta)$ où $p'' : E \rightarrow E''$ est la projection parallèlement à E' . On pose donc

$$(4.16) \quad g(x') = p'' \circ \Phi^{-1}(x', \beta),$$

qui est bien de classe C^k puisque Φ est un C^k difféomorphisme. Or $\Phi(\alpha', \alpha'') = (\alpha', \beta)$, donc $\Phi^{-1}(\alpha', \beta) = (\alpha', \alpha'')$ et $g(\alpha') = \alpha''$. On choisit maintenant $V'' = V''_1$ et $V' \subset V'_1$ assez petit pour que

$$x' \in V' \implies (x', \beta) \in W_1 \text{ et } g(x') \in V'' = V''_1 \text{ par continuité de } g.$$

On obtient ainsi que $g : V' \rightarrow V''$ et 4.12 (i) est démontré avec $V = V' \times V''$.

(ii) On a par construction $f(x', g(x')) = \beta$ pour tout $x' \in V'$. En différentiant cette formule par composition de $x' \mapsto (x', g(x'))$ et $(x', x'') \mapsto f(x', x'')$ il vient

$$df(x', g(x'))|_{E'} \circ \text{Id}_{E'} + df(x', g(x'))|_{E''} \circ dg(x') = 0.$$

Ceci implique bien la formule de différentiation 4.12 (ii) voulue, sachant que les éléments inversibles forment un ouvert, et que $df(x', g(x'))$ est donc inversible pour x' assez voisin de α' par continuité de g (mais on va voir ci-dessous que c'est en réalité automatique pour tout $x' \in V'$). De manière alternative, on peut raisonner comme suit. Les identités (4.15) appliquées au point $(x', x'') = (x', g(x'))$ montrent que

$$d\Phi^{-1}(x', \beta) = (d\Phi(x', x''))^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{E'} & 0 \\ -(df(x', x'')|_{E''})^{-1} \circ df(x', x'')|_{E'} & (df(x', x'')|_{E''})^{-1} \end{pmatrix}$$

et le fait que Φ soit un C^k difféomorphisme sur $V_1 \supset V$ implique bien que $df(x', g(x'))|_{E''}$ est inversible pour tout $x' \in V'$. De plus, la formule (4.16) donne

$$dg(x')(h') = p'' \circ d\Phi^{-1}(x', \beta) \begin{pmatrix} h' \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$dg(x')(h') = -(df(x', g(x'))|_{E''})^{-1} \circ df(x', g(x'))|_{E'}(h'). \quad \square$$

4.17. Remarque. Dans la pratique, le théorème des fonctions implicites fournit seulement un résultat d'existence pour la fonction g , et il est en général impossible d'en tirer une formule explicite ; le calcul numérique de $x'' = g(x')$ se fait en résolvant l'équation $x'' \mapsto f(x', x'') - \beta = 0$ pour x' fixé voisin de α' , ce qui, d'après la méthode de Newton (cf. aussi la remarque 4.8), conduit à itérer la fonction

$$\varphi(x'') = x'' - (df(x', x'')|_{E''})^{-1} (f(x', x'') - \beta),$$

par exemple à partir de la valeur initiale $x'' = \alpha''$.

4.18. Remarque. On peut voir en fait que le théorème des fonctions implicites est entièrement équivalent au théorème d'inversion locale ; la preuve qui a été donnée a déjà montré qu'il était impliqué par le théorème d'inversion locale, il suffit donc de montrer que le théorème des fonctions implicites entraîne le théorème d'inversion locale. Supposons en effet que $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ soit de classe C^k , et choisissons $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ soit un isomorphisme et $y_0 = f(x_0)$. On considère

$$\tilde{f} : \tilde{U} = F \times U \rightarrow F, \quad (y, x) \mapsto \tilde{f}(y, x) = f(x) - y.$$

On a ici $\tilde{U} \subset \tilde{E} = E' \times E''$ avec $E' = F$ et $E'' = E$. Si on pose $x' = y$, $x'' = x$ on voit que $x'' \mapsto \tilde{f}(x', x'')$ n'est autre que l'application $x \mapsto f(x) - y$, sa différentielle $df(x_0)$ étant par hypothèse inversible au point $(x', x'') = (y_0, x_0)$ tel que $\tilde{f}(y_0, x_0) = \beta = 0$. Le théorème des fonctions implicite montre que l'équation $f(x) - y = 0$ se résout dans un voisinage $V' \times V''$ de (y_0, x_0) comme $x'' = g(x')$ avec $g : V' \rightarrow V''$ de classe C^k , c'est-à-dire que pour $y \in V'$, $x = g(y)$ est l'unique solution de $f(x) = y$ telle que $x \in V''$. On voit alors que $g : V' \rightarrow W := g(V') \subset V''$ est un C^k -difféomorphisme, inverse de $f : W \rightarrow V'$. □

4.D. Preuve directe du théorème des fonctions implicites en dimension finie

On va voir ici que l'on peut donner en dimension finie une preuve directe du théorème des fonctions implicites, en n'utilisant en définitive que le théorème des valeurs intermédiaires en une variable et des raisonnements simples de monotonie. On peut alors utiliser la remarque 4.18 pour en déduire le théorème d'inversion locale, également en dimension finie. Cette méthode est nettement plus élémentaire que la méthode du point fixe, mais outre le fait qu'elle ne fonctionne pas en dimension infinie, elle a aussi le désavantage de ne pas fournir de méthode numérique vraiment efficace, et on n'obtient pas non plus d'estimation précise du rayon des boules comme dans 4.6 (iii).

Chapitre III

Sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^n

1. Notion de sous-variété différentiable

1.A. Définitions équivalentes et exemples

1.B. Conditions topologiques nécessaires

1.C. Lemme de Morse

2. Espace tangent à une sous-variété en un point

3. Immersions, submersions, théorème du rang constant

Nous revenons dans cette section à des énoncés fondamentaux du calcul différentiel ; ceux-ci sont des conséquences directes du théorème d'inversion locale, et de même que pour le théorème des fonctions implicites, ils ont nombreuses conséquences géométriques.

3.A. Factorisation des applications linéaires continues

En algèbre linéaire de dimension finie, la philosophie générale est que l'on cherche à décrire les objets considérés à isomorphisme linéaire près ; autrement dit, on s'autorise des changements de base bien choisis pour simplifier les calculs de coordonnées ou la recherche des solutions. La généralisation aux espaces de Banach est en quelque sorte la suivante.

3.1. Théorème de factorisation. *Soit $\ell : E \rightarrow F$ une application linéaire continue entre espaces de Banach. On suppose que le noyau $\text{Ker}(\ell)$ possède un supplémentaire fermé $S \subset E$ et que l'image $\text{Im}(\ell)$ possède un supplémentaire fermé $T \subset F$, de sorte que $E = \text{Ker}(\ell) \oplus S$ et $F = \text{Im}(\ell) \oplus T$ [on notera que ces hypothèses sont automatiques en dimension finie]. Alors*

- (i) $\text{Im}(\ell)$ est nécessairement un sous-espace fermé de F , c'est donc un sous-espace de Banach de F .
- (ii) La restriction $\tilde{\ell} = \ell|_S : S \rightarrow \text{Im}(\ell)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach et on a une factorisation

$$\ell = j_{\text{Im}(\ell)} \circ \tilde{\ell} \circ \pi_S : E \xrightarrow{\pi_S} S \xrightarrow{\tilde{\ell}} \text{Im}(\ell) \xrightarrow{j_{\text{Im}(\ell)}} F$$

où $\pi_S : E \rightarrow S$ est la projection parallèlement à $\text{Ker}(\ell)$ et $j_{\text{Im}(\ell)} : \text{Im}(\ell) \hookrightarrow F$.

Démonstration. (i) Considérons l'application linéaire

$$u : E / \text{Ker}(\ell) \times T \rightarrow F, \quad (\bar{x}, t) \mapsto \ell(x) + t$$

où \bar{x} désigne la classe de $x \in E$ modulo $\text{Ker}(\ell)$. L'application u est surjective puisque $F = \text{Im}(\ell) \oplus T$. Elle est également injective puisque $\ell(x) + t = 0$ implique $\ell(x) = t = 0$, donc $x \in \text{Ker}(\ell)$ et par suite $\bar{x} = 0$. Par ailleurs, comme l'espace quotient $E / \text{Ker}(\ell)$ est un espace de Banach avec la norme quotient $\|\bar{x}\| = \inf_{\xi \in \text{Ker}(\ell)} \|x + \xi\|$ et que $\|\ell(x)\| = \|\ell(x + \xi)\| \leq \|\ell\| \|x + \xi\|$, un passage à l'inf montre que

$$\|u(\bar{x}, t)\| \leq \|\ell\| \|\bar{x}\| + \|t\|,$$

donc u est continue. Par conséquent, c'est un isomorphisme d'espaces de Banach, en particulier un homéomorphisme. On en conclut que $\text{Im}(\ell) = u(E / \text{Ker}(\ell) \times \{0\})$ est fermé comme image du sous-espace fermé $E / \text{Ker}(\ell) \times \{0\}$ de $E / \text{Ker}(\ell) \times T$.

(ii) Si $x = \xi + s$ avec $\xi \in \text{Ker}(\ell)$ et $s \in S$, alors $\ell(x) = \ell(s) = \tilde{\ell}(s)$, et on a $\ell(s) = 0$ si et seulement si $s \in S \cap \text{Ker}(\ell) = \{0\}$. Ceci montre bien que $\tilde{\ell}$ est bijective, c'est donc un isomorphisme d'espaces de Banach. La propriété de factorisation est évidente. \square

En dimension finie, on a en particulier $\dim S = \dim \text{Im}(\ell) = r = \text{rang de } \ell$. Si on choisit une base (e_1, \dots, e_r) de S , $(e'_1, \dots, e'_r) = (\ell(e_1), \dots, \ell(e_r))$ est une base de $\text{Im}(\ell)$. On peut les compléter en prenant des bases (e_{r+1}, \dots, e_n) de $\text{Ker}(\ell)$ et (e'_{r+1}, \dots, e'_p) de T pour obtenir des bases (e_1, \dots, e_n) de $E = S \oplus \text{Ker}(\ell)$ et (e'_1, \dots, e'_p) de $F = \text{Im}(\ell) + T$. Dans ces bases, on obtient une simplification considérable de l'application linéaire ℓ , puisque sa matrice devient la matrice à p lignes et n colonnes

$$\text{Mat}_{(e_j), (e'_i)}(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, avec les isomorphismes $\varphi : E \simeq \mathbb{R}^n$, $\psi : F \simeq \mathbb{R}^p$, l'application ℓ s'écrit en coordonnées

$$(3.2) \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad u_{n,p,r} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

qui est la composée de

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^r, & (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_r) \quad (\text{projection canonique}), \\ \mathbb{R}^r &\rightarrow \mathbb{R}^p, & (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad (\text{injection canonique}), \end{aligned}$$

et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ell} & F \\ \varphi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{u_{n,p,r}} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

autrement dit $\ell = \psi^{-1} \circ u_{n,p,r} \circ \varphi$ se ramène à (3.2) modulo les isomorphismes φ, ψ . Dans les espaces de Banach généraux, nous avons l'énoncé analogue suivant.

3.3. Proposition. *Soit $\ell : E \rightarrow F$ une application linéaire continue entre espaces de Banach telle qu'on ait des décompositions $E = \text{Ker}(\ell) \oplus S$ et $F = \text{Im}(\ell) \oplus T$ en sous-espaces fermés. Alors, si on pose $K = \text{Ker}(\ell)$ et $Q = \text{Im}(\ell)$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ell} & F \\ (\ell, \pi_K) = \varphi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \psi = (\pi_Q, \pi_T) \\ Q \times K & \xrightarrow{u_{Q,K,T}} & Q \times T \\ (q, \xi) & \mapsto & (q, 0), \end{array}$$

c'est-à-dire $\ell = \psi^{-1} \circ u_{Q,K,T} \circ \varphi$, où $\varphi(x) = (\ell(x), \pi_K(x))$ et $\psi^{-1}(q, t) = q + t$.

Modulo isomorphisme, cette proposition ramène donc l'application linéaire ℓ à la composée $u_{Q,K,T}$ de la projection évidente $Q \times K \rightarrow Q$, $(q, \xi) \mapsto q$ avec l'injection évidente $Q \rightarrow Q \times T$, $q \mapsto (q, 0)$.

Démonstration. Le seul point non entièrement trivial à vérifier est que φ est un isomorphisme, et pour cela, comme φ est continue, il suffit de voir que φ est bijective. Mais $E = K \oplus S$ et pour $x = \xi + s$, $\xi \in K$, $s \in S$, il vient $\varphi(x) = (\ell(\xi + s), \xi) = (\ell(s), \xi)$ où $\tilde{\ell} = \ell|_S$ est un isomorphisme de S sur $Q = \text{Im}(\ell)$ (cf. 3.1 (ii)). □

3.4. Remarque. Si E est un espace de Hilbert, tout sous-espace fermé S admet un supplémentaire T : il suffit de prendre le sous-espace orthogonal $T = S^\perp$. Ceci est vrai en particulier en dimension finie en prenant une structure euclidienne ou hermitienne quelconque sur E . Il existe néanmoins des exemples de sous-espaces fermés d'espaces de Banach qui n'admettent pas de supplémentaire fermé. R.S. Phillips a ainsi montré en 1940 que dans l'espace $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées $x = (x_n)$ muni de la norme du maximum $\|x\| = \sup |x_n|$, le sous-espace fermé $S = C_0(\mathbb{N})$ des suites convergeant vers 0 à l'infini ne possède pas de supplémentaire fermé.

3.B. Résultats fondamentaux sur les immersions et submersions

On suppose dans toute cette section que \mathcal{E} et \mathcal{F} sont des espaces affines associés à des espaces de Banach E, F , et que U est un ouvert de E .

3.5. Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ une application de classe C^k , $k \geq 1$. On dit que :

- (i) f est une immersion en un point $x_0 \in U$ si $df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est injective et si l'image $\text{Im}(df(x_0))$ possède un supplémentaire fermé T dans F (cette dernière hypothèse étant automatique si $\dim F < +\infty$)⁽¹⁾.
- (ii) f est une submersion en un point $x_0 \in U$ si $df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est surjective et si $\text{Ker}(df(x_0))$ possède un supplémentaire fermé S dans E (cette dernière hypothèse étant automatique si $\dim E < +\infty$)⁽¹⁾.

La structure locale de telles applications est décrite respectivement par les deux théorèmes suivants. Tous les voisinages considérés dans cette section sont supposés implicitement ouverts.

3.6. Théorème des immersions. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est une immersion en un point $x_0 \in U$ et T un supplémentaire fermé de $\text{Im}(df(x_0))$ dans F , il existe un voisinage V de x_0 dans \mathcal{E} , un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$ dans \mathcal{F} et un C^k -difféomorphisme $\psi : W \rightarrow V \times Z_T$ de W sur un voisinage $V \times Z_T$ de $(x_0, 0)$ dans $\mathcal{E} \times T$, tel que $f(V) \subset W$ et $\psi \circ f = j$ où $j : V \rightarrow V \times Z_T$ est l'injection évidente $j(x) = (x, 0)$ sur V .

On peut visualiser la situation par le schéma suivant :

⁽¹⁾ Dans certains livres, on trouve une définition dans laquelle on suppose seulement que l'image $\text{Im}(df(x_0))$ est fermée, et ce que nous avons appelé "immersion" est alors appelé "immersion directe". Dans le cas (ii), on parlerait de même de submersion directe. Ces distinctions sont inutiles en dimension finie, l'injectivité ou la surjectivité de $df(x_0)$ suffisent.

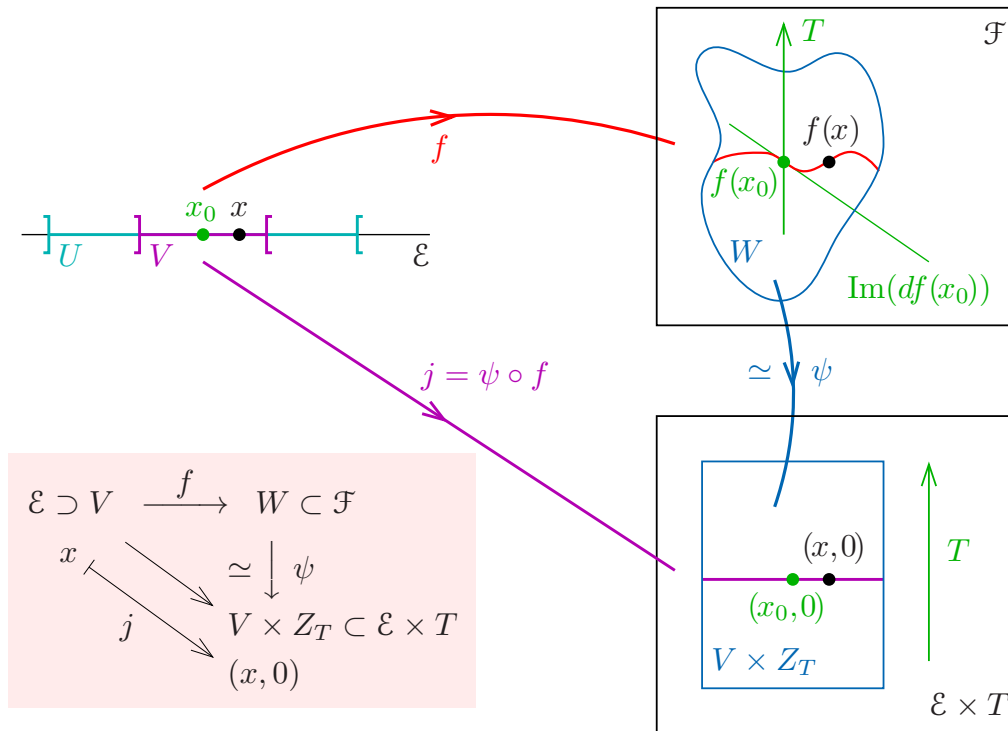


Fig. ????. Visualisation du théorème des immersions

Le théorème des immersions signifie qu'on peut trouver à l'arrivée un difféomorphisme aplatissant ψ qui trivialisait l'immersion f en une injection évidente $\psi \circ f = j : x \mapsto (x, 0)$, localement au voisinage du point x_0 .

Démonstration du théorème des immersions. Définissons

$$g : U \times T \rightarrow \mathcal{F}, \quad g(x, t) = f(x) + t.$$

On a de façon évidente $dg(x, t)(h, \xi) = df(x)(h) + \xi$ et en particulier

$$dg(x_0, 0)(h, \xi) = df(x_0)(h) + \xi$$

définit bien un isomorphisme de $E \times T$ sur F puisque $F = \text{Im}(df(x_0)) \oplus T$ et que $df(x_0)$ est injective. D'après le théorème d'inversion locale, il en résulte qu'il existe un voisinage $V \times Z_T$ de $(x_0, 0)$ dans $\mathcal{E} \times T$ et un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$ dans \mathcal{F} tel que g soit un difféomorphisme de $V \times Z_T$ sur W (si nécessaire, rétrécir le voisinage de départ en un voisinage produit). On prend maintenant $\psi = g^{-1} : W \rightarrow V \times Z_T$. Comme $g(x, 0) = f(x)$ pour $x \in V$, on a bien $f(x) \in W$ et $(x, 0) = \psi(f(x))$. \square

3.7. Théorème des submersions. Si $f : U \rightarrow \mathcal{F}$ est une submersion en un point $x_0 \in V$ et S un supplémentaire de $\text{Ker}(df(x_0))$ dans E , il existe un voisinage V de x_0 dans \mathcal{E} , un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$ dans \mathcal{F} , un voisinage Z_K de 0 dans $K = \text{Ker}(df(x_0))$ et un C^k -difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow W \times Z_K$ de V sur le voisinage $W \times Z_K \subset \mathcal{F} \times K$ de $(y_0, 0)$, tels que $f \circ \varphi^{-1} = p$ où $p : W \times Z_K \rightarrow W$ est la projection évidente $p(y, \xi) = y$ sur W .

On peut visualiser la situation par le schéma suivant :

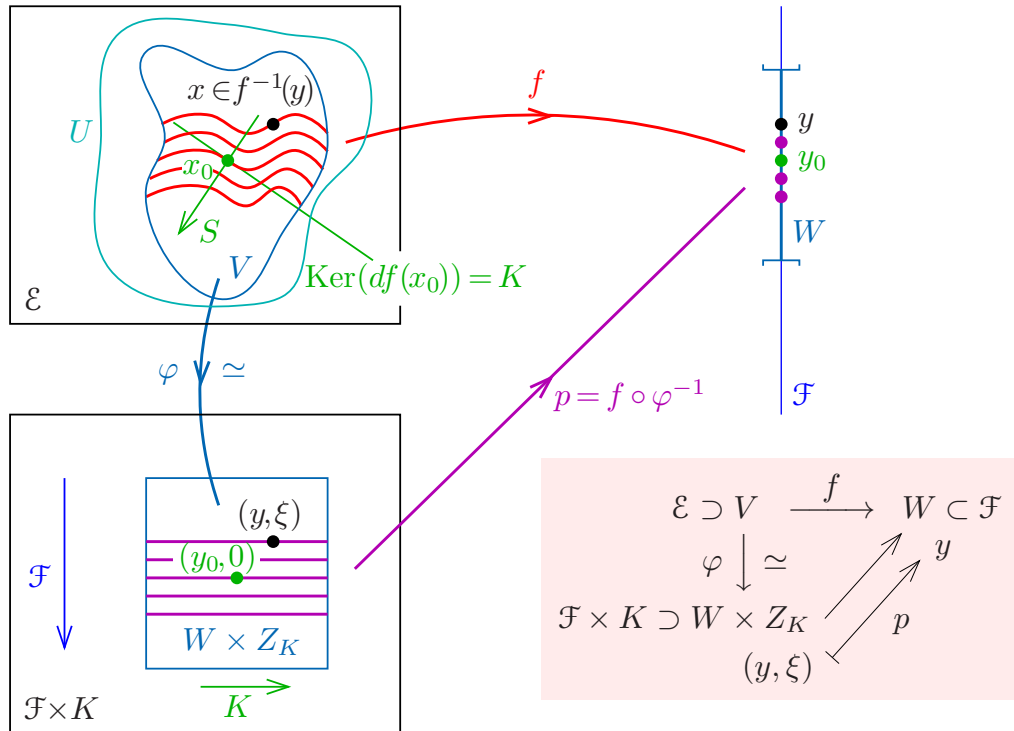


Fig. ???. Visualisation du théorème des submersions

Le théorème des submersions signifie qu'on peut trouver au départ un difféomorphisme φ qui trivialise l'immersion f en une projection évidente $f \circ \varphi^{-1} = p : (y, \xi) \mapsto y$, localement au voisinage du point $(y_0, 0)$. Les fibres $f^{-1}(y) \cap V$ sont envoyées par φ sur les ensembles "aplatis" $\{y\} \times Z_K = p^{-1}(y) \cap (W \times Z_K)$ (portions de sous-espaces affines de direction $\{0\} \times K$).

Démonstration du théorème des submersions. Définissons

$$\varphi : U \rightarrow \mathcal{F} \times K, \quad \varphi(x) = (f(x), \pi_K(x - x_0))$$

où $\pi_K : E \rightarrow K$ est la projection sur $K = \text{Ker}(df(x_0))$ parallèlement à S . On a immédiatement $d\varphi(x)(h) = (df(x)(h), \pi_K(h))$, et il en résulte que $d\varphi(x_0) : E \rightarrow \mathcal{F} \times K$ est un isomorphisme : en effet, en raisonnant comme pour la proposition 3.3, si $h = \xi + s \in E = K \oplus S$, $\xi \in K$, $s \in S$, on voit que $d\varphi(x_0)(h) = (df(x_0)(s), \xi)$, et $df(x_0)|_S$ est un isomorphisme de S sur \mathcal{F} . D'après le théorème d'inversion locale, φ est un C^k -difféomorphisme d'un voisinage V de x_0 sur un voisinage $W \times Z_K$ de $\varphi(x_0) = (y_0, 0)$ (quitte à rétrécir ces voisinages, on peut toujours supposer que le voisinage d'arrivée est un produit). Si $p : W \times Z_K \rightarrow W$, $(y, \xi) \mapsto y$ est la projection sur le premier facteur, on a alors de façon évidente $p \circ \varphi = f$, donc $f \circ \varphi^{-1} = p$. \square

On étudie maintenant ce qui se passe lorsque $df(x_0)$ n'est ni injective, ni surjective. L'exemple suivant montre que la situation peut être assez mauvaise.

3.8. Exemple. Considérons l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_1 x_2).$$

Étant donné un point $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on constate que la fibre $f^{-1}(y)$ consiste en l'unique point $(x_1, x_2) = (y_1, y_2/y_1)$ si $y_1 \neq 0$. Cependant, si $y_1 = 0$, on a $f^{-1}((0, 0)) = \{0\} \times \mathbb{R}$ tandis que $f^{-1}((0, y_2)) = \emptyset$ si $y_2 \neq 0$. La fibre est donc parfois vide, parfois de dimension 1, et en général de dimension 0. Dans ce cas la matrice jacobienne est donnée par

$$\text{Mat}(df(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

et on voit que son rang est 2 si $x_1 \neq 0$, mais que son rang est 1 si $x_1 = 0$. Le noyau $\text{Ker}(df(x))$ est trivial si $x_1 \neq 0$, mais égal à $\{0\} \times \mathbb{R}$ si $x_1 = 0$. Pour éviter ce type de difficultés, on est amené à supposer que le rang de $df(x)$ est constant.

3.9. Lemme. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} des espaces de dimensions finies, disons n et p respectivement, et $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ une application de classe C^k , $k \geq 1$. On suppose que le rang de $df(x) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est constant et égal à un entier r (avec $0 \leq r \leq \min(n, p)$) dans un voisinage V_0 de x_0 . Alors, si S est un supplémentaire de $\text{Ker}(df(x_0))$ dans E et T un supplémentaire de $\text{Im}(df(x_0))$ dans F , il existe un voisinage $V'_0 \subset V_0$ de x_0 tel que $E = \text{Ker}(df(x)) \oplus S$ et $F = \text{Im}(df(x)) \oplus T$ pour tout $x \in V'_0$.

Démonstration. Choisissons une base (e_1, \dots, e_r) de S et complétons là avec une base (e_{r+1}, \dots, e_n) de $\text{Ker}(df(x_0))$. Alors $(e'_1, \dots, e'_r) = (df(x_0)(e_1), \dots, df(x_0)(e_r))$ est une base de $\text{Im}(df(x_0))$; complétons-là avec une base (e'_{r+1}, \dots, e'_p) de T . Pour $x \in U$, le déterminant $\delta(x) = \det_{(e'_j)}(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_p), e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ est une fonction de classe C^{k-1} , donc en particulier continue. Comme $\delta(x_0) = 1$, l'ensemble $V'_0 = \{x \in V_0; \delta(x) \neq 0\}$ est un voisinage ouvert de x_0 . Par définition

$$\text{Im}(df(x)) \supset \text{Vect}(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_r)), \quad T = \text{Vect}(e'_{r+1}, \dots, e'_p),$$

et comme pour $x \in V'_0$ le système $(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_r), e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ est une base de F , on en conclut que

$$\text{Vect}(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_r)) \oplus T = F, \quad \forall x \in V'_0.$$

En particulier

$$\dim \text{Im}(df(x)) = r = \dim \text{Vect}(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_r)).$$

On a donc bien $\text{Im}(df(x)) = \text{Vect}(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_r))$ et $\text{Im}(df(x)) \oplus T = F$ pour $x \in V'_0$. Par ailleurs, comme $S = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, l'indépendance linéaire des vecteurs $(df(x)(e_1), \dots, df(x)(e_r))$ signifie que $S \cap \text{Ker}(df(x)) = \{0\}$ pour $x \in V'_0$. Comme les dimensions r et $n - r$ sont complémentaires, on en déduit finalement que $\text{Ker}(df(x)) \oplus S = E$ pour $x \in V'_0$. \square

En dimension infinie, l'hypothèse sur le rang n'a pas de sens, mais elle peut être remplacée par la conclusion du lemme, en supposant S et T fermés. L'énoncé qui suit est sans doute assez impénétrable, le lecteur est prié de déchiffrer plutôt le schéma !

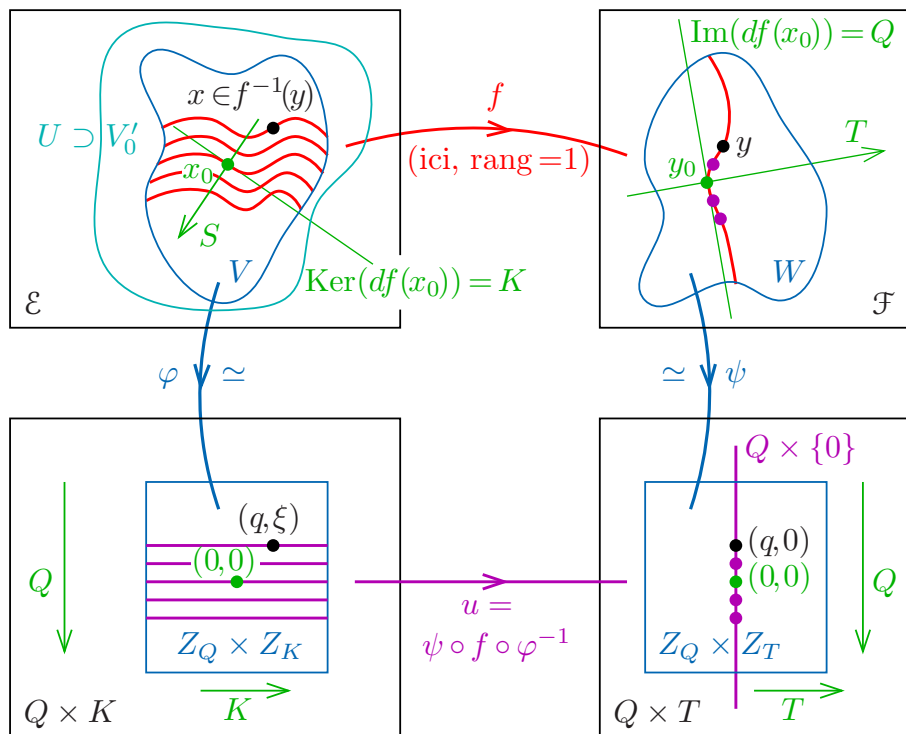
3.10. Théorème du rang constant. Soit $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ une application de classe C^k , $k \geq 1$, et soit $x_0 \in U$. On suppose qu'il existe un voisinage V_0 de x_0 sur lequel

$$\text{rang}(df(x)) = r \text{ constant } \forall x \in V_0 \quad (\text{cas de la dimension finie}),$$

et, en dimension quelconque, qu'il existe un voisinage V'_0 de x_0 et des sous-espaces fermés $S \subset E, T \subset F$ tels que

$$\text{Ker}(df(x)) \oplus S = E, \quad \text{Im}(df(x)) \oplus T = F, \quad \forall x \in V'_0$$

(cette dernière hypothèse équivaut en dimension finie à l'hypothèse sur le rang, d'après le lemme 3.9). Alors, en posant $K = \text{Ker}(df(x_0))$ et $Q = \text{Im}(df(x_0))$, il existe un voisinage V de x_0 dans \mathcal{E} , un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$ dans \mathcal{F} , des voisinages Z_K, Z_Q et Z_T de 0 dans K, Q, T et des C^k -difféomorphismes $\varphi : V \rightarrow Z_Q \times Z_K \subset Q \times K$ et $\psi : W \rightarrow Z_Q \times Z_T \subset Q \times T$ tels que $\varphi(x_0) = (0, 0), \psi(y_0) = (0, 0)$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ coïncide avec l'application linéaire $u : Q \times K \rightarrow Q \times T, (q, \xi) \mapsto (q, 0)$ sur $Z_Q \times Z_K$.



$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} \supset V & \xrightarrow{f} & W \subset \mathcal{F} \\
 \varphi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \psi \\
 Q \times K \supset Z_Q \times Z_K & \xrightarrow{u} & Z_Q \times Z_T \subset Q \times T \\
 (q, \xi) & \longmapsto & (q, 0)
 \end{array}$$

Fig. ???. Visualisation du théorème du rang constant

Autrement dit, aux C^k -difféomorphismes φ, ψ près à la fois au départ et à l'arrivée, l'application f se transforme en $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ qui s'identifie à l'application linéaire "évidente" $u = u_{Q,K,T} : Q \times K \rightarrow Q \times T$ telle que $(q, \xi) \mapsto (q, 0)$ sur un voisinage de $\varphi(x_0) = (0, 0) \in Q \times K$. (Nous donnerons plus loin un énoncé équivalent nettement plus transparent !)

Démonstration du théorème du rang constant. On met en quelque sorte bout à bout la preuve du théorème des submersions et la preuve du théorème des immersions. Quitte à placer l'origine de \mathcal{E} en x_0 et l'origine de \mathcal{F} en $y_0 = f(x_0)$, on peut supposer $\mathcal{E} = E$, $\mathcal{F} = F$ et $x_0 = 0, y_0 = 0$. Soient $\pi_Q : F = Q \oplus T \rightarrow Q$ la projection sur $Q = \text{Im}(df(x_0))$, et $\pi_T : F \rightarrow T$ la projection sur T . Pour commencer, on observe que la composée

$$g = \pi_Q \circ f : U \rightarrow Q$$

a pour différentielle $dg(x_0) = \pi_Q \circ df(x_0) = df(x_0)$ qui est une surjection de E sur Q , et que son noyau $K = \text{Ker}(dg(x_0)) = \text{Ker}(df(x_0))$ est en somme directe avec S . Le théorème des submersions entraîne l'existence d'un voisinage \tilde{V} de x_0 et d'un C^k -difféomorphisme $\varphi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{Z}_Q \times \tilde{Z}_K \subset Q \times K$ tel que $\varphi(x_0) = (0, 0)$ et $g \circ \varphi^{-1}(x) = p_Q(x)$ où $p_Q : Q \times K \rightarrow Q$ est la projection. Considérons

$$\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1} : \tilde{Z}_Q \times \tilde{Z}_K \rightarrow F = Q \oplus T.$$

Nous avons $\pi_Q \circ \tilde{f} = \pi_Q \circ f \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1} = p_Q$. Par conséquent, si $\tilde{\tau} = \pi_T \circ \tilde{f}$, on peut écrire

$$\tilde{f}(q, \xi) = q + \tilde{\tau}(q, \xi) \quad \text{dans la décomposition } F = Q \oplus T,$$

avec $\tilde{\tau} : \tilde{Z}_Q \times \tilde{Z}_K \rightarrow T$. On trouve $d\tilde{f}(z) = df(\varphi^{-1}(z)) \circ d\varphi^{-1}(z)$ avec $d\varphi^{-1}(z)$ bijective, donc $\text{Im}(d\tilde{f}(z)) = \text{Im}(df(\varphi^{-1}(z)))$, et l'hypothèse sur $\text{Im}(df(x))$ entraîne

$$(*) \quad \text{Im}(d\tilde{f}(z)) \oplus T = \text{Im}(df(\varphi^{-1}(z))) \oplus T = F$$

pour $z = (q, \xi)$ dans un voisinage de $(0, 0) \in Q \times K$. D'autre part, nous avons

$$(**) \quad d\tilde{f}(q, \xi)(h, \eta) = h + d_Q \tilde{\tau}(q, \xi)(h) + d_K \tilde{\tau}(q, \xi)(\eta), \quad \forall (h, \eta) \in Q \times K,$$

et en particulier, en faisant $h = 0$, on voit que $\text{Im}(d\tilde{f}(q, \xi))$ contient les vecteurs $d_K \tilde{\tau}(q, \xi)(\eta) \in T$. Ceci n'est compatible avec la propriété de somme directe (*) que si $d_K \tilde{\tau}(q, \xi)(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in K$ (et tout (q, ξ) dans un voisinage de $(0, 0) \in Q \times K$). Ainsi $d_K \tilde{\tau} = 0$ et donc $\tilde{\tau}(q, \xi) = \tau(q)$ ne doit pas dépendre de ξ dans un voisinage de $(0, 0)$. Autrement dit, si on pose $\theta(q) = q + \tau(q)$, on a

$$(***) \quad f \circ \varphi^{-1}(q, \xi) = \tilde{f}(q, \xi) = q + \tau(q) = \theta(q)$$

dans un voisinage de $(0, 0) \in Q \times K$, et (**) donne en particulier

$$d\tilde{f}(0, 0)(h, 0) = h + d\tau(0)(h), \quad \forall h \in Q.$$

Or $\text{Im}(d\tilde{f}(0,0)) = \text{Im}(df(x_0)) = Q$ et τ est à valeurs dans T , donc $d\tau(0)(h) \in T$. Comme $T \cap Q = \{0\}$, on voit que l'on a nécessairement $d\tau(0) = 0$. Par conséquent, l'application θ est une immersion de classe C^k d'un voisinage de 0 dans Q dans $Q \oplus T = F$ avec $d\theta(0) = \text{Id}_Q$, telle que $\text{Im}(d\theta(0)) \oplus T = F$. Le théorème des immersions fournit un C^k -difféomorphisme $\psi : W \rightarrow Z_Q \times Z_T$ d'un voisinage de $y_0 = 0 \in F$ sur un voisinage de $(0,0) \in Q \times T$ tel que $\psi \circ \theta(q) = (q,0)$ pour $q \in Z_Q$, et on peut supposer Z_Q et Z_K assez petits pour que toutes les propriétés précédentes soient vraies pour $(q, \xi) \in Z_Q \times Z_K$. On obtient ainsi d'après (***)

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(q, \xi) = \psi \circ \theta(q) = (q, 0),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous donnons maintenant une formulation du théorème du rang constant strictement équivalente à la précédente, mais qui a l'avantage d'être beaucoup plus limpide !

3.11. Théorème du rang constant (énoncé de linéarisation). Soit $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ une application de classe C^k , $k \geq 1$, et soit $x_0 \in U$. On suppose en dimension finie que $df(x)$ est de rang constant pour au voisinage de x_0 , et respectivement, en dimension infinie, qu'il existe des sous-espaces fermés $S \subset E$, $T \subset F$ tels que

$$\text{Ker}(df(x)) \oplus S = E, \quad \text{Im}(df(x)) \oplus T = F$$

pour x voisin de x_0 . Alors, si $\ell = df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$, il existe un C^k -difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow Z_E$ d'un voisinage de $x_0 \in \mathcal{E}$ sur un voisinage de $0 \in E$ et un C^k -difféomorphisme $\psi : W \rightarrow Z_F$ d'un voisinage de $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{F}$ sur un voisinage Z_F de $0 \in F$, tels qu'on ait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) = 0, \quad d\varphi(x_0) = \text{Id}_E, \quad \psi(y_0) = 0, \quad d\psi(y_0) = \text{Id}_F, \\ f(V) \subset W, \quad \ell(Z_E) \subset Z_F, \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \ell \quad \text{sur } Z_E, \\ \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \supset V & \xrightarrow{f} & W \subset \mathcal{F} \\ \varphi \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \psi \\ E \supset Z_E & \xrightarrow{\ell = df(x_0)} & Z_F \subset F. \end{array} \end{aligned}$$

En d'autres termes, on a des changements de variables C^k -difféomorphes φ et ψ tangents à l'identité qui "linéarisent" f en son application linéaire tangente $\ell = df(x_0)$ au voisinage de x_0 . □

Démonstration. Soient $\tilde{\varphi} : V \rightarrow Z_Q \times Z_K$ et $\tilde{\psi} : W \rightarrow Z_Q \times Z_T$ les C^k -difféomorphismes fournis par le théorème 3.10 et $u : Q \times K \rightarrow Q \times T$ l'application linéaire continue $(q, \xi) \mapsto (q, 0)$. Ceci donne au voisinage de x_0 une factorisation

$$f = \tilde{\psi}^{-1} \circ u \circ \tilde{\varphi}.$$

En introduisant $d\tilde{\varphi}(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, Q \times K)$ et $d\tilde{\psi}(y_0) \in \mathcal{L}_c(F, Q \times T)$, on obtient la factorisation cherchée $f = \psi^{-1} \circ \ell \circ \varphi$ en posant

$$\varphi = d\tilde{\varphi}(x_0)^{-1} \circ \tilde{\varphi}, \quad \psi = d\tilde{\psi}(y_0)^{-1} \circ \tilde{\psi}, \quad \ell = d\tilde{\psi}(y_0)^{-1} \circ u \circ d\tilde{\varphi}(x_0).$$

En effet $\ell : E \rightarrow F$ est bien linéaire continue, et $\varphi : V \rightarrow E$, $\psi : W \rightarrow F$ sont par définition des C^k -difféomorphismes sur des voisinages de Z_E et Z_F de l'origine, tels que $d\varphi(x_0) = \text{Id}_E$, $d\psi(y_0) = \text{Id}_F$. Ceci entraîne $df(x_0) = \text{Id}_F^{-1} \circ \ell \circ \text{Id}_E = \ell$, comme annoncé. L'équivalence de 3.11 avec 3.10 résulte de la proposition 3.3. \square

3.12. Remarque (exercice !). De manière tout à fait analogue, le théorème des immersions se formule en disant que si $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ est une immersion en un point x_0 , on peut linéariser f sous la forme

$$\psi \circ f(x) = df(x_0)(x - x_0)$$

avec un C^k -difféomorphisme ψ d'un voisinage de $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{F}$ sur un voisinage de $0 \in F$ tel que $d\psi(y_0) = \text{Id}_F$ (on a donc ici $\varphi(x) = x - x_0$). Le théorème des submersions signifie de même que si $f : \mathcal{E} \supset U \rightarrow \mathcal{F}$ est une submersion au point x_0 , on peut linéariser f sous la forme

$$f \circ \varphi^{-1}(h) - y_0 = df(x_0)(h)$$

à l'aide d'un difféomorphisme φ d'un voisinage de $x_0 \in \mathcal{E}$ sur un voisinage de $0 \in E$ tel que $d\varphi(x_0) = \text{Id}_E$ (on a ici $\psi(y) = y - y_0$). \square

3.C. Applications géométriques en vue de l'étude des sous-variétés

Immersion globales, plongements, plongements homéomorphes ...

4. Sous-variétés paramétrées

5. Problèmes

5.1. Soit (E, d) un espace métrique et $\varphi : E \rightarrow E$ une application continue telle que l'itérée $\varphi^m = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ soit contractante, avec constante de Lipschitz $k \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) On convient de noter $\varphi^0 = \text{Id}_E$. Vérifier que la formule

$$d'(x, y) = \max_{0 \leq i \leq m-1} k^{-i/m} d(\varphi^i(x), \varphi^i(y))$$

définit une distance sur E , topologiquement équivalente à la distance d (c'est-à-dire que les ouverts pour d et d' sont les mêmes). Montrer que (E, d') est complet dès que (E, d) est complet.

(b) Montrer que φ est lipschitzienne de rapport $k^{1/m}$ pour d' . En déduire que φ admet un point fixe unique a , et que, pour tout point initial $x_0 \in E$, il existe une constante C telle que la suite des itérés $x_p = \varphi(x_{p-1})$ vérifie $d(x_p, a) \leq C k^{p/m}$.

5.2. On considère la fonction f telle que

$$f(x) = x \ln(x), \quad x \in [1, +\infty[.$$

On se propose d'étudier des algorithmes itératifs permettant de calculer l'image réciproque $f^{-1}(a)$ pour un réel $a \in [0, +\infty[$ fixé quelconque.

(a) Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

(b) On pose $\varphi(x) = \frac{a}{\ln(x)}$. Pour $a = e$, calculer explicitement $f^{-1}(a)$.

Pour quelles valeurs de $a \neq e$ le procédé itératif $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge-t-il lorsque la valeur initiale x_0 est choisie assez voisine de $f^{-1}(a)$?

(c) Soit $x_{p+1} = \psi(x_p)$ l'algorithme itératif fourni par la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $x \ln(x) - a = 0$.

(α) Étudier les variations de la fonction ψ et tracer sommairement la courbe représentative de ψ .

(β) Étudier la convergence de la suite (x_p) pour $a \in [0, +\infty[$ et $x_0 \in [1, +\infty[$ quelconques.

(γ) Évaluer $f^{-1}(2)$ par ce procédé à l'aide d'une calculatrice. On donnera les approximations successives obtenues.

5.3. On considère la fonction

$$f(x) = \exp(\exp(-\cos(\sin(x + e^x)))) + x^3.$$

On donne $f(0, 1) \simeq 1,737$; $f(0, 2) \simeq 1,789$ à 10^{-3} près. Écrire un programme permettant de résoudre l'équation $f(x) = 7/4$ à la précision $\varepsilon = 10^{-10}$, ceci au

moyen d'une méthode itérative adaptée (qui permet d'éviter des calculs formels trop compliqués). La justification de la convergence n'est pas demandée.

5.4. On se propose d'étudier le comportement des itérés d'une fonction au voisinage d'un point fixe, dans le cas critique où la dérivée vaut 1 en ce point.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1 . On suppose que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, et que φ admet un développement limité

$$\varphi(x) = x - ax^k + x^k \varepsilon(x)$$

avec

$$a > 0, \quad k > 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} \varepsilon(x) = 0.$$

- (a) Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]0, h]$ la suite itérée $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers 0.
- (b) On pose $u_p = x_p^m$ où $m \in \mathbb{R}$. Déterminer un équivalent de $u_{p+1} - u_p$ en fonction de x_p .
- (c) Montrer qu'il existe une valeur de m pour laquelle $u_{p+1} - u_p$ possède une limite finie non nulle. En déduire un équivalent de x_p .
- (d) Pour $\varphi(x) = \sin x$ et $x_0 = 1$, estimer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre $x_p < 10^{-5}$.

5.5. Dans tout ce problème, on travaille sur un intervalle $[a, b]$ fixé.

- (a) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$. Démontrer
 - que $g(x)$ ne s'annule en aucun x de $]a, b[$,
 - puis que $g(x) < 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

[Raisonnement par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.]

- (b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

Démontrer

- (α) qu'il existe c (unique) dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$;
- (β) qu'il existe m_1 et m_2 tels que

$$0 < m_1 \leq f'(x), \quad 0 < f''(x) \leq m_2 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [a, b].$$

- (c) On conserve désormais les hypothèses de la question (b), et on se propose de « calculer » c . Soit p le polynôme de degré 1 tel que $p(a) = f(a)$, $p(b) = f(b)$, et soit c_1 dans $]a, b[$ tel que $p(c_1) = 0$.

- (α) Démontrer que $a < c_1 < c$ [appliquer la question (a) à $g(x) = f(x) - p(x)$].
- (β) Établir la majoration

$$|f(c_1)| \leq \frac{1}{2} m_2 |(c_1 - a)(c_1 - b)|.$$

- (d) Soit (c_n) , $n \geq 0$, la suite récurrente définie de la façon suivante :
 - on pose $c_0 = a$;
 - pour tout $n \geq 0$ (et c_n étant déjà définie) on note p_n l'unique polynôme de degré 1 tel que $p_n(c_n) = f(c_n)$, $p_n(b) = f(b)$; et on définit c_{n+1} par $p_n(c_{n+1}) = 0$.

- (α) Mettre explicitement cette récurrence sous la forme $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.
- (β) Démontrer que (c_n) est une suite strictement croissante contenue dans l'intervalle $[a, c]$.
- (γ) Démontrer que la suite (c_n) converge vers c , et que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|c_n - c| \leq \frac{f(c_n)}{m_1}.$$

- (e) *Programmation d'un exemple.* On pose $f(x) = x^4 + x - 1$.
 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine c et une seule dans l'intervalle $[0, 1]$. Écrire un programme permettant de calculer c à 10^{-8} près.

5.6. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} X = -x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} \\ Y = -\frac{1}{2}x + y^2 + \frac{3}{4} \end{cases}$$

- (a) Déterminer les points fixes de φ .
- (b) Ces points fixes sont-ils attractifs ?
- (c) Soit B le point fixe non attractif de φ . Montrer que φ admet une application réciproque $\psi : V \rightarrow W$ de classe C^∞ , où V, W sont des voisinages de B . Le point B est-il attractif pour ψ ?

5.7. On cherche à résoudre numériquement le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} y \ln y - x \ln x = 3 \\ x^4 + xy + y^3 = a \end{cases}$$

où $x, y > 0$ et où a est un paramètre réel.

- (a) Étudier sommairement les variations de la fonction $x \mapsto x \ln x$ et montrer que pour $a \geq 31$ le système (S) n'a pas de solution (x, y) telle que $x < 1$. Montrer que pour $x \geq 1$ la solution y de la première équation est fonction croissante de x et en déduire que le système (S) admet une solution (x, y) unique pour $a \geq 31$.
- (b) Montrer que la solution (x, y) est telle que

$$y = x + \frac{3}{1 + \ln c} \quad \text{où } c \in]x, y[.$$

En déduire un équivalent de x et y en fonction de a quand a tend vers $+\infty$. Pouvez-vous raffiner cet équivalent et donner un développement plus précis ?

- (c) Écrire l'algorithme permettant de résoudre le système (S) au moyen de la méthode de Newton. On prendra $a = 10^4$.

5.8. Soit \mathcal{A} une algèbre unitaire normée de dimension finie sur \mathbb{R} , par exemple l'algèbre des matrices carrées $m \times m$. Soit $u \in \mathcal{A}$ un élément inversible.

- (a) Montrer qu'il existe des réels α, β tels que l'application $\varphi(x) = \alpha x + \beta x u x$ admette $x = u^{-1}$ comme point fixe super-attractif.
- (b) Pour les valeurs de α, β trouvées au (a), montrer que l'on a l'inégalité $\|\varphi'(x)\| \leq 2\|u\| \|x - u^{-1}\|$. En déduire que la suite itérée $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers u^{-1} dès que $x_0 \in \overline{B}(u^{-1}, r)$ avec $r < \frac{1}{2\|u\|}$.
- (c) On suppose $u = e - v$ avec $e =$ élément unité de \mathcal{A} et $\lambda = \|v\| < 1$. Montrer que u est inversible et que $u^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k$. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'algorithme du (b) converge pour $x_0 = e + v + \dots + v^n$.
- (d) On suppose ici que \mathcal{A} est *commutative* (exemple : $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{A} = \mathbb{C}$). Chercher un algorithme permettant de déterminer une racine carrée de u (s'il en existe), en utilisant uniquement additions et multiplications (*Indication* : considérer $\psi(x) = \alpha x + \beta u x^3$).

Si $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, comment peut-on choisir x_0 pour être assuré d'obtenir la convergence ?

5.9. On suppose $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^k , $k \geq 2$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ un point tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\ell = f'_y(x_0, y_0)$ inversible. Donner des estimations précises de la taille des voisinages U, V intervenant dans le théorème des fonctions implicites en fonction de $\|\ell\|, \|\ell^{-1}\|$ et de bornes sur les dérivées premières et secondes de f sur un voisinage $B(x_0, r_0) \times B(y_0, r'_0) \subset \Omega$.

Chapitre IV

Équations différentielles, Résultats fondamentaux

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Il s'agit du chapitre central de la théorie, de ce fait nécessairement assez abstrait. Sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs.

1. Définitions. Solutions maximales et globales

1.1. Équation différentielle ordinaire du premier ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

une application *continue*. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Définition. Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

- (i) $(\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U$
- (ii) $(\forall t \in I) \quad y'(t) = f(t, y(t)).$

L'« inconnue » de l'équation (E) est donc en fait une *fonction*. Le qualificatif « ordinaire » pour l'équation différentielle (E) signifie que la fonction inconnue y dépend d'une seule variable t (lorsqu'il y a plusieurs variables t_i et plusieurs dérivées $\partial y / \partial t_i$, on parle d'équations aux dérivées partielles).

Écriture en coordonnées. Écrivons les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^m en termes de leurs fonctions composantes, c'est-à-dire

$$y = (y_1, \dots, y_m), \quad f = (f_1, \dots, f_m).$$

L'équation (E) apparaît comme un *système différentiel* du premier ordre à m fonctions inconnues y_1, \dots, y_m :

$$(E) \quad \begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \\ \dots \\ y_m'(t) = f_m(t, y_1(t), \dots, y_m(t)). \end{cases}$$

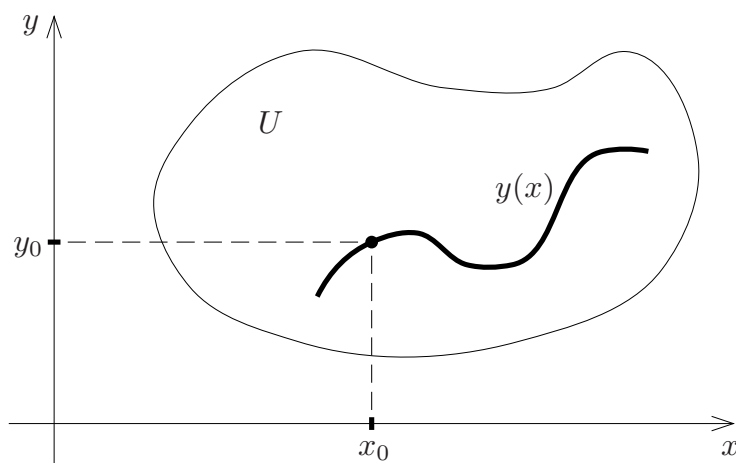
Problème de Cauchy. Étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

Interprétation physique. Dans de nombreuses situations concrètes, la variable t représente le temps et $y = (y_1, \dots, y_m)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (E) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres. Résoudre le problème de Cauchy revient à prévoir l'évolution du système au cours du temps, sachant qu'en $t = t_0$ le système est décrit par les paramètres $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,m})$. On dit que (t_0, y_0) sont les *données initiales* du problème de Cauchy.

1.2. Cas de la dimension un ($m = 1$)

Si on note $x = t$, l'équation (E) se réécrit

$$(E) \quad y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

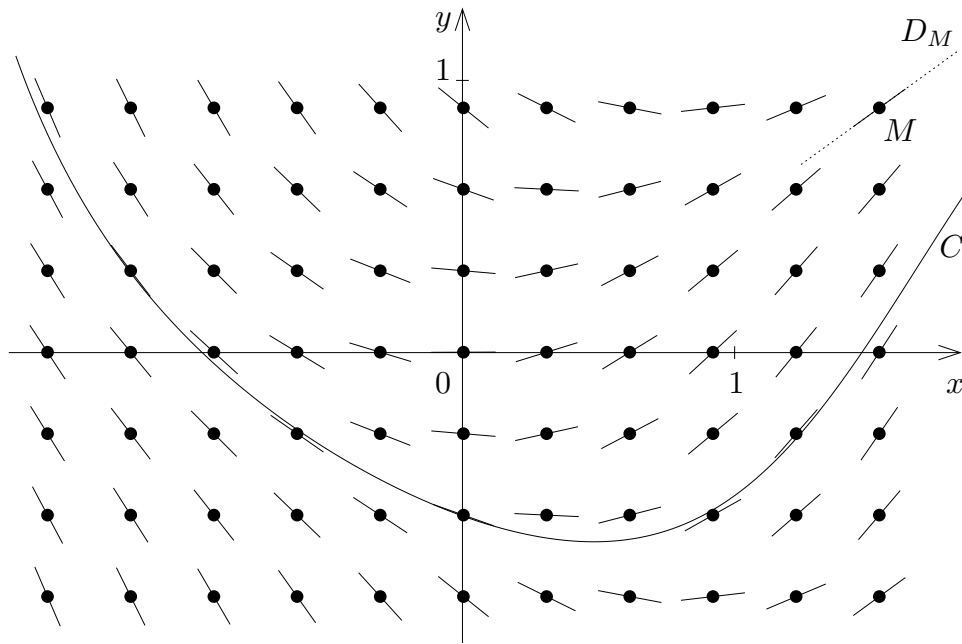


Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une « *courbe intégrale* » de (E) passant par un point donné $(x_0, y_0) \in U$.

Champ des tangentes. A tout point $M = (x_0, y_0)$, on associe la droite D_M passant par M et de coefficient directeur $f(x_0, y_0)$:

$$D_M : y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

L'application $M \rightarrow D_M$ est appelée *champ des tangentes* associé à l'équation (E). Une courbe intégrale de (E) est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite D_M du champ des tangentes. L'exemple ci-dessous correspond à l'équation $y' = f(x, y) = x - y^2$.



Lignes isoclines de (E). Par définition, ce sont les courbes

$$\Gamma_p : f(x, y) = p$$

correspondant à l'ensemble des points M où la droite D_M a une pente donnée p .

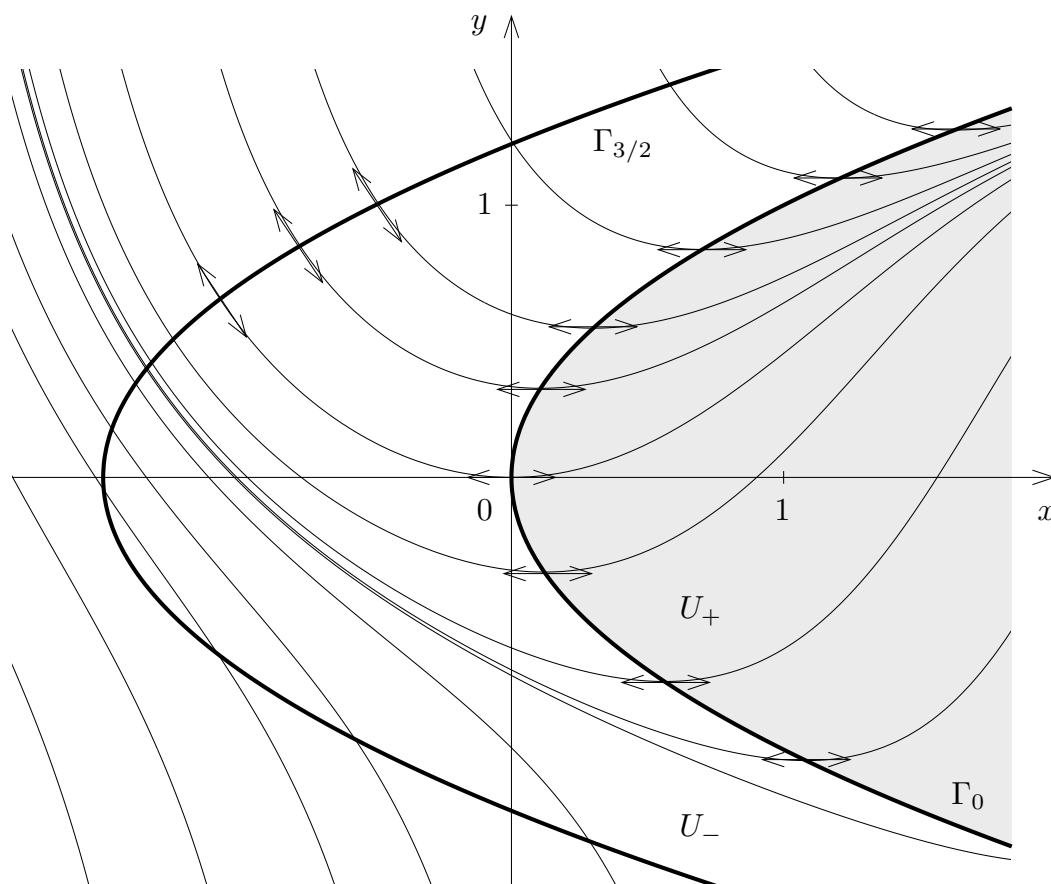
La courbe Γ_0 joue un rôle intéressant. On a en effet un régionnement de U :

$$U = U_+ \cup U_- \cup \Gamma_0 \quad \text{où}$$

$$U_+ = \{M \in U ; f(M) > 0\}, \quad U_- = \{M \in U ; f(M) < 0\}.$$

Les courbes intégrales sont croissantes dans U_+ , décroissantes dans U_- , stationnaires (souvent extrémales) sur Γ_0 .

Exemple. Les lignes isoclines de l'équation $y' = f(x, y) = x - y^2$ sont les paraboles $x = y^2 + p$.



1.3. Solutions maximales

Nous introduisons d’abord le concept de prolongement d’une solution. L’expression *solution maximale* est alors entendue implicitement au sens de la relation d’ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1. Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ des solutions de (E). On dit que \tilde{y} est un prolongement de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}|_I = y$.

Définition 2. On dit qu’une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est maximale si y n’admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $\tilde{I} \supsetneq I$.

Théorème. Toute solution y se prolonge en une solution maximale \tilde{y} (pas nécessairement unique).

Démonstration. * Supposons que y soit définie sur un intervalle $I =]a, b[$ (cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes a et b , incluses ou non dans I). Il suffira de montrer que y se prolonge en une solution $\tilde{y} :]a, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\tilde{b} \geq b$) maximale à droite,

c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger \tilde{y} au delà de \tilde{b} . Le même raisonnement s'appliquera à gauche.

Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs $y_{(1)}, y_{(2)} \dots$ de y avec $y_{(k)} : |a, b_k[\rightarrow \mathbb{R}^m$. On pose $y_{(1)} = y, b_1 = b$. Supposons $y_{(k-1)}$ déjà construite pour un indice $k \geq 1$. On pose alors

$$c_k = \sup\{c; y_{(k-1)} \text{ se prolonge sur } |a, c[\}.$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Par définition de la borne supérieure, il existe b_k tel que $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ et un prolongement $y_{(k)} : |a, b_k[\rightarrow \mathbb{R}^m$ de $y_{(k-1)}$ avec b_k arbitrairement voisin de c_k ; en particulier, on peut choisir

$$\begin{aligned} c_k - b_k &< \frac{1}{k} && \text{si } c_k < +\infty, \\ b_k &> k && \text{si } c_k = +\infty. \end{aligned}$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongements de $y_{(k-1)}$ contient l'ensemble des prolongements de $y_{(k)}$; au niveau des bornes supérieures on a donc $c_k \geq c_{k+1}$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \dots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \dots \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

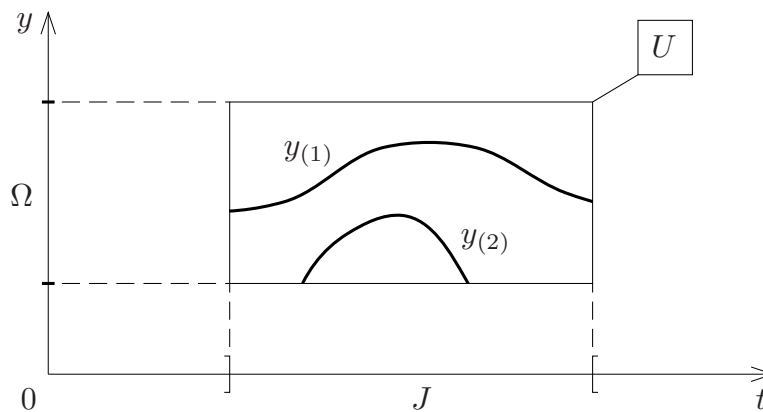
$$\tilde{b} = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k.$$

Soit $\tilde{y} : |a, \tilde{b}| \rightarrow \mathbb{R}^m$ le prolongement commun des solutions $y_{(k)}$, éventuellement prolongé au point \tilde{b} si cela est possible. Soit $z : |a, c| \rightarrow \mathbb{R}^m$ un prolongement de \tilde{y} . Alors z prolonge $y_{(k-1)}$ et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \tilde{c}$, ce qui montre que la solution \tilde{y} est maximale à droite. □

1.4. Solutions globales

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^m .

Définition. Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.



Attention. Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse !

Sur le schéma ci-dessus par exemple, $y_{(1)}$ est globale tandis que $y_{(2)}$ est maximale mais non globale.

Donnons un exemple explicite de cette situation.

Exemple. (E) $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cherchons les solutions $t \rightarrow y(t)$ de (E).

- On a d'une part la solution $y(t) = 0$.
- Si y ne s'annule pas, (E) s'écrit $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, \quad y(t) = -\frac{1}{t + C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $] -\infty, -C[$ et sur $] -C, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (E).

1.5. Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k .

Théorème. Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^k , toute solution de (E) $y' = f(t, y)$ est de classe C^{k+1} .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k .

- $k = 0$: f continue.

Par hypothèse $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable, donc continue.

Par conséquent $y'(t) = f(t, y(t))$ est continue, donc y est de classe C^1 .

- Si le résultat est vrai à l'ordre $k - 1$, alors y est au moins de classe C^k . Comme f est de classe C^k , il s'ensuit que y' est de classe C^k comme composée de fonctions de classe C^k , donc y est de classe C^{k+1} .

Calcul des dérivées successives d'une solution y . On suppose pour simplifier $m = 1$. En dérivant la relation $y'(x) = f(x, y(x))$ il vient

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x), \\ y'' &= f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y) = f^{[1]}(x, y) \end{aligned}$$

avec $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$. Notons de manière générale l'expression de la dérivée k -ième $y^{(k)}$ en fonction de x, y sous la forme

$$y^{(k)} = f^{[k-1]}(x, y) ;$$

d'après ce qui précède $f^{[0]} = f$, $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$. En dérivant une nouvelle fois, on trouve

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y) y' \\ &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y) f(x, y). \end{aligned}$$

On obtient donc les relations de récurrence

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= f^{[k]}(x, y) \\ f^{[k]} &= (f^{[k-1]})'_x + (f^{[k-1]})'_y f, \quad \text{avec } f^{[0]} = f. \end{aligned}$$

En particulier, le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales est contenu dans la courbe $f^{[1]}(x, y) = 0$.

2. Théorème d'existence des solutions

Dans tout ce paragraphe, on considère une équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

2.1. Équivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale

Le lemme très simple ci-dessous montre que la résolution de (E) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale :

Lemme. Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si

(i) y est continue et $(\forall t \in I) (t, y(t)) \in U$,

(ii) $(\forall t \in I) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$.

En effet si y vérifie (i) et (ii) alors y est différentiable et on a $y(t_0) = y_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$. Inversement, si ces deux relations sont satisfaites, (ii) s'en déduit par intégration. □

2.2. Cylindres de sécurité

Pour résoudre l'équation différentielle (E), on va plutôt chercher à construire des solutions de l'équation intégrale 2.1 (ii), et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point $(t_0, y_0) \in U$ ne peut s'éloigner « trop vite » de y_0 .

On note $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^m et $B(x, r)$ (resp. $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r dans \mathbb{R}^m . Comme U est supposé ouvert, il existe un *cylindre*

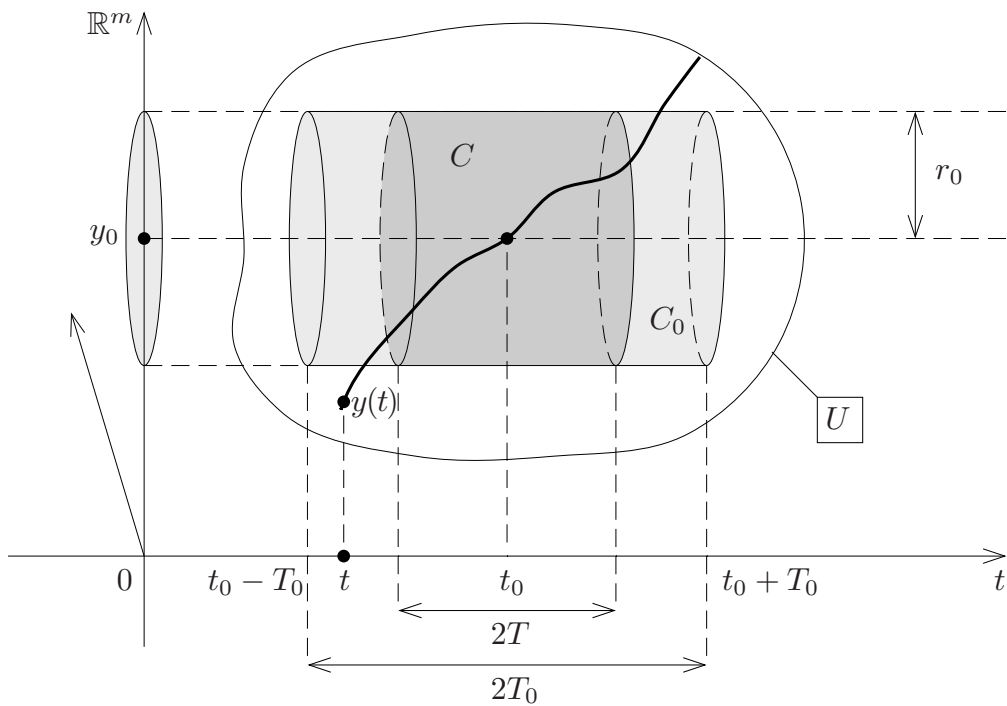
$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$$

de longueur $2T_0$ et de rayon r_0 assez petit, tel que $C_0 \subset U$. L'ensemble C_0 est fermé borné dans \mathbb{R}^{m+1} , donc compact. Ceci entraîne que f est bornée sur C_0 , c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t,y)\| < +\infty.$$

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi-longueur $T \leq T_0$.

Définition. On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.



Sur le schéma ci-dessus, C est un cylindre de sécurité mais C_0 n'en est pas un : la solution y « s'échappe » de C_0 avant le temps $t_0 + T_0$.

Supposons que la solution y s'échappe de C sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. Soit τ le premier instant où cela se produit :

$$\tau = \inf \{t \in [t_0, t_0 + T] ; \|y(t) - y_0\| > r_0\}.$$

Par définition de τ on a $\|y(t) - y_0\| \leq r$ pour $t \in [t_0, \tau[$, donc par continuité de y on obtient $\|y(\tau) - y_0\| = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C \subset C_0$ pour $t \in [t_0, \tau]$, il vient $\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq M$ et

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) du \right\| \leq M(\tau - t_0)$$

donc $\tau - t_0 \geq r_0/M$. Par conséquent si $T \leq r_0/M$, aucune solution ne peut s'échapper de C sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Corollaire. *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min \left(T_0, \frac{r_0}{M} \right).$$

Le choix $T = \min \left(T_0, \frac{r_0}{M} \right)$ convient par exemple.

Remarque. Si $C \subset C_0$ est un cylindre de sécurité, toute solution du problème de Cauchy $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifie $\|y'(t)\| \leq M$, donc y est lipschitzienne de rapport M .

2.3. Solutions approchées. Méthode d'Euler

On cherche à construire une solution approchée de (E) sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On se donne pour cela une subdivision

$$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T.$$

Les pas successifs sont notés

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

et on pose

$$h_{\max} = \max(h_0, \dots, h_{N-1}).$$

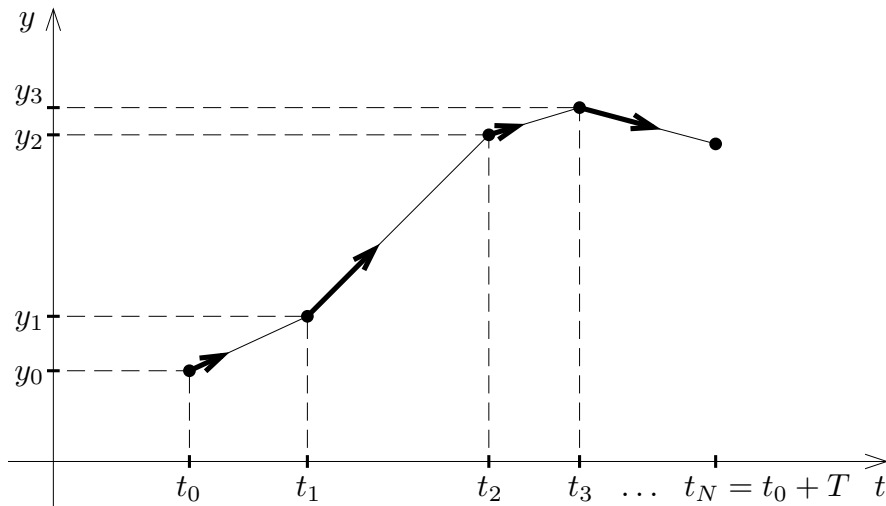
La méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) consiste à construire une solution approchée y affine par morceaux comme suit. Soit $y_n = y(t_n)$. On confond la courbe intégrale sur $[t_n, t_{n+1}]$ avec sa tangente au point (t_n, y_n) :

$$y(t) = y_n + (t - t_n)f(t_n, y_n), \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Partant de la donnée initiale y_0 , on calcule donc y_n par récurrence en posant

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

La solution approchée y s'obtient graphiquement en traçant pour chaque n les segments joignant les points $(t_n, y_n), (t_{n+1}, y_{n+1})$.



On construit de même une solution approchée sur $[t_0 - T, t_0]$ en prenant des pas $h_n < 0$.

Proposition 1. Si $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité tel que $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, toute solution approchée y donnée par la méthode d'Euler est contenue dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Démonstration. On vérifie par récurrence sur n que

$$\begin{cases} y([t_0, t_n]) \subset \overline{B}(y_0, r_0) \\ \|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_0) \quad \text{pour } t \in [t_0, t_n]. \end{cases}$$

C'est trivial pour $n = 0$. Si c'est vrai pour n , alors on a en particulier $(t_n, y_n) \in C$, donc $\|f(t_n, y_n)\| \leq M$, et par conséquent

$$\|y(t) - y_n\| = (t - t_n)\|f(t_n, y_n)\| \leq M(t - t_n)$$

pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Par hypothèse de récurrence

$$\|y_n - y_0\| = \|y(t_n) - y_0\| \leq M(t_n - t_0).$$

L'inégalité triangulaire entraîne alors $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0).$$

En particulier $\|y(t) - y_0\| \leq MT \leq r_0$, d'où

$$y([t_0, t_{n+1}]) \subset \overline{B}(y_0, r_0). \quad \square$$

Définition. Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 par morceaux (ceci signifie qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout n la restriction $y|_{[a_n, a_{n+1}]}$ soit de classe C^1 ; on suppose donc seulement la continuité

et l'existence d'une dérivée à droite et à gauche de y aux points a_n). On dit que y est une solution ε -approchée de (E) si

- (i) $(\forall t \in [a, b]) \quad (t, y(t)) \in U$;
- (ii) $(\forall n), (\forall t \in]a_n, a_{n+1}[) \quad \|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon$.

Autrement dit, y est une solution ε -approchée si y vérifie (E) avec une erreur $\leq \varepsilon$.

Majoration de l'erreur pour les solutions approchées d'Euler. Soit ω_f le module de continuité de f sur C , défini par

$$\omega_f(u) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\|; |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u\}$$

où $u \in [0, +\infty[$ et où les points $(t_1, y_1), (t_2, y_2)$ parcourent C . Comme C est compact, la fonction f est uniformément continue sur C , par conséquent

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \omega_f(u) = 0.$$

On suppose dans la suite que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité tel que $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$.

Proposition 2. Soit $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une solution approchée construite par la méthode d'Euler avec pas maximum h_{\max} . Alors l'erreur ε vérifie $\varepsilon \leq \omega_f((M + 1)h_{\max})$.

En particulier, l'erreur ε tend vers 0 quand h_{\max} tend vers 0.

Démonstration. Majorons par exemple $\|y'(t) - f(t, y(t))\|$ pour $t \in [t_0, t_0 + T]$, où y est la solution approchée associée à la subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$. Pour $t \in]t_n, t_{n+1}[$, on a $y'(t) = f(t_n, y_n)$ et

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_n\| &= (t - t_n)\|f(t_n, y_n)\| \leq Mh_n, \\ |t - t_n| &\leq h_n. \end{aligned}$$

Par définition de ω_f , il vient

$$\begin{aligned} \|f(t_n, y_n) - f(t, y(t))\| &\leq \omega_f(Mh_n + h_n), \\ \|y'(t) - f(t, y(t))\| &\leq \omega_f((M + 1)h_{\max}). \end{aligned} \quad \square$$

Montrons finalement un résultat sur la convergence des solutions approchées.

Proposition 3. Soit $y_{(p)} : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une suite de solutions ε_p -approchées contenues dans le cylindre de sécurité C , telles que $y_{(p)}(t_0) = y_0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon_p = 0$. On suppose que $y_{(p)}$ converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers

une fonction y . Alors y est une solution exacte du problème de Cauchy pour l'équation (E).

Démonstration. Comme $\|y'_{(p)}(t) - f(t, y_{(p)}(t))\| \leq \varepsilon_p$, il vient après intégration

$$\|y_{(p)}(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y_{(p)}(u)) du\| \leq \varepsilon_p |t - t_0|.$$

Si $\delta_p = \max_{[t_0-T, t_0+T]} \|y - y_{(p)}\|$, on voit que

$$\|f(u, y_{(p)}(u)) - f(u, y(u))\| \leq \omega_f(\delta_p)$$

tend vers 0, d'où, grâce à la convergence uniforme :

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du = 0, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Comme la limite uniforme y est continue, le lemme du début du § 2 entraîne que y est une solution exacte de (E).

2.4. Théorème d'Ascoli

Il s'agit d'un résultat préliminaire de nature topologique que nous allons formuler dans le cadre général des espaces métriques. Si (E, δ) et (F, δ') sont des espaces métriques, rappelons que par définition une suite d'applications $\varphi_{(p)} : E \rightarrow F$ converge uniformément vers $\varphi : E \rightarrow F$ si la distance uniforme

$$d(\varphi_{(p)}, \varphi) = \sup_{x \in E} \delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi(x))$$

tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Théorème (Ascoli). *On suppose que E, F sont des espaces métriques compacts. Soit $\varphi_{(p)} : E \rightarrow F$ une suite d'applications k -lipschitziennes, où $k \geq 0$ est une constante donnée. Alors on peut extraire de $\varphi_{(p)}$ une sous-suite $\varphi_{(p_n)}$ uniformément convergente, et la limite est une application k -lipschitzienne.*

Soit $\text{Lip}_k(E, F)$ l'ensemble des applications $E \rightarrow F$ lipschitziennes de rapport k . Une autre manière d'exprimer le théorème d'Ascoli est la suivante.

Corollaire. *Si E, F sont compacts, alors $(\text{Lip}_k(E, F), d)$ est un espace métrique compact.*

Démonstration. On construit par récurrence des parties infinies

$$S_0 = \mathbb{N} \supset S_1 \supset \dots \supset S_{n-1} \supset S_n \supset \dots$$

telles que la sous-suite $(\varphi_{(p)})_{p \in S_n}$ ait des oscillations de plus en plus faibles.

Supposons S_{n-1} construite, $n \geq 1$. Comme E, F sont compacts, il existe des recouvrements finis de E (resp. de F) par des boules ouvertes $(B_i)_{i \in I}$, resp. $(B'_j)_{j \in J}$, de rayon $\frac{1}{n}$. Notons $I = \{1, 2, \dots, N\}$ et x_i le centre de B_i . Soit p un indice fixé. Pour tout $i = 1, \dots, N$ il existe un indice $j = j(p, i)$ tel que $\varphi_{(p)}(x_i) \in B'_{j(p,i)}$.

On considère l'application

$$S_{n-1} \longrightarrow J^N, \quad p \longmapsto (j(p, 1), \dots, j(p, N)).$$

Comme S_{n-1} est infini et que J^N est fini, l'un des éléments $(l_1, \dots, l_N) \in J^N$ admet pour image réciproque une partie infinie de S_{n-1} : on note S_n cette partie. Ceci signifie que pour tout $p \in S_n$ on a $(j(p, 1), \dots, j(p, N)) = (l_1, \dots, l_N)$ et donc $\varphi_{(p)}(x_i) \in B'_{l_i}$. En particulier

$$(\forall p, q \in S_n) \quad \delta'(\varphi_{(p)}(x_i), \varphi_{(q)}(x_i)) \leq \text{diam } B'_{l_i} \leq \frac{2}{n}.$$

Soit $x \in E$ un point quelconque. Il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$, d'où $\delta(x, x_i) < \frac{1}{n}$. L'hypothèse que les $\varphi_{(p)}$ sont k -lipschitziennes entraîne

$$\delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi_{(p)}(x_i)) < \frac{k}{n}, \quad \delta'(\varphi_{(q)}(x), \varphi_{(q)}(x_i)) < \frac{k}{n}.$$

L'inégalité triangulaire implique alors $(\forall p, q \in S_n)$

$$\delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi_{(q)}(x)) \leq \frac{2}{n} + 2 \frac{k}{n} = \frac{2k + 2}{n}.$$

Désignons par p_n le n -ième élément de S_n . Pour $N \geq n$ on a $p_N \in S_N \subset S_n$, donc

$$\delta'(\varphi_{(p_n)}(x), \varphi_{(p_N)}(x)) \leq \frac{2k + 2}{n}. \tag{*}$$

Ceci entraîne que $\varphi_{(p_n)}(x)$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $x \in E$. Comme F est compact, F est aussi complet, donc $\varphi_{(p_n)}(x)$ converge vers une limite $\varphi(x)$. Quand $N \rightarrow +\infty$, (*) implique à la limite $d(\varphi_{(p_n)}, \varphi) \leq \frac{2k+2}{n}$. On voit donc que $\varphi_{(p_n)}$ converge uniformément vers φ . Il est facile de voir que $\varphi \in \text{Lip}_k(E, F)$. □

Exercice. On pose $E = [0, \pi]$, $F = [-1, 1]$, $\varphi_p(x) = \cos px$. Calculer

$$\int_0^\pi (\varphi_p(x) - \varphi_q(x))^2 dx$$

et en déduire que $d(\varphi_p, \varphi_q) \geq 1$ si $p \neq q$. L'espace

$$\text{Lip}(E, F) = \bigcup_{k \geq 0} \text{Lip}_k(E, F)$$

est-il compact ?

2.5. Théorème d'existence (Cauchy-Peano-Arzela)

L'idée est d'utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer l'existence d'une sous-suite uniformément convergente de solutions approchées. On obtient ainsi le

Théorème. Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ avec $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ un cylindre de sécurité pour l'équation (E) : $y' = f(t, y)$. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \overline{B}(y_0, r_0)$ de (E) avec condition initiale $y'(t_0) = y_0$.

Démonstration. Soit $y_{(p)}$ la solution approchée donnée par la méthode d'Euler en utilisant la subdivision avec pas constant $h = T/p$ des intervalles $[t_0, t_0 + T]$ et $[t_0 - T, t_0]$. Cette solution est ε_p -approchée avec erreur $\varepsilon_p \leq \omega_f((M+1)T/p)$ tendant vers 0. Chaque application $y_{(p)} : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \overline{B}(y_0, r_0)$ est lipschitzienne de rapport M , donc d'après le théorème d'Ascoli on peut extraire de $(y_{(p)})$ une sous-suite $(y_{(p_n)})$ convergeant uniformément vers une limite y . D'après la proposition 3 du § 2.3, y est une solution exacte de l'équation (E). \square

Corollaire. Par tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe au moins une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (E). De plus, l'intervalle de définition I de toute solution maximale est ouvert (mais en général, il n'y a pas unicité de ces solutions maximales).

On vient de voir en effet qu'il existe une solution locale z définie sur un intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$. D'après le théorème du § 1.3, z se prolonge en une solution maximale $y = \tilde{z} :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$. Si y était définie au point b , il existerait une solution $y_{(1)} : [b - \varepsilon, b + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy avec donnée initiale $(b, y(b)) \in U$. La fonction $\tilde{y} :]a, b + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^m$ coïncidant avec y sur $]a, b[$ et avec $y_{(1)}$ sur $[b, b + \varepsilon[$ serait alors un prolongement strict de y , ce qui est absurde. \square

Exemple. Pour donner un exemple de non unicité, il suffit de considérer l'équation $y' = 3|y|^{2/3}$. Le problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = 0$ admet alors au moins 2 solutions maximales :

$$y_{(1)}(t) = 0, \quad y_{(2)}(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.6. Critère de maximalité des solutions

Nous allons voir ici une condition géométrique nécessaire et suffisante permettant d'affirmer qu'une solution est maximale.

Théorème. U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $y : I = [t_0, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ une solution de l'équation (E) $y' = f(t, y)$, où f est une fonction continue sur U . Alors $y(t)$ peut se prolonger au delà de b si et seulement si il existe un compact $K \subset U$ tel que la courbe $t \mapsto (t, y(t))$, $t \in [t_0, b[$, reste contenue dans K .

Autrement dit, y est non prolongeable au delà du temps b si et seulement si $(t, y(t))$ s'échappe de tout compact K de U quand $t \rightarrow b_-$. La conséquence suivante est immédiate.

Critère de maximalité. Une solution $y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ de (E) est maximale si et seulement si $t \mapsto (t, y(t))$ s'échappe de tout compact K de U quand $t \rightarrow a_+$ ou quand $t \rightarrow b_-$. Puisque les compacts sont les parties fermées bornées, ceci signifie encore que $(t, y(t))$ s'approche du bord de U ou tend vers ∞ , c'est-à-dire $|t| + \|y(t)\| + 1/d((t, y(t)), \partial U) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow a_+$ ou $t \rightarrow b_-$.

Démonstration du théorème. La condition de prolongement est évidemment nécessaire, puisque si $y(t)$ se prolonge à $[t_0, b]$, alors l'image du compact $[t_0, b]$ par l'application continue $t \mapsto (t, y(t))$ est un compact $K \subset U$.

Inversement, supposons qu'il existe un compact K de U tel que $(t, y(t)) \in K$ pour tout $t \in [t_0, b]$. Posons

$$M = \sup_{(t,y) \in K} \|f(t, y)\| < +\infty$$

qui est fini par continuité de $\|f\|$ et compacité de K . Ceci entraîne que $t \mapsto y(t)$ est lipschitzienne sur $[t_0, b]$, donc uniformément continue, et le critère de Cauchy montre que la limite $\ell = \lim_{t \rightarrow b_-} y(t)$ existe. Nous pouvons prolonger y par continuité en b en posant $y(b) = \ell$, et nous avons $(b, y(b)) \in K \subset U$ puisque K est fermé. La relation $y'(t) = f(t, y(t))$ montre alors que y est de classe C^1 sur $[t_0, b]$. Maintenant, le théorème d'existence locale des solutions implique qu'il existe une solution locale z d problème de Cauchy de donnée initiale $z(b) = \ell = y(b)$ sur un intervalle $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$. On obtient alors un prolongement \tilde{y} de y sur $[t_0, b + \varepsilon]$ en posant $\tilde{y}(t) = z(t)$ pour $t \in [b, b + \varepsilon]$. Le théorème est démontré. \square

3. Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Reprenons les notations du début du § 2. On suppose ici en outre que f est localement lipschitzienne en y : cela signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k -lipschitzienne en y sur C_0 :

$$\left(\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0 \right) \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Remarque. Pour que f soit localement lipschitzienne en y sur U , il suffit que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $1 \leq i, j \leq m$, continues sur U . Soit en effet

$$A = \max_{1 \leq i, j \leq m} \sup_{(t,y) \in C_0} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y) \right|.$$

Le nombre A est fini puisque C_0 est compact. Le théorème des accroissement finis appliqués à f_i sur C_0 donne

$$f_i(t, y_1) - f_i(t, y_2) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \xi)(y_{1,j} - y_{2,j})$$

avec $\xi \in]y_1, y_2[$. On a donc

$$\max_i |f_i(t, y_1) - f_i(t, y_2)| \leq mA \cdot \max_j |y_{1,j} - y_{2,j}|. \quad \square$$

Sous ces hypothèses sur f , nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy est nécessairement unique, et que de plus toute suite de solutions ε -approchées avec ε tendant vers 0 converge nécessairement vers la solution exacte. Compte tenu de l'importance de ces résultats, nous donnerons ensuite une deuxième démonstration assez différente basée sur le théorème du point fixe (chapitre IV, § 1.1).

3.1. Lemme de Gronwall. Convergence et unicité locales

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$ un cylindre sur lequel f est k -lipschitzienne en y et soit $M = \sup_{C_0} \|f\|$. On se donne $\varepsilon > 0$ et on considère des solutions $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ respectivement ε_1 -approchée et ε_2 -approchée du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, y_0) , avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon$.

On a alors $\|y'_{(i)}(t)\| \leq M + \varepsilon$, et un raisonnement analogue à celui du § 2.1 montre que les graphes de $y_{(1)}, y_{(2)}$ restent contenus dans le cylindre

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y, r_0) \subset C_0$$

dès que $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M+\varepsilon}\right)$, ce qu'on suppose désormais.

Lemme de Gronwall. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Démonstration. Quitte à changer l'origine du temps on peut supposer $t_0 = 0$ et, par exemple, $t \in [0, T]$. Posons alors

$$v(t) = \int_0^t \|y_{(2)}(u) - y_{(1)}(u)\| du.$$

Comme $y_{(i)}$ satisfait l'équation différentielle à ε_i près, on obtient par soustraction

$$\begin{aligned} \|y'_{(2)}(t) - y'_{(1)}(t)\| &\leq \|f(t, y_{(2)}(t)) - f(t, y_{(1)}(t))\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\leq k\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse que f est k -lipschitzienne en y . De plus

$$y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t) = \int_0^t (y'_{(2)}(u) - y'_{(1)}(u)) du$$

puisque $y_{(2)}(0) = y_{(1)}(0) = y_0$. On en déduit

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq k \int_0^t \|y_{(2)}(u) - y_{(1)}(u)\| du + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t \quad (*)$$

c'est-à-dire

$$v'(t) \leq kv(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Après soustraction de $kv(t)$ et multiplication par e^{-kt} , on trouve

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} = \frac{d}{dt}(v(t)e^{-kt}) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)te^{-kt}.$$

Grâce à une nouvelle intégration (noter que $v(0) = 0$), il vient

$$v(t)e^{-kt} \leq \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ue^{-ku} du = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{1 - (1 + kt)e^{-kt}}{k^2},$$

$$v(t) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{kt} - (1 + kt)}{k^2},$$

tandis que la première inégalité intégrée (*) donne

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq kv(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{kt} - 1}{k}.$$

Le cas où $t \in [-T, 0]$ s'obtient par un changement de variable $t \mapsto -t$. □

Théorème (Cauchy-Lipschitz). *Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y , alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow U$. De plus, toute suite $y_{(p)}$ de solutions ε_p -approchées avec ε_p tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Existence. Soit $y_{(p)}$ une suite quelconque de solutions ε_p approchées avec $\lim \varepsilon_p = 0$, par exemple celles fournies par la méthode d'Euler. Le lemme de Gronwall montre que

$$d(y_{(p)}, y_{(q)}) \leq (\varepsilon_p + \varepsilon_q) \frac{e^{kT} - 1}{k} \quad \text{sur } [t_0 - T, t_0 + T],$$

par conséquent $y_{(p)}$ est une suite de Cauchy uniforme. Comme les fonctions $y_{(p)}$ sont toutes à valeurs dans $\overline{B}(y_0, r_0)$ qui est un espace complet, $y_{(p)}$ converge vers une limite y . Cette limite y est une solution exacte de l'équation (E) d'après la proposition 3 du § 2.3.

Unicité. Si $y_{(1)}, y_{(2)}$ sont deux solutions exactes, le lemme de Gronwall avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ montre que $y_{(1)} = y_{(2)}$. □

3.2.* Autre démonstration (par le théorème du point fixe)

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ avec $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ un cylindre de sécurité pour (E).

Notons $\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ l'ensemble des applications continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$, muni de la distance d de la convergence uniforme.

A toute fonction $y \in \mathcal{F}$, associons la fonction $\phi(y)$ définie par

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

D'après le lemme du § 2.1, y est une solution de (E) si et seulement si y est un point fixe de ϕ . On va donc essayer d'appliquer le théorème du point fixe. Observons que

$$\|\phi(y)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right\| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r_0,$$

donc $\phi(y) \in \mathcal{F}$. L'opérateur ϕ envoie donc \mathcal{F} dans \mathcal{F} . Soient maintenant $y, z \in F$ et $y_{(p)} = \phi^p(y)$, $z_{(p)} = \phi^p(z)$. On a

$$\begin{aligned} \|y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(u, y(u)) - f(u, z(u))) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \|y(u) - z(u)\| du \right| \leq k|t - t_0| d(y, z). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \|y_{(2)}(t) - z_{(2)}(t)\| &\leq \left| \int_0^t k \|y_1(u) - z_1(u)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \cdot k |u - t_0| d(y, z) du \right| = k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} d(y, z). \end{aligned}$$

Par récurrence sur p , on vérifie aussitôt que

$$\|y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z),$$

en particulier

$$d(\phi^p(y), \phi^p(z)) = d(y_{(p)}, z_{(p)}) \leq \frac{k^p T^p}{p!} d(y, z) \quad (*)$$

et ϕ^p est lipschitzienne de rapport $\frac{k^p T^p}{p!}$ sur \mathcal{F} . Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{k^p T^p}{p!} = 0$, il existe p assez grand tel que $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$; pour une telle valeur de p , ϕ^p est une application contractante de \mathcal{F} dans \mathcal{F} . Par ailleurs, \mathcal{F} est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe démontré au chapitre IV (dans sa version généralisée au cas d'applications dont une itérée est contractante) montre alors que ϕ admet un point fixe unique y . Nous avons donc bien redémontré le théorème de Cauchy-Lipschitz affirmant l'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. \square

Remarque. D'après (*), on voit que pour toute fonction $z \in \mathcal{F}$ la suite itérée $z_{(p)} = \phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte y du problème de Cauchy.

3.3. Unicité globale

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale, au moyen d'un « raisonnement de connexité ».

Théorème. Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzienne en y . Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I , alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I .

Démonstration. Supposons $y_{(1)}(t_0) = y_{(2)}(t_0)$ en un point $t_0 \in I$. Montrons par exemple que $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \geq t_0$. S'il n'en est pas ainsi, considérons le premier instant \tilde{t}_0 où $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ bifurquent :

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \in I; t \geq t_0 \text{ et } y_{(1)}(t) \neq y_{(2)}(t)\}$$

On a par définition $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \in [t_0, \tilde{t}_0[$ et par continuité il s'ensuit que $y_{(1)}(\tilde{t}_0) = y_{(2)}(\tilde{t}_0)$. Soit \tilde{y}_0 ce point et soit $\tilde{C} = [\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}] \times \overline{B}(\tilde{y}_0, \tilde{r}_0)$ un cylindre de sécurité de centre $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$. Le théorème d'unicité locale implique que $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur $[\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}]$, ce qui contredit la définition de \tilde{t}_0 . L'unicité est démontrée. \square

Corollaire. Si f est localement lipschitzienne en y sur U , pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il passe une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et une seule.

Interprétation géométrique. Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

Exemple. $y' = 3|y|^{2/3}$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

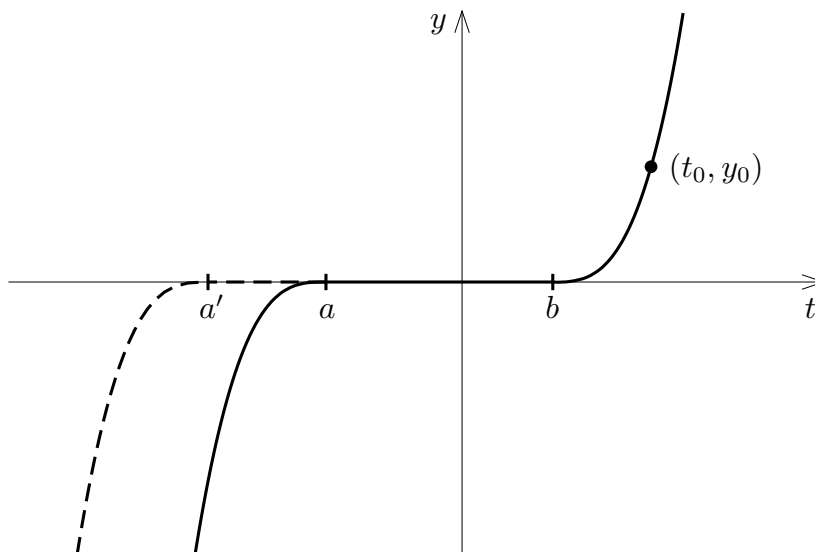
Déterminons l'ensemble des solutions maximales. On a ici $f(t, y) = 3|y|^{2/3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \text{signe}(y) \times 2|y|^{-1/3}$ pour $y \neq 0$. La dérivée $y \neq 0$ la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur les demi-plans $y > 0$ et $y < 0$, mais discontinue en $y = 0$. La fonction f est localement lipschitzienne en y sur $\{y > 0\}$ et $\{y < 0\}$, mais il est facile de voir qu'elle ne l'est pas au voisinage de tout point $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ (on a vu d'ailleurs qu'il n'y a pas d'unicité locale en ces points). Sur $\{y > 0\}$ (resp. sur $\{y < 0\}$) l'équation équivaut à

$$\frac{1}{3} y' y^{-2/3} = 1 \quad (\text{resp.} \quad -\frac{1}{3} y' (-y)^{-2/3} = -1)$$

d'où $y^{1/3} = t + C_1$ (resp. $(-y)^{-1/3} = -(t + C_2)$) soit $y(t) = (t + C_i)^3$. Si y est une solution maximale dans $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors $y' \geq 0$, donc y est croissante. Notons

$$a = \inf\{t, y(t) = 0\}, \quad b = \sup\{t; y(t) = 0\}.$$

Si $a \neq -\infty$, on a $y(a) = 0$ et $y(t) < 0$ pour $t < a$, donc $y(t) = (t - a)^3$. De même $y(t) = (t - b)^3$ pour $t > b$ si $b \neq +\infty$.



On voit que pour tout point (t_0, y_0) il passe une infinité de solutions maximales : si $y_0 > 0$, $b = t_0 - y_0^{1/3}$ est imposé, mais le choix de $a \in [-\infty, b]$ est arbitraire. Noter que ce phénomène se produit bien qu'on ait unicité locale au point (t_0, y_0) !

3.4. Conditions suffisantes d'existence de solutions globales

Nous donnons ici des conditions suffisantes d'existence pour les solutions globales, reposant sur des hypothèses de croissance de $f(t, y)$ lorsque $\|y\|$ tend vers $+\infty$. On peut cependant obtenir des conditions suffisantes nettement plus faibles (voir l'exercice (b) ci-dessous, ainsi que le problème 5.9).

Théorème. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times \mathbb{R}^m$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On fait l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

- (1) Il existe une fonction continue $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur \mathbb{R}^m .
- (2) Il existe des fonctions $c, k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues telles que l'application $y \mapsto f(t, y)$ satisfasse une croissance linéaire à l'infini du type

$$\|f(t, y)\| \leq c(t) + k(t)\|y\|.$$

Alors toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est globale (c'est-à-dire définie sur J tout entier).

Démonstration. Il est évident que l'hypothèse (1) entraîne l'hypothèse (2) (avec $c(t) = \|f(t, 0)\|$), il suffirait donc de donner la preuve pour (2). Cependant, il y a une démonstration sensiblement plus simple sous l'hypothèse (1).

Démonstration sous l'hypothèse (1). Soit $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^m$, et $[t_0 - T, t_0 + T]$ un intervalle compact quelconque contenu dans J . Reprenons la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Comme $U = J \times \mathbb{R}^m$, on peut choisir un cylindre de sécurité de rayon $r_0 = +\infty$. L'application ϕ définie au § 3.2 opère donc sur l'espace complet

$$\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T'], \mathbb{R}^m).$$

Soit

$$K = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T']} k(t).$$

L'application f est par hypothèse K -lipschitzienne en y sur $[t_0 - T, t_0 + T'] \times \mathbb{R}^m$. D'après le raisonnement du § 3.2, l'application ϕ^p est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{p!} K^p (\max(T, T'))^p$ sur \mathcal{F} , donc contractante pour p assez grand. Ceci implique que la solution (unique) du problème de Cauchy est définie sur tout intervalle $[t_0 - T, t_0 + T'] \subset J$. □

Démonstration sous l'hypothèse (2). L'idée est d'utiliser le critère de maximalité des solutions démontré au 2.6. Supposons qu'on ait une solution $y : [t_0, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $t_0, b \in J$ (autrement dit, telle que b ne soit pas la borne supérieure de J). Posons $C = \sup_{t \in [t_0, b]} c(t)$ et $K = \sup_{t \in [t_0, b]} k(t)$. Nous obtenons

$$\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq C + K\|y(t)\|.$$

On utilise alors un raisonnement de type lemme de Gronwall pour majorer la norme $\|y(t)\|$. Nous avons $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(u) du$, donc

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq v(t) = \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|y'(u)\| du \quad \text{avec} \\ v'(t) = \|y'(t)\| &\leq C + K\|y(t)\| \leq C + Kv(t). \end{aligned}$$

Ceci donne la majoration

$$\frac{d}{dt} (v(t)e^{-K(t-t_0)}) = (v'(t) - Kv(t))e^{-K(t-t_0)} \leq Ce^{-K(t-t_0)}.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on obtient

$$v(t)e^{-K(t-t_0)} - v(t_0) \leq \frac{C}{K}(1 - e^{-K(t-t_0)}),$$

et comme $v(t_0) = \|y(t_0)\|$, il vient

$$\sup_{t \in [t_0, b[} \|y(t)\| \leq \sup_{t \in [t_0, b[} v(t) \leq R = \frac{C}{K}(e^{K(b-t_0)} - 1) + \|y(t_0)\|e^{K(b-t_0)}.$$

Par conséquent $(t, y(t))$ décrit une partie compacte $K = [t_0, b] \times \overline{B}(0, R)$ dans $U = J \times \mathbb{R}^m$, et y ne peut être une solution maximale. Toute solution maximale est donc globale. [Le lecteur pourra étudier l'exercice 5.9 pour une généralisation à une hypothèse de croissance plus faible que (2), tenant compte uniquement de la « direction radiale » du vecteur $f(t, y)$]. □

Exercices.

- (a) Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, est globale.
- (b) On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(y) = e$ si $y \leq e$ et $f(y) = y \ln y$ si $y \geq e$. Montrer que f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0. Déterminer explicitement les solutions maximales de l'équation $y' = f(y)$. Les conditions suffisantes du théorème précédent sont-elles nécessaires ?

4. Équations différentielles d'ordre supérieur à un

4.1. Définitions

Un système différentiel d'ordre p dans \mathbb{R}^m est une équation de la forme

$$(E) \quad y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$.

Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une application $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ p -fois dérivable, telle que

- (i) $(\forall t \in I) \quad (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \in U,$
- (ii) $(\forall t \in I) \quad y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)).$

Le résultat suivant se démontre par récurrence d'une manière entièrement analogue à celle utilisée pour les équations différentielles d'ordre 1. Le détail de l'argument est laissé au lecteur.

Régularité des solutions. Si f est de classe C^k , les solutions y sont de classe C^{k+p} .

4.2. Système différentiel d'ordre un associé

Il est clair que le système (E) est équivalent au système différentiel d'ordre 1

$$(E_1) \quad \begin{cases} \frac{dY_0}{dt} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \dots \\ \frac{dY_{p-2}}{dt} = Y_{p-1} \\ \frac{dY_{p-1}}{dt} = f(t, Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \end{cases}$$

si l'on pose $Y_0 = y, Y_1 = y', \dots$. Le système (E₁) peut encore s'écrire

$$(E_1) \quad Y' = F(T, Y)$$

avec

$$\begin{aligned} Y &= (Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^m)^p \\ F &= (F_0, F_1, \dots, F_{p-1}) : U \rightarrow (\mathbb{R}^m)^p \\ F_0(t, Y) &= Y_1, \dots, F_{p-2}(t, Y) = Y_{p-1}, \\ F_{p-1}(t, Y) &= f(t, Y). \end{aligned}$$

Tout système différentiel (E) d'ordre p dans \mathbb{R}^m est donc équivalent à un système différentiel (E₁) d'ordre 1 dans $(\mathbb{R}^m)^p$. Il en résulte que les théorèmes d'existence et d'unicité démontrés pour les systèmes d'ordre 1 sont encore vrais pour les systèmes d'ordre p , avec des preuves qui sont des transpositions directes du cas d'ordre 1. En voici les principaux énoncés :

4.3. Théorème d'existence

Théorème de Cauchy-Peano-Arzela. *Pour tout point $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \in U$ le problème de Cauchy de conditions initiales*

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$$

admet au moins une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, définie sur un intervalle ouvert.

Remarque très importante. On voit ainsi que pour un système d'ordre p , la condition initiale requiert non seulement la donnée de la valeur y_0 de y au temps t_0 , mais également la donnée de ses $(p - 1)$ premières dérivées.

4.4. Théorème d'existence et d'unicité

Théorème de Cauchy-Lipschitz. *Si de plus f est localement lipschitzienne en (y_0, \dots, y_{p-1}) sur U , c'est-à-dire si $\forall (t_0, y_0, \dots, y_{p-1}) \in U$ il existe un voisinage $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \times \dots \times \overline{B}(y_{p-1}, r_{p-1})$ contenu dans U sur lequel*

$$\|f(t, z_0, \dots, z_{p-1}) - f(t, w_0, \dots, w_{p-1})\| \leq k(\|z_0 - w_0\| + \dots + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors le problème de Cauchy 4.3 admet une solution maximale et une seule.

4.5. Solutions globales

Théorème. *Si $U = J \times (\mathbb{R}^m)^p$ et s'il existe une fonction $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $(\forall t \in J)$*

$$\|f(t, z_0, \dots, z_{p-1}) - f(t, w_0, \dots, w_{p-1})\| \leq k(t)(\|z_0 - w_0\| + \dots + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors les solutions maximales sont définies sur J tout entier.

5. Problèmes

5.1. On considère l'équation différentielle $y' = y^2 - x$.

(a) Quelles sont les lignes isoclines ?

On notera I_0 l'isocline correspondant à la pente nulle.

Soit \mathcal{P}^- l'ensemble des points du plan où la pente des solutions est strictement négative. Décrire \mathcal{P}^- . Montrer que si une solution entre dans \mathcal{P}^- , alors elle y reste (c'est-à-dire : si une solution $y(x)$ a un point $(x_0, y(x_0))$ dans \mathcal{P}^- , alors si $x_1 > x_0$, $(x_1, y(x_1)) \in \mathcal{P}^-$).

- (b) Étudier et tracer le graphe de la courbe \mathcal{J} ensemble des points d'inflexion des solutions de l'équation différentielle. Quelles sont les régions du plan où $y'' > 0$, respectivement $y'' < 0$?

On notera \mathcal{J}_1 la partie de \mathcal{J} extérieure à \mathcal{P}^- , et \mathcal{J}_2 la partie de \mathcal{J} qui se trouve dans \mathcal{P}^- .

- (c) Soit \mathcal{C} une courbe solution rencontrant \mathcal{J}_1 en un point (x, y) .

(α) Montrer qu'en ce point, la pente de \mathcal{J}_1 est strictement inférieure à la pente de \mathcal{C} .

(β) En déduire que \mathcal{C} ne coupe \mathcal{J}_1 qu'en ce point, que \mathcal{C} ne rencontre pas \mathcal{P}^- , et que \mathcal{C} n'a qu'un point d'inflexion.

(γ) Montrer que \mathcal{C} possède 2 branches infinies à direction asymptotique verticale.

(δ) Soit (x_0, y_0) un point de \mathcal{C} . Comparer en ce point, la pente de \mathcal{C} et la pente de la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2}{2}$. En déduire que les branches infinies de \mathcal{C} correspondent à des asymptotes verticales.

- (d) Soit \mathcal{D} une courbe solution rencontrant I_0 .

(α) Montrer que \mathcal{D} possède une asymptote verticale.

(β) Montrer que \mathcal{D} a un point d'inflexion et un seul.

(γ) Montrer que lorsque $x \rightarrow \infty$, \mathcal{D} est asymptote à I_0 .

- (e) Soit A (resp. B) l'ensemble des points de l'axe Oy par où passe une courbe solution qui rencontre \mathcal{J}_1 (resp. \mathcal{J}_0).

(α) Montrer qu'il existe a tel que $A = \{0\} \times]a, +\infty[$.

(β) Montrer qu'il existe b tel que $B = \{0\} \times]-\infty, b[$.

(γ) Montrer que $a = b$. Quelle est l'allure de la solution passant par le point de coordonnées $(0, a)$?

5.2. On considère l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, où f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues. Soit α une fonction réelle définie sur un intervalle $[t_0, t_1[$ où t_1 peut éventuellement être infini ; on suppose α continue et dérivable par morceaux.

On dit que α est une barrière inférieure [respectivement : supérieure] pour l'équation différentielle si $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ [resp : $\alpha'(t) > f(t, \alpha(t))$] pour tout t tel que $\alpha'(t)$

existe, et, aux points où α n'est pas dérivable, pour la dérivée à gauche et pour la dérivée à droite.

(a) Montrer que si α est une barrière inférieure pour $t_0 \leq t \leq t_1$ et si u est une solution de l'équation différentielle vérifiant $\alpha(t_0) \leq u(t_0)$, alors $\alpha(t) < u(t)$ pour tout $t \in]t_0, t_1[$. Montrer un résultat analogue pour une barrière supérieure.

(b) On suppose que α est une barrière inférieure sur $[t_0, t_1[$, que β est une barrière supérieure sur $[t_0, t_1[$, et que $\alpha(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_1[$. L'ensemble des points (t, x) tels que $t_0 \leq t \leq t_1$ et $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$ est appelé entonnoir.

(α) Montrer que si une solution u de l'équation différentielle est telle que $(s, u(s))$ soit dans l'entonnoir pour un $s \in [t_0, t_1[$, alors $(t, u(t))$ est dans l'entonnoir pour tout $t \in [s, t_1[$.

(β) Si α est une barrière inférieure et β une barrière supérieure, et si $\alpha(t) > \beta(t)$ pour $t \in [t_0, t_1[$, on dit que l'ensemble des (t, x) tels que $t_0 \leq t \leq t_1$ et $\alpha(t) \geq x \geq \beta(t)$ est un anti-entonnoir.

Montrer qu'il existe une solution $u(t)$ de l'équation différentielle, telle que $\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_1[$.

(c) Dans la suite du problème, on prend $f(t, y) = \sin(ty)$. On se restreindra aux solutions vérifiant $y > 0$.

(α) Déterminer les isoclines correspondant aux pentes $-1, 0, 1$.

(β) Pour quelles valeurs de t ces isoclines sont-elles des barrières inférieures ? supérieures ? Quels sont les entonnoirs formés par ces isoclines ?

(γ) Soit u une solution de l'équation différentielle ; soit γ la fonction continue, dérivable par morceaux, définie pour $t \geq 0$ par : $\gamma(0) = u(0) > 0$; γ est affine de pente 1 depuis $t = 0$ jusqu'à ce que son graphe rencontre la première isocline de pente 0, puis γ est affine de pente 0 jusqu'à l'isocline de pente 0 suivante, puis γ est affine de pente 1 jusqu'à l'isocline de pente 0 suivante, et ainsi de suite. Montrer que le graphe de γ rencontre la droite $y = t$.

(δ) Montrer que γ est une barrière supérieure.

(ε) En déduire que toute solution de l'équation différentielle rencontre la droite $y = t$, puis reste dans un entonnoir.

(ζ) Dessiner l'allure des solutions de l'équation différentielle $y' = \sin(ty)$.

5.3. On considère l'équation (appelée équation de Van der Pol) :

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) - x^3(t) + x(t), \\ y'(t) = -x(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que le problème de Cauchy correspondant admet une solution globale unique (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 5.9).

(b) On appelle trajectoire associée à une solution de (E), l'ensemble parcouru dans le plan Euclidien par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t parcourt \mathbb{R} . Montrer que les trajectoires associées à deux solutions distinctes de (E) coïncident ou n'ont aucun point commun ; montrer que par chaque point du plan passe une trajectoire et une seule ; montrer que si une trajectoire a un point double (c'est-à-dire correspondant à deux valeurs distinctes de t), les solutions associées de (E) sont périodiques (et tous les points sont alors doubles). Quelles sont les trajectoires réduites à un point ?

(c) Montrer que la courbe symétrique d'une trajectoire par rapport à $(0, 0)$ est encore une trajectoire.

(d) On considère maintenant les sous-ensembles du plan

$$\begin{aligned} D^+ &= \{(0, y) ; y > 0\} ; & D^- &= \{(0, y) ; y < 0\} ; \\ E_1 &= \{(x, y) ; x > 0 \text{ et } y > x^3 - x\} ; & \Gamma_+ &= \{(x, x^3 - x) ; x > 0\} ; \\ E_2 &= \{(x, y) ; x > 0 \text{ et } y < x^3 - x\} ; \\ E_3 &= \{(x, y) ; x < 0 \text{ et } y < x^3 - x\} ; & \Gamma_- &= \{(x, x^3 - x) ; x < 0\} ; \\ E_4 &= \{(x, y) ; x < 0 \text{ et } y > x^3 - x\}. \end{aligned}$$

Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (E) ; montrer que, si $(x(t_0), y(t_0)) \in D^+$, il existe $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > t_0$ tels que $(x(t), y(t)) \in E_i$ pour $t \in]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, 2, 3, 4$, et $(x(t_1), y(t_1)) \in \Gamma^+$, $(x(t_2), y(t_2)) \in D^-$, $(x(t_3), y(t_3)) \in \Gamma^-$; $(x(t_4), y(t_4)) \in D^+$.

(e) Soit $y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$; il existe une solution de (E) telle que $(x(t_0), y(t_0)) = (0, y_0)$; on pose $\sigma(y_0) = y(t_2)$; montrer que $\sigma(y_0)$ ne dépend que de y_0 (et non de t_0) et que σ est une application monotone continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^- .

(f) En utilisant le (c), montrer que $(0, y_0)$ appartient à la trajectoire d'une solution périodique si et seulement si $\sigma(y_0) = -y_0$.

(g) Soit $\beta > 0$ tel que pour la solution de (E) vérifiant $(x(t_0), y(t_0)) = (0, \beta)$ on ait $(x(t_1), y(t_1)) = (1, 0)$. Montrer que pour $y_0 < \beta$, on a $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 > 0$ (regarder $\int_{t_0}^{t_2} \frac{d}{dt} [x(t)^2 + y(t)^2] dt$).

(h) Soit y_0 grand. Soit C la courbe formée des arcs suivants :

- le segment $(0, y_0), (1, y_0)$;
- l'arc de cercle de centre O passant par $(1, y_0)$ et coupant $(y = x^3 - x)$ en (x_1, y_1) avec $x_1 > 1$.
- le segment $(x_1, y_1), (x_1, 0)$.
- l'arc de cercle de centre O passant par $(x_1, 0)$ et coupant $(x = 1)$ en (x'_1, y'_1) .
- la tangente en (x'_1, y'_1) à cet arc de cercle qui recoupe Oy en $(0, y_2)$.

Montrer que la solution de (E) passant par $(0, y_0)$ est à l'intérieur de C . En déduire que $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 < 0$.

- (i) En déduire qu'il existe une trajectoire et une seule correspondant à des solutions périodiques de (E). Montrer que les trajectoires non réduites à (0, 0) convergent asymptotiquement vers cette trajectoire quand t tend vers $+\infty$.

5.4. Soit t une variable réelle ≥ 0 . On considère le problème de Cauchy

$$y' = ty, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Démontrer que pour tout $T > 0$, ce problème admet une solution et une seule sur $[0, T]$, et indiquer comment la méthode d'Euler permet d'en trouver une approximation.

- (b) Déduire de ce qui précède la formule

$$y(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(t) \quad \text{avec} \quad P_N(t) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{nt^2}{N^2}\right)$$

- (c) Pour $\alpha > 0$, étudier les variations de la fonction $f(x) = x \ln(1 + \alpha/x)$ sur $]0, +\infty[$; on montrera que $f''(x) < 0$.

En déduire l'encadrement

$$\left(1 + \frac{t^2}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \leq 1 + \frac{nt^2}{N^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{N^2}\right)^n \quad \text{si } 0 \leq n \leq N - 1.$$

- (d) Calculer la limite du (b), et en déduire $y(t)$.

5.5. On considère l'équation différentielle

$$y' = |y|^{-3/4}y + t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) = f(t, y)$$

où le second membre est défini sur \mathbb{R}^2 à l'aide de prolongements par continuité. On note $Y(t)$ la solution approchée définie sur \mathbb{R} , obtenue par la méthode d'Euler pour le pas $h = \frac{1}{n+1/2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $Y(0) = 0$. On suppose dans un premier temps que n est pair.

- (a) Calculer $Y(h)$, $Y(2h)$ et $Y(3h)$.

Démontrer les inégalités $Y(3h) > \frac{h^{3/2}}{2} > \frac{(3h)^{3/2}}{16}$.

- (b) Déterminer $c > 0$ tel que $0 < t < c$ on ait $\frac{1}{2} t^{3/8} - t > \frac{1}{10} t^{3/8}$. En supposant de plus $h \leq t$ et c assez petit vérifier $\frac{(t+h)^{3/2} - t^{3/2}}{h} < \frac{8}{5} t^{3/8}$ (on pourra utiliser la formule de Taylor).

- (c) On suppose que pour $m \in \mathbb{N}^*$ on a $mh < c$ et $Y(m, h) > \frac{(mh)^{3/2}}{16}$.

Démontrer les inégalités

$$f(mh, Y(mh)) > Y(mh)^{1/4} - mh > \frac{1}{2} (mh)^{3/8} - mh > \frac{1}{10} (mh)^{3/8}.$$

En déduire $Y((m+1)h) > \frac{((m+1)h)^{3/2}}{16}$.

Montrer que si p entier vérifie $0 < ph \leq c$, on a

$$Y(ph) > \frac{(ph)^{3/2}}{16}.$$

(d) On suppose ici que n est impair. Calculer $Y(h)$, $Y(2h)$ et $Y(3h)$. Montrer l'inégalité $Y(3h) < -\frac{(3h)^{3/2}}{16}$.

On suppose que pour $mh < c$ on a $Y(mh) < -\frac{(mh)^{3/2}}{16}$; montrer comme ci-dessus que $Y((m+1)h) < -\frac{((m+1)h)^{3/2}}{16}$, puis que $Y(ph) < -\frac{(ph)^{3/2}}{16}$ pour tout entier p tel que $0 < ph \leq c$.

(e) Pour $0 < t < c$, montrer que les solutions approchées $Y(t)$ ne tendent vers aucune limite n tend vers $+\infty$.

5.6. Soit le système différentiel dans \mathbb{R}^2 défini par

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2(x - ty) \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

- (a) Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
- (b) On utilise la méthode d'Euler avec pas constant h , démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (α) Écrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n) .
- (β) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0 .
- (γ) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur \mathbb{R}_+ vers la solution exacte de (S).

5.7. Soit $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et lipschitzienne de rapport k en sa deuxième variable. On définit une suite de fonctions $y_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $y_0(t) = \lambda$ et

$$y_{n+1}(t) = \lambda + \int_a^t f(u, y_n(u)) du, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On sait d'après V 3.2 que y_n converge uniformément vers la solution exacte de l'équation $y' = f(t, y)$ telle que $y(a) = \lambda$. On étudie ici le cas particulier de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t, \quad t \in [0, +\infty[.$$

(a) Montrer que y_n peut s'écrire sous la forme

$$y_n(t) = \lambda P_n(t) + Q_n(t)$$

où P_n, Q_n sont des polynômes que l'on explicitera.

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$. Vérifier ce résultat en résolvant directement l'équation.

5.8. Soit T un réel positif et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue lipschitzienne de rapport k en la deuxième variable. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y).$$

Soit un réel $h \in]0, T[$. On dira que z est une solution retardée de retard h si z est une fonction continue sur $[0, T]$, dérivable sur $]h, T]$ et si

$$z'(t) = f(t, z(t-h)), \quad \forall t \in]h, T].$$

(a) Soit y_0 un réel fixé. Montrer que (E) admet une solution retardée de retard h et une seule, notée z_h , telle que $z_h(t) = y_0$ pour tout $t \in [0, h]$.

(b) Soit z une solution retardée de retard h . On pose

$$A = \max_{t \in [0, T]} |f(t, 0)|, \quad m(t) = \max_{u \in [0, t]} |z(u)|.$$

(α) Montrer que pour tout $t \in [h, T]$ on a

$$m(t) \leq m(h) + \int_h^t (A + km(u)) du.$$

(β) En déduire que

$$m(t) \leq \left(\frac{A}{k} + m(h) \right) e^{k(t-h)} - \frac{A}{k}, \quad \forall t \in [h, T].$$

[Indication : étudier la dérivée de la fonction $M(t) = e^{-kt} \int_h^t (A + km(u)) du$.]

(γ) Montrer qu'il existe une constante B indépendante de h , que l'on explicitera, telle que $\|z_h\|_\infty \leq B$ pour tout $h > 0$, si z_h désigne la solution retardée du (a).

- (c) On se propose ici d'étudier la convergence de z_h quand h tend vers 0.
- (α) Montrer que les fonctions z_h sont C -lipschitziennes avec une constante C indépendante de h .
- (β) Soit y la solution exacte (non retardée) de (E) telle que $y(0) = y_0$. On pose

$$\delta(t) = \max_{u \in [0, t]} |z_h(u) - y(u)|.$$

Montrer que δ vérifie l'inégalité intégrale

$$\delta(t) \leq \delta(h) + \int_h^t (kCh + k\delta(u))du.$$

où C est la constante de la question (c) α).

- (γ) En déduire une majoration de $\|\delta\|_\infty$ et conclure.
- (d) On construit maintenant une méthode de résolution approchée de (E) utilisant les solutions retardées z_h . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \leq T/h$, on pose

$$t_n = nh, \quad z_n = z_h(t_n);$$

dans la formule

$$z_{n+1} = z_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, z_h(t-h))dt$$

on remplace la valeur exacte de l'intégrale par sa valeur approchée calculée au moyen de la méthode des trapèzes élémentaires.

- (α) Écrire la relation de récurrence définissant la suite (z_n) .
- (β) Exprimer l'erreur de consistance relative à une solution exacte y ; en calculer un développement limité à l'ordre 2 en fonction de h et des dérivées partielles de f au point (t, y) . Quel est l'ordre de la méthode ?

5.9. Soit J un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : J \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue. On se propose de démontrer que toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est globale si f vérifie l'hypothèse suivante :

- (H) Il existe des fonctions $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues telles que

$$\langle f(t, y), y \rangle \leq a(t)\|y\|^2 + b(t), \quad \forall (t, y) \in J \times \mathbb{R}^m,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne standards sur \mathbb{R}^m .

- (a) Soit $y : [t_0, t_1[\rightarrow \mathbb{R}^m$ une solution maximale à droite passant par un point (t_0, y_0) et soit $r(t) = \|y(t)\|^2$. Montrer que $r'(t) \leq 2a(t)r(t) + 2b(t)$.

En déduire que $\|y(t)\|^2 \leq \rho(t)$ où $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}$ est la solution (toujours globale) de l'équation linéaire $\rho' = 2a(t)\rho + 2b(t)$, telle que $\rho(t_0) = \|y_0\|^2$.

[*Indication* : soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$; étudier le signe de la dérivée de $(r(t) - \rho(t))e^{-2A(t)}$.

- (b) Déterminer un majorant explicite de $\|y(t)\|$ lorsque a et b sont des constantes.
- (c) On suppose que $t_1 < \sup J$. Montrer que $y(t)$, $y'(t)$ sont bornées sur $[t_0, t_1[$ et que ces fonctions se prolongent par continuité en t_1 . Montrer que ceci conduit à une contradiction. Conclure.

Chapitre V

Méthodes de résolution explicite

On se propose d'étudier un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier et du second ordre pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives. Ceci fournira l'occasion d'illustrer les résultats généraux du chapitre V par des exemples.

1. Équations du premier ordre

1.1. Remarques générales

On considère une équation différentielle

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, localement lipschitzienne en y .

Les différentes solutions de l'équation (E) s'écrivent en général sous la forme

$$y = \varphi(x, \lambda)$$

où λ est un paramètre réel : on dit parfois que la solution « générale » dépend d'un seul paramètre. Pour comprendre ce phénomène, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : si on cherche les solutions définies au voisinage d'un point x_0 , on sait qu'il existe une solution y et une seule telle que $y(x_0) = y_0$; on peut donc choisir $\lambda = y_0$ pour paramétrer les solutions. Dans la pratique, le paramètre λ *apparaît souvent comme constante d'intégration*.

Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières $y = \psi_0(x)$, $y = \psi_1(x)$, ... qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de λ : on dit que ce sont des *solutions singulières* (ou *courbes intégrales singulières*) de (E).

On va maintenant décrire une situation un peu plus générale qui se ramène au cas d'une équation du type considéré ci-dessus.

Systèmes différentiels autonomes dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On suppose donné un champ de vecteurs dans U , c'est-à-dire une application continue

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{V}(M) \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}, \quad M \in U.$$

On appelle système autonome associé au champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ le système différentiel

$$(S) \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \end{cases}.$$

Si $\vec{V}(M)$ représente un champ de vecteurs vitesse (associé par exemple à l'écoulement d'une nappe de fluide sur une surface plane), résoudre (S) revient à chercher la trajectoire et la loi du mouvement des particules de fluide en fonction du temps. Le mot « autonome » signifie que le champ de vecteurs ne dépend pas du temps t (cas d'un écoulement stationnaire).

Si $t \mapsto M(t)$ est solution, toute fonction $t \mapsto M(t+T)$ obtenue par un décalage dans le temps est encore solution. Dans l'ouvert $U' = \{M(x, y); a(x, y) \neq 0\}$ on a (S) \Rightarrow (E) où

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} = f(x, y).$$

Résoudre (E) permet de trouver la trajectoire des particules (mais pas la loi du mouvement en fonction du temps).

1.2. Équations à variables séparées

Ce sont les équations dans lesquelles on peut regrouper x, dx d'une part et y, dy d'autre part. Nous allons examiner 3 cas.

a) Équations $y' = f(x)$, avec $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Les solutions sont données par

$$y(x) = F(x) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où F est une primitive de f sur I . Les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translations dans la direction Oy .

b) Équations $y' = g(y)$, avec $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

L'équation peut se récrire $\frac{dy}{dx} = g(y)$, ou encore $\frac{dy}{g(y)} = dx$ à condition que $g(y) \neq 0$.

- Notons y_j les racines de $g(y) = 0$ dans l'intervalle J . Alors $y(x) = y_j$ est une solution (singulière) évidente de l'équation.
- Dans l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times J; g(y) \neq 0\}$, on a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = dx.$$

Les solutions sont données par

$$G(y) = x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où G est une primitive quelconque de $\frac{1}{g}$ sur chacun des intervalles ouverts $[y_j, y_{j+1}[$ délimités par les racines de g . Dans chaque bande $\mathbb{R} \times]y_j, y_{j+1}[$, les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translations dans la direction Ox ; ceci est à relier au fait que les lignes isoclines sont les droites $y = m = \text{constante}$.

Comme $G' = \frac{1}{g}$ et que g est de signe constant sur $]y_j, y_{j+1}[$, on en déduit que G est une application strictement monotone bijective

$$G :]y_j, y_{j+1}[\rightarrow]a_j, b_j[$$

avec $a_j \in]-\infty, +\infty[$, $b_j \in]-\infty, +\infty[$. On peut donc (au moins théoriquement) exprimer y en fonction de x :

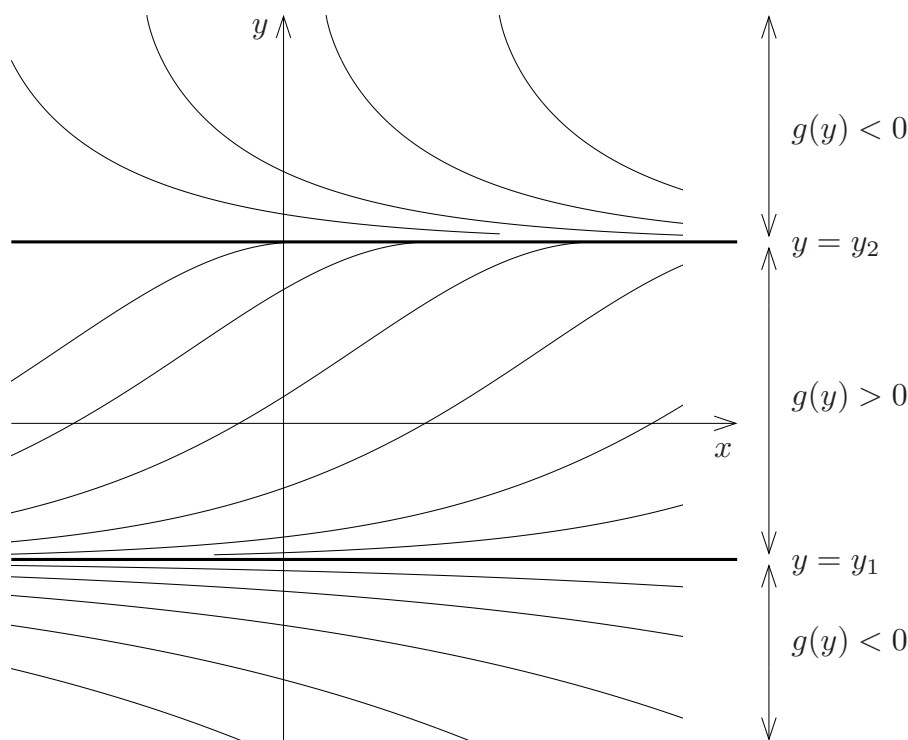
$$y = G^{-1}(x + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Supposons par exemple $g > 0$, et par suite G croissante sur $]y_j, y_{j+1}[$.

- Si $\int_{y_j}^{y_j+\varepsilon} \frac{dy}{g(y)}$ diverge, on a $a_j = -\infty$, par conséquent $x = G(y) - \lambda \rightarrow -\infty$ quand $y \rightarrow y_j + 0$. Dans ce cas, la courbe est asymptote à la droite $y = y_j$.
- Si $\int_{y_j}^{y_j+\varepsilon} \frac{dy}{g(y)}$ converge, alors $a_j \in \mathbb{R}$ et $x \rightarrow a_j - \lambda$ quand $y \rightarrow y_j + 0$, avec de plus $y' = g(y) \rightarrow 0$; la courbe vient rejoindre la droite $y = y_j$ au point $(a_j - \lambda, y_j)$ et admet la droite $y = y_j$ pour tangente en ce point. Cette situation montre qu'il n'y a pas unicité du problème de Cauchy en cas de convergence de l'intégrale.

Exercice. Vérifier que $\int \frac{dy}{g(y)}$ est bien toujours divergente en tout point y_j tel que $g(y_j) = 0$, lorsque g est localement lipschitzienne.

L'allure des courbes intégrales est la suivante (dans le schéma ci-dessous, on suppose qu'il y a convergence en $y_2 - 0$, divergence en $y_1 \pm 0$ et $y_2 + 0$) :



c) Cas général des équations à variables séparées.

(E)
$$y' = f(x)g(y) \text{ avec } f, g \text{ continues.}$$

- Si $g(y_j) = 0$, la fonction constante $y(x) = y_j$ est solution singulière.
- Sur l'ouvert $U = \{(x, y); g(y) \neq 0\}$ on a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

d'où $G(y) = F(x) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où F est une primitive de f et G une primitive de $1/g$. Comme G est continue strictement monotone sur chaque intervalle $[y_j, y_{j+1}[$, l'application G admet une application réciproque G^{-1} et on obtient

$$y = G^{-1}(F(x) + \lambda).$$

Exemple. Soit l'équation $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$. Le domaine de définition est la réunion

$$\{|x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \cup \{|x| > 1 \text{ et } |y| \geq 1\}.$$

On va donc se placer dans l'ouvert

$$U = \{|x| < 1 \text{ et } |y| < 1\} \cup \{|x| > 1 \text{ et } |y| > 1\}.$$

- Dans le carré $\{|x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$ l'équation s'écrit :

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où $\text{Arcsin } y = \text{Arcsin } x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme Arcsin est une bijection de $] -1, 1[$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a nécessairement $\lambda \in] -\pi, \pi[$. On doit avoir de plus

$$\text{Arcsin } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cap \left] -\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} - \lambda \right[= \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \lambda \right[& \text{si } \lambda \geq 0, \\ \left] -\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} \right[& \text{si } \lambda \leq 0. \end{cases}$$

De même $\text{Arcsin } y$ est dans $] -\frac{\pi}{2} + \lambda, \frac{\pi}{2} \left[$ si $\lambda \geq 0$, et dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \lambda \left[$ si $\lambda \leq 0$.

Les courbes intégrales admettent pour équation

$$y = \sin(\text{Arcsin } x + \lambda) = x \cos \lambda + \sqrt{1-x^2} \sin \lambda$$

avec

$$\begin{aligned} x \in \left] -1, \cos \lambda \right[, \quad y \in \left] -\cos \lambda, 1 \right[& \text{ si } \lambda \geq 0, \\ x \in \left] -\cos \lambda, 1 \right[, \quad y \in \left] -1, \cos \lambda \right[& \text{ si } \lambda \leq 0. \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus implique $(y - x \cos \lambda)^2 + x^2 \sin^2 \lambda = \sin^2 \lambda$, donc les courbes intégrales sont des arcs d'ellipse.

• L'ouvert $\{|x| > 1 \text{ et } |y| > 1\}$ est formé de 4 composantes connexes. Plaçons-nous par exemple dans $\{x > 1 \text{ et } y > 1\}$. On a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

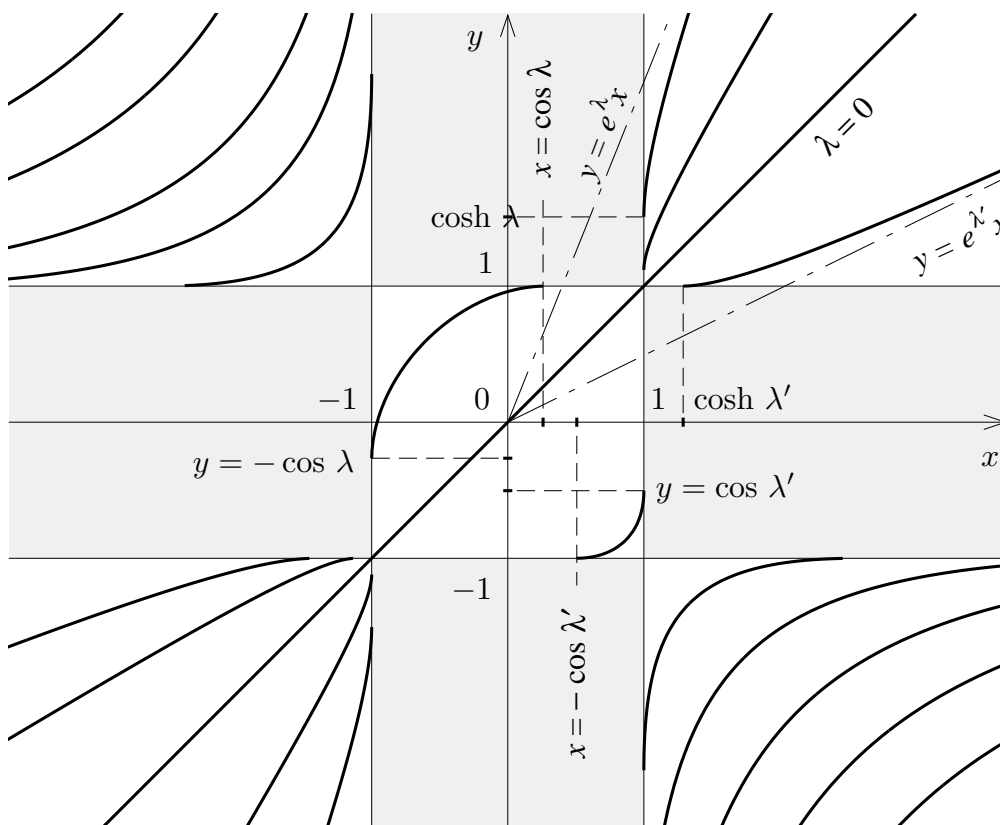
d'où $\text{Argcosh } y = \text{Argcosh } x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Argcosh est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$; en raisonnant comme ci-dessus, on obtient

$$y = x \cosh \lambda + \sqrt{x^2 - 1} \sinh \lambda$$

avec

$$\begin{aligned} x &\in]1, +\infty[, \quad y \in]\cosh \lambda, +\infty[\quad \text{si } \lambda \geq 0, \\ x &\in]\cosh \lambda, +\infty[, \quad y \in]1, +\infty[\quad \text{si } \lambda \leq 0, \end{aligned}$$

par suite $(y - x \cosh \lambda)^2 - x^2 \sinh^2 \lambda + \sinh^2 \lambda = 0$, ce qui est l'équation d'une conique. Comme $\sqrt{x^2 - 1} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = |x| - \frac{1}{2|x|} + O(\frac{1}{x^3})$, on voit que la conique admet des asymptotes $y = (\cosh \lambda \pm \sinh \lambda)x = e^{\pm\lambda}x$ (pour la branche $x > 1$ qui nous intéresse, c'est $y = e^{\lambda}x$). On a donc affaire à des arcs d'hyperbole.



On a figuré ici $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$.

1.3. Cas où l'on connaît une « intégrale première »

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation

$$(E) \quad y' = f(x, y)$$

ou un système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \end{cases}$$

dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Dans les deux cas on a une écriture sous forme différentielle :

$$(E) \Leftrightarrow f(x, y)dx - dy = 0,$$

$$(S) \Rightarrow b(x, y)dx - a(x, y)dy = 0.$$

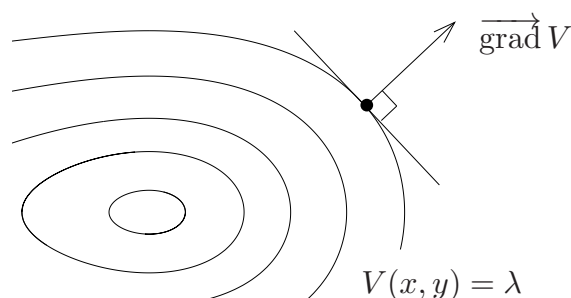
Définition. On dit qu'une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une intégrale première si (E) (respectivement (S)) implique

$$dV = V'_x(x, y)dx + V'_y(x, y)dy = 0.$$

Dans ce cas, les courbes intégrales $y = \varphi(x)$ vérifient

$$V'_x(x, \varphi(x)) + V'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = \frac{d}{dx} [V(x, \varphi(x))] = 0.$$

Les courbes intégrales sont donc contenues dans les lignes de niveau $V(x, y) = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.



En tout point où $\overrightarrow{\text{grad}} V \neq \vec{0}$, la ligne de niveau correspondante possède une tangente perpendiculaire à $\overrightarrow{\text{grad}} V$. Le champ des tangentes est dirigé par le vecteur

$$\vec{k} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \vec{k} \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{dans le cas de (E) (resp. (S)).}$$

La condition d'orthogonalité $\overrightarrow{\text{grad}} V \perp \vec{k}$ équivaut à la proportionnalité de l'équation $V'_x dx + V'_y dy = 0$ à l'équation différentielle (E) (ou (S)). On peut donc énoncer :

Propriété caractéristique. *V est une intégrale première si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}} V$ est orthogonal au champ des tangentes de l'équation différentielle considérée.*

Exemple. Soit $y' = \frac{y}{x+y^2}$ sur $U = \{x + y^2 \neq 0\}$. L'équation se récrit

$$(E) \quad ydx - (x + y^2)dy = 0.$$

Cette différentielle n'est pas une différentielle exacte $dV = Pdx + Qdy$ (on devrait avoir $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ce qui n'est pas le cas). On observe néanmoins que

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Multiplions alors l'équation (E) par $\frac{1}{y^2}$, en se plaçant dans l'ouvert $y \neq 0$:

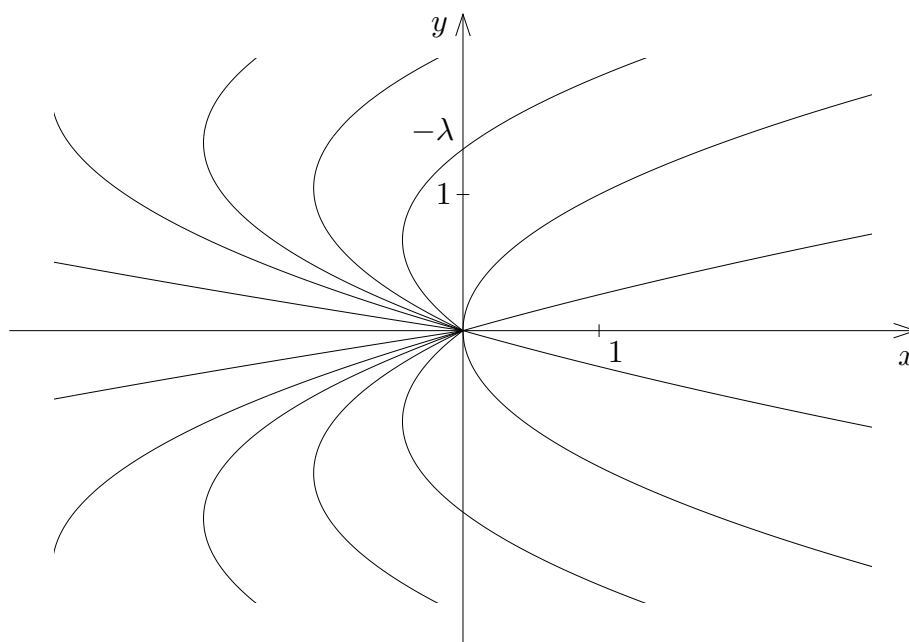
$$(E) \Leftrightarrow \frac{ydx - xdy}{y^2} - dy = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y} - y\right) = 0.$$

Les courbes intégrales y sont donc données par

$$\frac{x}{y} - y = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2 + \lambda y.$$

Ce sont des arcs de la parabole d'axe $y = -\frac{\lambda}{2}$ et de sommet $\begin{pmatrix} -\lambda^2/4 \\ -\lambda/2 \end{pmatrix}$, délimités par les points tels que $x + y^2 = 2y^2 + \lambda y = 0$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le sommet, qui doivent être exclus. Par ailleurs, $y = 0$ est une solution singulière, fournissant deux solutions maximales pour $x \in]-\infty, 0[$ et $x \in]0, +\infty[$ respectivement.

Remarque. On dit que $\frac{1}{y^2}$ est un « facteur intégrant » de la forme différentielle $ydx - (x + y^2)dy = 0$.



1.4. Équations linéaires du premier ordre

Ce sont les équations de la forme

$$(E) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) sont des fonctions continues.

Supposons qu'on connaisse une solution particulière $y_{(1)}$ de l'équation (E). Alors on obtient par soustraction $y' - y'_{(1)} = a(x)(y - y_{(1)})$, c'est-à-dire que $z = y - y_{(1)}$ vérifie l'équation linéaire « sans second membre »

$$(E_0) \quad z' = a(x)z.$$

Inversement, si z est solution de (E₀), alors $y = y_{(1)} + z$ est solution de (E).

Théorème 1. *La solution générale de (E) s'écrit*

$$y = y_{(1)} + z$$

où $y_{(1)}$ est une solution particulière de (E) et où z est la solution générale de (E₀).

a) *Solutions de (E₀)*

Comme $f(x, z) = a(x)z$ est continue et de dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial z}(x, z) = a(x)$ continue, on sait que le problème de Cauchy admet une solution unique en tout point $(x_0, z_0) \in I \times \mathbb{R}$.

Or $z(x) \equiv 0$ est clairement solution de (E_0) . D'après l'unicité, aucune autre solution ne peut s'annuler en un quelconque point $x_0 \in I$. Si $z \neq 0$, on peut donc écrire

$$\frac{z'}{z} = a(x),$$

$$\ln |z| = A(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive de a sur I . On en déduit

$$|z(x)| = e^C e^{A(x)},$$

$$z(x) = \varepsilon(x) e^C e^{A(x)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \pm 1.$$

Comme z est continue et ne s'annule pas, le signe de z ne change pas, d'où

$$z(x) = \lambda e^{A(x)}$$

avec $\lambda = \pm e^C$. Inversement, toute fonction

$$z(x) = \lambda e^{A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

est visiblement solution de (E_0) . On peut donc énoncer :

Théorème 2. *Les solutions maximales de $(E_0) : z' = a(x)z$ forment un espace vectoriel de dimension 1, ayant pour base $x \mapsto e^{A(x)}$.*

b) Recherche d'une solution particulière $y_{(1)}$ de (E) .

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode dite de *variation des constantes*, c'est-à-dire que l'on cherche $y_{(1)}$ sous la forme

$$y_{(1)}(x) = \lambda(x) e^{A(x)},$$

où λ est différentiable. Il vient

$$y'_{(1)}(x) = \lambda(x) a(x) e^{A(x)} + \lambda'(x) e^{A(x)}$$

$$= a(x) y_{(1)}(x) + \lambda'(x) e^{A(x)}.$$

$y_{(1)}$ est donc solution de (E) si on prend

$$\lambda'(x) e^{A(x)} = b(x),$$

$$\lambda'(x) = b(x) e^{-A(x)},$$

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^x b(t) e^{-A(t)} dt, \quad x_0 \in I.$$

On obtient ainsi la solution particulière

$$y_{(1)}(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^x b(t) e^{-A(t)} dt$$

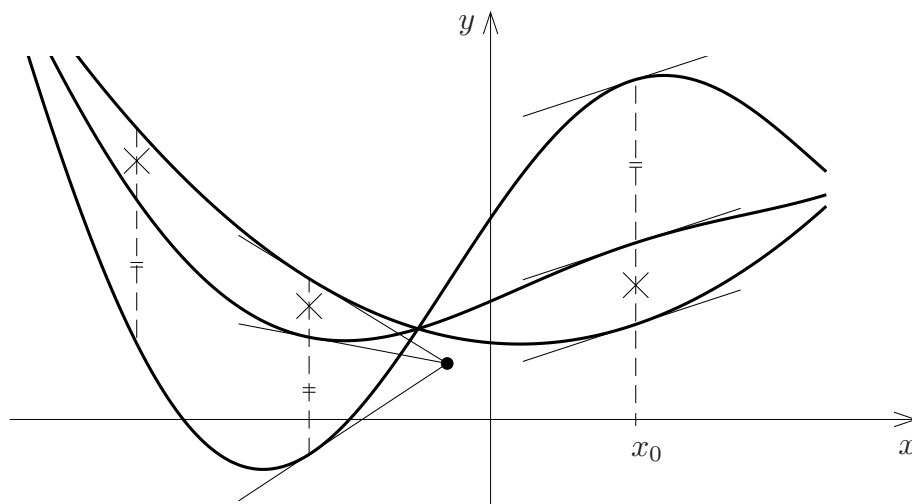
telle que $y_{(1)}(x_0) = 0$. La solution générale est donnée d'après le théorème 1 par

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\lambda + \int_{x_0}^x b(t) e^{-A(t)} dt \right).$$

La solution du problème de Cauchy $y(x_0) = y_0$ est obtenue pour $\lambda = e^{-A(x_0)} y_0$.

Exercice. Propriétés géométriques liées aux équations linéaires (cf. schéma).

- (a) Si $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}$ sont trois solutions d'une équation linéaire, montrer que la fonction $y_{(3)} - y_{(2)}$ est proportionnelle à $y_{(2)} - y_{(1)}$.
- (b) Montrer qu'une équation $y' = f(x, y)$ est linéaire si et seulement si le champ des tangentes a la propriété suivante : pour tout x_0 fixé, les tangentes aux différents points (x_0, y) sont concourantes ou toutes parallèles.



1.5. Équations se ramenant à des équations linéaires

a) Équations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

avec $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues (pour $\alpha = 1$, (E) est linéaire).

On se place dans le demi-plan supérieur $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[= \{(x, y) ; y > 0\}$. En multipliant par $y^{-\alpha}$, on obtient

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x)$$

Posons $z = y^{1-\alpha}$; alors $\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$, d'où

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} \frac{dz}{dx} = p(x)z + q(x)$$

On est donc ramené à une équation linéaire en z .

b) Équations de Riccati

Ce sont les équations de la forme

$$(E) \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

avec $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, c'est-à-dire que $f(x, y)$ est un polynôme de degré ≤ 2 en y . Montrons que l'on sait résoudre (E) dès que l'on connaît une solution particulière $y_{(1)}$. Posons $y = y_{(1)} + z$. Il vient

$$\begin{aligned} y'_{(1)} + z' &= a(x)(y_{(1)}^2 + 2y_{(1)}z + z^2) + b(x)(y_{(1)} + z) + c(x) \\ &= a(x)y_{(1)}^2 + b(x)y_{(1)} + c(x) + (2a(x)y_{(1)} + b(x))z + a(x)z^2. \end{aligned}$$

Comme $y'_{(1)}$ se simplifie, on en déduit

$$z' = (2a(x)y_{(1)}(x) + b(x))z + a(x)z^2.$$

C'est une équation linéaire de Bernoulli avec $\alpha = 2$. On la ramène à une équation linéaire en posant $w = z^{1-\alpha} = \frac{1}{z}$.

Exemple. Soit l'équation $(1-x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$.

On remarque que $y_{(1)}(x) = x^2$ est solution particulière. En posant $y = x^2 + z$ on se ramène à

$$(1-x^3)z' + 3x^2z + z^2 = 0$$

puis, après division par z^2 , à

$$-(1-x^3)w' + 3x^2w + 1 = 0 \quad \text{avec} \quad w = \frac{1}{z},$$

soit

$$w' = \frac{3x^2}{1-x^3} w + \frac{1}{1-x^3}, \quad \text{si} \quad x \neq 1.$$

L'équation linéaire sans second membre $\frac{w'}{w} = \frac{3x^2}{1-x^3}$ donne

$$\ln |w| = -\ln |1-x^3| + C, \quad \text{d'où} \quad w = \frac{\lambda}{1-x^3}.$$

La méthode de variation des constantes conduit à

$$\frac{\lambda'}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} \quad \text{soit} \quad \lambda' = 1, \quad \lambda(x) = x.$$

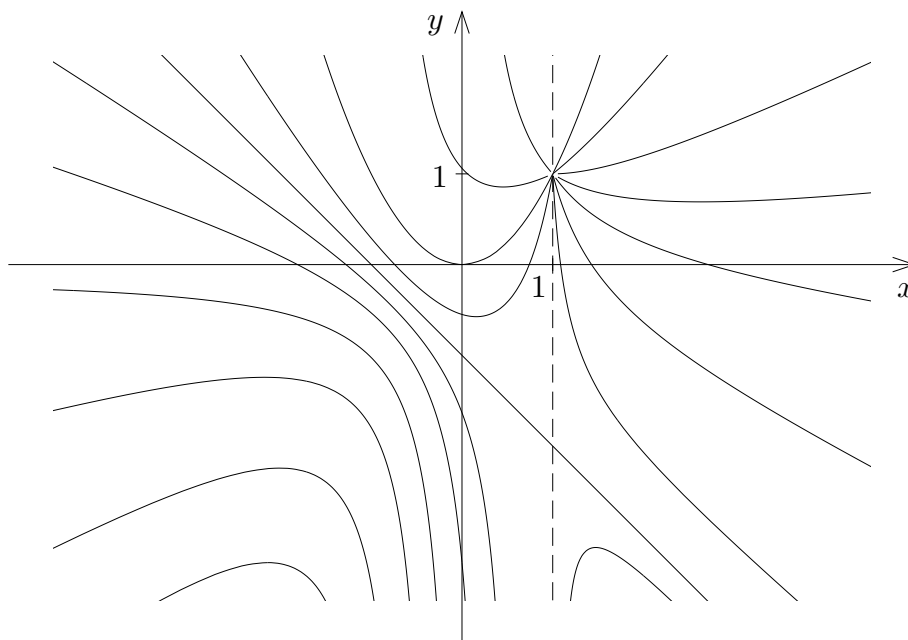
La solution générale de l'équation linéaire complète est donc

$$w(x) = \frac{x + \lambda}{1 - x^3},$$

d'où $y = x^2 + z = x^2 + \frac{1}{w} = x^2 + \frac{1-x^3}{x+\lambda}$, soit encore

$$y(x) = \frac{\lambda x^2 + 1}{x + \lambda} = \lambda x - \lambda^2 + \frac{1 + \lambda^3}{x + \lambda}.$$

Pour $\lambda = -1$, on obtient la droite $y = -x - 1$. Pour $\lambda \neq -1$, il s'agit d'une hyperbole $(y - \lambda x + \lambda^2)(x + \lambda) = 1 + \lambda^3$, admettant pour asymptotes les droites $x = -\lambda$ et $y = \lambda x - \lambda^2$. La solution singulière $y_{(1)}(x) = x^2$ est la solution limite obtenue quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$.



1.6. Équations homogènes

Une équation homogène est une équation qui peut se mettre sous la forme

$$(E) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{où } f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue.}$$

C'est le cas par exemple des équations $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ où P, Q sont des polynômes homogènes de même degré d : une division par x^d au numérateur et au dénominateur nous ramène à $y' = \frac{P(1, y/x)}{Q(1, y/x)}$.

Méthode. On pose $z = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire $y = xz$. Il vient

$$y' = z + xz' = f(z),$$

donc z satisfait l'équation à variables séparées

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}.$$

- On a d'une part les solutions singulières

$$z(x) = z_j, \quad y(x) = z_j x \quad (\text{droites passant par } 0),$$

où $\{z_j\}$ est l'ensemble des racines de $f(z) = z$.

- Pour $f(z) \neq z$ on peut écrire

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

$$F(z) = \ln |x| + C = \ln(\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

où F est une primitive de $z \mapsto 1/(f(z) - z)$ sur $]z_j, z_{j+1}[$. On en déduit que $z = F^{-1}(\ln(\lambda x))$, d'où la famille de courbes intégrales

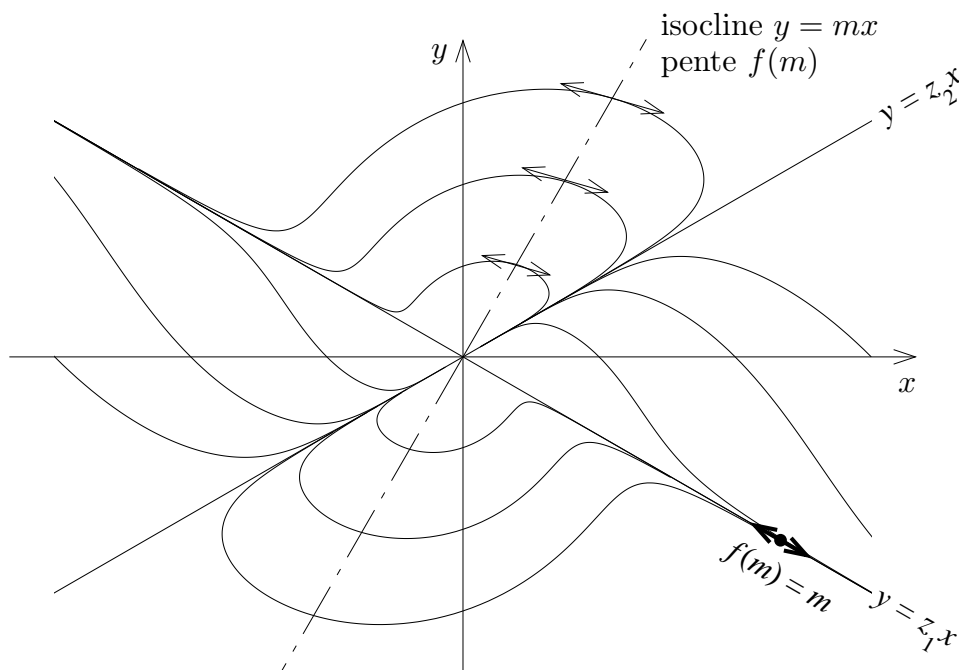
$$C_\lambda : y = xF^{-1}(\ln(\lambda x)),$$

définies dans le secteur angulaire $z_j < \frac{y}{x} < z_{j+1}$, $\lambda x > 0$.

En cas de divergence de F aux points z_j, z_{j+1} , on a $F^{-1} :]-\infty, +\infty[\rightarrow]z_j, z_{j+1}[$ monotone bijective et $\frac{y}{x} \rightarrow z_j$ ou z_{j+1} quand $x \rightarrow 0$ ou ∞ . On a donc d'une part une branche infinie de direction asymptotique $y = z_{j+1}x$ (resp. $y = z_jx$) et une tangente $y = z_jx$ (resp. $y = z_{j+1}x$) au point 0 si F est croissante (resp. décroissante). Noter que la droite $y = z_jx$ n'est pas nécessairement asymptote : voir l'exemple ci-dessous.

Observons enfin que les lignes isoclines sont les droites $y = mx$, la pente correspondante étant $f(m)$. Le champ des tangentes est donc invariant par les homothéties de centre O . Ceci permet de voir que *l'homothétique d'une courbe intégrale est encore une courbe intégrale*.

Exercice. Vérifier que $C_\lambda = h_{1/\lambda}(C_1)$ où $h_\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.



Exemple. L'équation $xy'(2y - x) = y^2$ peut se récrire

$$y' = \frac{y^2}{x(2y - x)} \quad \text{si } x \neq 0, \quad y \neq \frac{x}{2}.$$

y' est donc une fonction rationnelle en x, y dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes homogènes de degré 2. En divisant le numérateur et dénominateur par x^2 on obtient

$$y' = \frac{(y/x)^2}{2y/x - 1}.$$

Posons $z = \frac{y}{x}$, soit $y = xz$. Il vient

$$\begin{aligned} y' &= xz' + z = \frac{z^2}{2z - 1}, \\ xz' &= \frac{z^2}{2z - 1} - z = \frac{z - z^2}{2z - 1} = \frac{z(1 - z)}{2z - 1}. \end{aligned}$$

• Solutions singulières :

$$\begin{aligned} z &= 0, & z &= 1, \\ y &= 0, & y &= x. \end{aligned}$$

• Pour $z \neq 0, z \neq 1$ l'équation se récrit

$$\frac{2z - 1}{z(1 - z)} dz = \frac{dx}{x}.$$

La fonction

$$\frac{2z-1}{z(1-z)} = \frac{z-(1-z)}{z(1-z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{z}$$

admet pour primitive

$$-\ln |1-z| - \ln |z| = -\ln |z(1-z)|,$$

d'où le calcul des courbes intégrales :

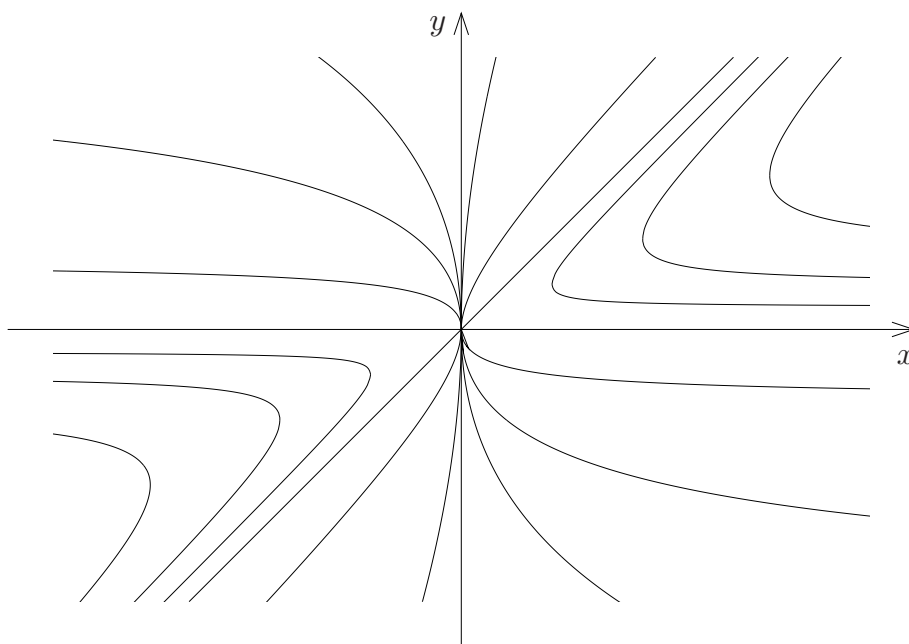
$$\begin{aligned} \ln |z(1-z)| &= -\ln |x| + C, \\ z(1-z) &= \frac{\lambda}{x}, \quad \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x}\right) = \frac{\lambda}{x}, \\ y(x-y) &= \lambda x. \end{aligned}$$

Les courbes intégrales sont donc des coniques. On peut mettre l'équation sous la forme

$$(y-\lambda)(x-y-\lambda) = \lambda^2$$

c'est-à-dire $XY = \lambda$ avec $X = x - y - \lambda$ et $Y = y - \lambda$. Il s'agit d'une hyperbole d'asymptotes $y = \lambda$, $y = x - \lambda$ (parallèles aux directions asymptotiques $y = 0$, $y = x$ données par les droites intégrales singulières).

Exercice. Montrer que chaque hyperbole passe par $(0,0)$ avec tangente $x = 0$.



Autre Méthode de résolution. Utilisation des coordonnées polaires.

Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on pose

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}.$$

Il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta}{dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta} = \frac{dr \tan \theta + r d\theta}{dr - r \tan \theta d\theta}.$$

L'équation (E) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se transforme alors en

$$\begin{aligned} dr \tan \theta + r d\theta &= (dr - r \tan \theta d\theta) f(\tan \theta), \\ dr(f(\tan \theta) - \tan \theta) &= r d\theta(1 + \tan \theta f(\tan \theta)), \\ \frac{dr}{r} &= \frac{1 + \tan \theta f(\tan \theta)}{f(\tan \theta) - \tan \theta} d\theta. \end{aligned}$$

On aboutit donc à une équation à variables séparées r, θ . Les intégrales singulières correspondent aux droites $\theta = \theta_j$ telles que $f(\tan \theta_j) = \tan \theta_j$.

Exercice. Résoudre $y' = \frac{x+y}{x-y}$ à l'aide des deux méthodes proposées. Quelle est la nature des courbes intégrales ?

2. Équations du premier ordre non résolues en y'

2.1. Définitions et premières propriétés

On appelle équation du premier ordre non résolue en y' une équation de la forme

$$(E) \quad f(x, y, y') = 0$$

où $(x, y, p) \mapsto f(x, y, p)$ est une fonction de classe C^1 dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Plaçons-nous au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que l'équation $f(x_0, y_0, p) = 0$ admet des racines p_1, p_2, \dots, p_N et que ces racines sont simples, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0, y_0, p_j) \neq 0.$$

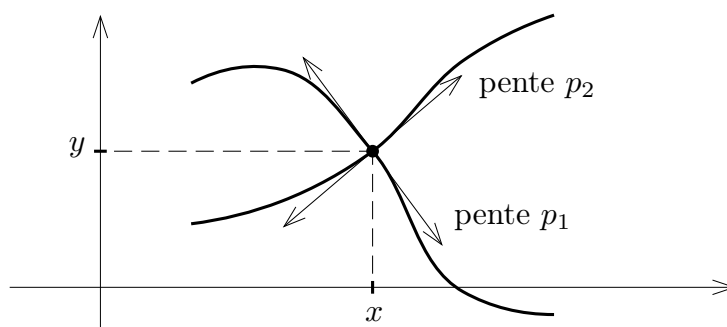
D'après le théorème des fonctions implicites, on sait alors qu'il existe un voisinage V de (x_0, y_0) , un réel $h > 0$ et une fonction $g_j : V \rightarrow]p_j - h, p_j + h[$ de classe C^1 , $1 \leq j \leq N$, tels que pour tout $(x, y, p) \in V \times]p_j - h, p_j + h[$ on ait

$$f(x, y, p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = g_j(x, y).$$

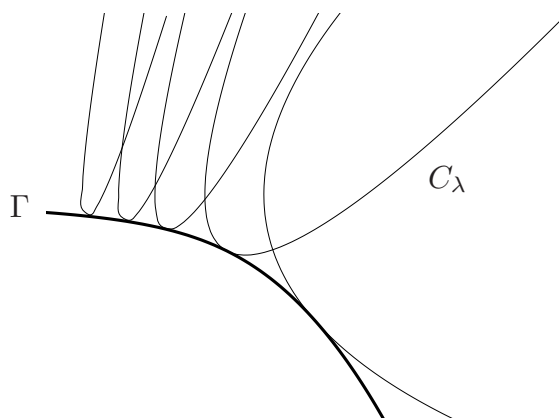
L'équation différentielle $f(x, y, y') = 0$ nous amène alors à résoudre dans V les N équations différentielles

$$(E_j) \quad y' = g_j(x, y).$$

Comme g_j est de classe C^1 , on voit que par tout point $(x, y) \in V$ il passe exactement N courbes intégrales dont les pentes sont les racines p de $f(x, y, p) = 0$.



Remarque. Dans cette situation, il arrive fréquemment qu'on ait une famille de courbes intégrales C_λ admettant une *enveloppe* Γ , c'est-à-dire une courbe Γ qui est tangente en chacun de ses points à l'une des courbes C_λ .



La courbe Γ est alors elle-même une courbe intégrale, car en chaque point sa tangente appartient au champ des tangentes de l'équation (E) (elle coïncide avec la tangente de l'une des courbes C_λ). Γ est donc une solution singulière. On notera qu'une telle courbe Γ doit satisfaire simultanément les deux équations $f(x, y, y') = 0$ et $\partial f / \partial p(x, y, y') = 0$: chaque point $(x, y) \in \Gamma$ est en effet limite d'une suite de points en lesquels deux tangentes du champ viennent se confondre, de sorte que $p = y'$ est racine double de $f(x, y, p) = 0$. En particulier les hypothèses faites ci-dessus pour appliquer le théorème des fonctions implicites ne sont pas satisfaites si $(x_0, y_0) \in \Gamma$.

Méthode de Résolution. Pour résoudre les équations différentielles non résolues en y' , le principe général est de chercher une paramétrisation de x, y, y' en fonction d'un paramètre t qui sera alors choisi comme nouvelle variable.

2.2. Cas des équations non résolues incomplètes

a) Équations du type (E) : $f(x, y') = 0$

Supposons que l'équation $f(x, p) = 0$ admette une paramétrisation de classe C^1

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ p = \psi(t). \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} dx &= \varphi'(t) dt \\ dy &= y' dx = \psi(t) dx = \psi(t)\varphi'(t) dt \end{aligned}$$

On en déduit

$$y = \int_{t_0}^t \psi(u)\varphi'(u) du + \lambda = \rho(t) + \lambda,$$

ce qui donne une paramétrisation des courbes intégrales :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \rho(t) + \lambda. \end{cases}$$

b) Équations du type (E) : $f(y, y') = 0$,

connaissant une paramétrisation $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

On obtient $dy = \varphi'(t)dt = \psi(t)dx$, d'où $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$. Les courbes intégrales sont paramétrées par

$$\begin{cases} x = \rho(t) + \lambda \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

avec $\rho(t) = \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)} du$.

2.3. Équations homogènes non résolues

Ce sont les équations pouvant être mises sous la forme

$$(E) \quad f\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0.$$

Supposons qu'on connaisse une paramétrisation

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} y &= x\varphi(t), \\ \begin{cases} dy &= \varphi(t)dx + x\varphi'(t)dt \\ dy &= \psi(t) dx, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où $(\psi(t) - \varphi(t)) dx = x\varphi'(t) dt$.

- On a d'une part des solutions singulières correspondant aux racines t_j de $\psi(t) = \varphi(t)$, donnant des droites

$$y = x\varphi(t_j).$$

- D'autre part, pour $t \neq t_j$ on obtient

$$\frac{dx}{x} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)} dt,$$

ce qui donne par intégration de $\varphi'/(\psi - \varphi)$:

$$\begin{cases} \ln |x| = \rho(t) + C, \\ x = \lambda e^{\rho(t)} \\ y = x\varphi(t) = \lambda\varphi(t)e^{\rho(t)}, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il est clair sur ces dernières formules que les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par les homothéties de centre O .

Exemple. Soit l'équation $x^2(y + 3xy') = (y + xy')^3$.
En divisant par x^3 on trouve

$$\frac{y}{x} + 3y' = \left(\frac{y}{x} + y'\right)^3,$$

c'est donc une équation homogène non résolue en y' . On obtient une paramétrisation en posant

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + y' = t \\ \frac{y}{x} + 3y' = t^3, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}(3t - t^3) \\ y' = \frac{1}{2}(t^3 - t). \end{cases} \quad (*)$$

En différentiant $y = \frac{1}{2}(3t - t^3)x$ on obtient

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{2}(3 - 3t^2)dt \cdot x + \frac{1}{2}(3t - t^3) dx \\ &= y' dx = \frac{1}{2}(t^3 - t) dx, \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\begin{aligned} (t^3 - 2t)dx &= \frac{1}{2}(3 - 3t^2)dt \cdot x, \\ \frac{dx}{x} &= \frac{3(1 - t^2)}{2t(t^2 - 2)} dt. \end{aligned}$$

- Solutions singulières : $t(t^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. En remplaçant dans (*) on obtient les droites

$$y = 0, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} x, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x.$$

- Solution générale :

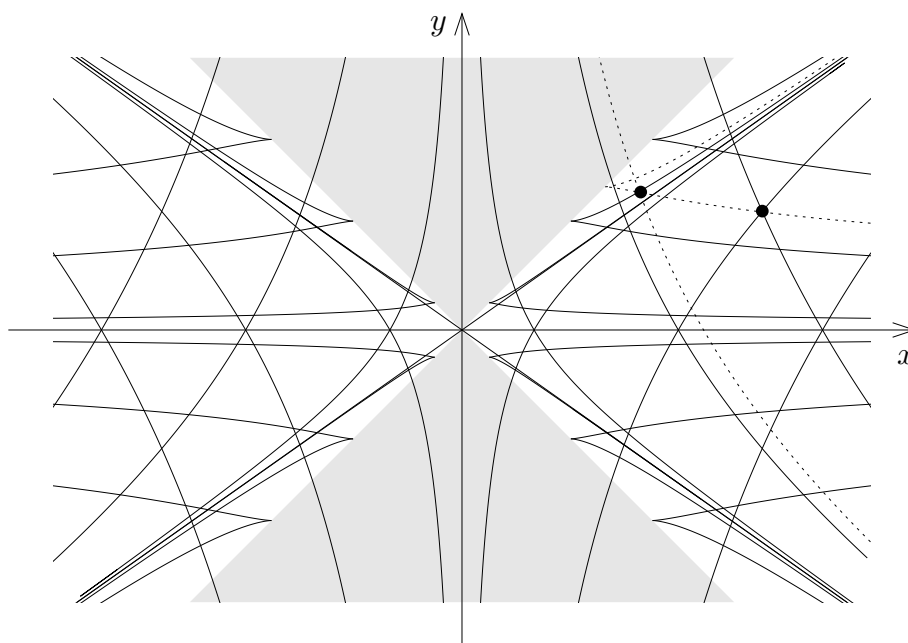
$$\frac{1-t^2}{t(t^2-2)} = \frac{1-\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}}{t(t^2-2)} = -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2(t^2-2)},$$

$$\frac{3(1-t^2)}{2t(t^2-2)} dt = -\frac{3}{4} \frac{dt}{t} - \frac{3}{4} \frac{t dt}{t^2-2}.$$

On en déduit

$$\ln |x| = -\frac{3}{4} \ln |t| - \frac{3}{8} \ln |t^2-2| + C,$$

$$\begin{cases} x = \lambda |t|^{-3/4} |t^2-2|^{-3/8} \\ y = \frac{y}{x} \cdot x = \frac{\lambda}{2} (3t-t^3) |t|^{-3/4} |t^2-2|^{-3/8}. \end{cases}$$



Exercice. Montrer que par tout point (x, y) tel que $|y| < |x|$ il passe exactement trois courbes intégrales, alors qu'il n'en passe qu'une si $|y| > |x|$. Combien en passe-t-il si $|y| = |x|$? [Indication : étudier le nombre de valeurs de t et y' associées à une valeur donnée de y/x].

2.4. Équations de Lagrange (ou équations à isoclines rectilignes)

Cherchons à déterminer les équations différentielles dont les courbes isoclines sont des droites. La courbe isocline $y' = p$ sera une droite $y = a(p)x + b(p)$ (pour simplifier, on écarte le cas des droites parallèles à $y'Oy$). L'équation différentielle correspondante est donc

$$(E) \quad y = a(y')x + b(y').$$

On supposera que a, b sont au moins de classe C^1 .

Méthode de Résolution. On choisit $p = y'$ comme nouvelle variable paramétrant chaque courbe intégrale ; ceci est légitime à condition que y' ne soit pas une constante sur un morceau de la courbe intégrale considérée. Dans le cas contraire, si $y' = p_0 =$ constante, la courbe intégrale est contenue dans la droite $y = a(p_0)x + b(p_0)$, ce qui n'est compatible avec la condition $y' = p_0$ que si $a(p_0) = p_0$.

- On a donc des solutions singulières $y = p_j x + b(p_j)$ où les p_j sont les racines de $a(p) = p$.
- Solution générale :

$$\begin{cases} y = a(p)x + b(p), \\ dy = a(p)dx + (a'(p)x + b'(p))dp \\ dy = y'dx = p dx. \end{cases}$$

Il vient

$$(p - a(p))dx = (a'(p)x + b'(p))dp,$$

et pour $p \neq a(p)$ on aboutit à

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p - a(p)} (a'(p)x + b'(p));$$

c'est une équation linéaire en la fonction $x(p)$. La solution générale sera de la forme

$$\begin{cases} x(p) = x_{(1)}(p) + \lambda z(p), & \lambda \in \mathbb{R}, \\ y(p) = a(p)(x_{(1)}(p) + \lambda z(p)) + b(p). \end{cases}$$

Exercice. Résoudre l'équation $2y - x(y' + y'^3) + y'^2 = 0$.

2.5. Équations de Clairaut

C'est le cas particulier des équations de Lagrange dans lequel $a(p) = p$ pour toute valeur de p , soit

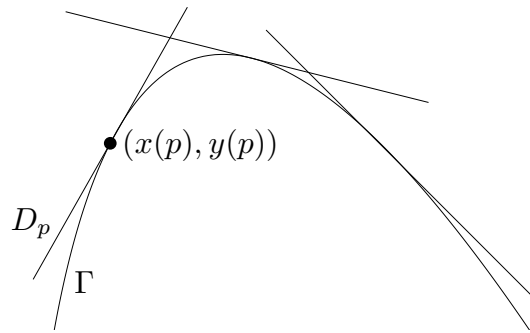
$$(E) \quad y = y'x + b(y').$$

Les droites

$$D_p : y = px + b(p)$$

qui étaient précédemment des solutions singulières forment maintenant une famille générale de solutions.

Montrons que les droites D_p possèdent toujours une enveloppe Γ . Une telle courbe Γ admet par définition une paramétrisation $(x(p), y(p))$ telle que Γ soit tangente à D_p au point $(x(p), y(p))$.



Le vecteur tangent $(x'(p), y'(p))$ à Γ doit avoir même pente p que D_p , d'où $y'(p) = px'(p)$. Par ailleurs $(x(p), y(p)) \in D_p$, donc

$$y(p) = px(p) + b(p).$$

En différentiant, il vient

$$y'(p) = px'(p) + x(p) + b'(p).$$

Ceci implique $x(p) + b'(p) = 0$, d'où la paramétrisation cherchée de l'enveloppe :

$$\Gamma \begin{cases} x(p) = -b'(p) \\ y(p) = -pb'(p) + b(p). \end{cases}$$

Si b est de classe C^2 , on a $y'(p) = -pb''(p) = px'(p)$ de sorte que Γ est bien l'enveloppe des droites D_p . La courbe Γ est une solution singulière de (E).

Exercice. Résoudre l'équation $(xy' - y)(1 + y'^2) + 1 = 0$.

3. Problèmes géométriques conduisant à des équations différentielles du premier ordre

3.1. Équation différentielle associée à une famille de courbes

On considère le problème suivant :

Problème. Étant donné une famille de courbes

$$C_\lambda : h(x, y, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

existe-t-il une équation différentielle du premier ordre dont les courbes C_λ soient les courbes intégrales ?

• **Cas particulier.** On suppose que les courbes C_λ sont les lignes de niveau d'une fonction V de classe C^1 :

$$C_\lambda : V(x, y) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors les courbes C_λ sont solutions de l'équation différentielle

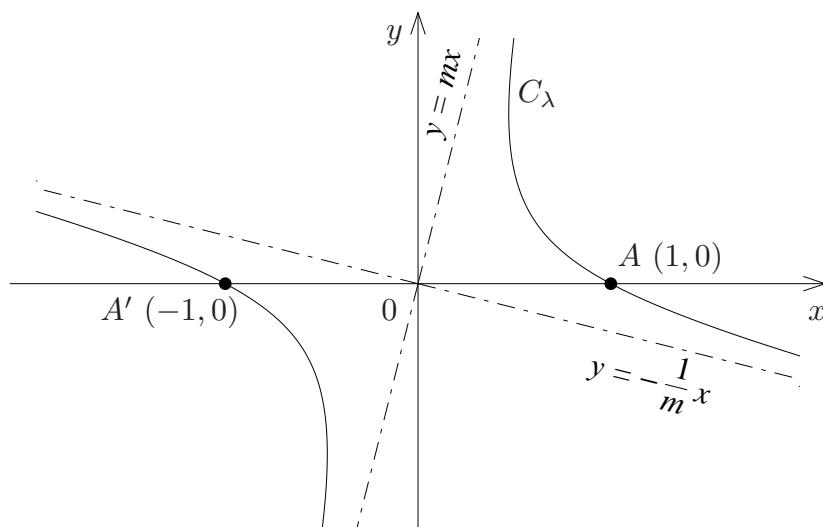
$$(E) \quad V'_x(x, y)dx + V'_y(x, y)dy = 0.$$

• **Cas général.** Si l'équation $h(x, y, \lambda) = 0$ peut se mettre sous la forme $\lambda = V(x, y)$, on est ramené au cas précédent. Sinon on écrit que sur chaque C_λ on a

$$\begin{cases} h(x, y, \lambda) = 0 \\ h'_x(x, y, \lambda)dx + h'_y(x, y, \lambda)dy = 0, \end{cases}$$

et on essaie d'éliminer λ entre les 2 équations pour obtenir une équation ne faisant plus intervenir que x, y, dx, dy .

Exemple. Soit C_λ la famille des hyperboles équilatères de centre O passant par le point $A(1, 0)$.



Les asymptotes de C_λ sont alors des droites orthogonales passant par O , soit

$$y = mx, \quad y = -\frac{1}{m} x, \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Posons $X = y - mx, Y = y + \frac{1}{m} x$. L'équation de l'hyperbole cherchée s'écrit

$$\begin{aligned} XY &= C \quad (\text{constante}), \\ (y - mx)(y + \frac{1}{m} x) &= C, \\ y^2 - x^2 + \left(\frac{1}{m} - m\right)xy &= C. \end{aligned}$$

En faisant $x = 1, y = 0$ on trouve $C = -1$, d'où l'équation

$$C_\lambda : y^2 - x^2 + \lambda xy + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

avec $\lambda = \frac{1}{m} - m$ (noter que $m \mapsto \frac{1}{m} - m$ est surjective de $\mathbb{R}^* \text{ sur } \mathbb{R}$). Sur C_λ on a :

$$\lambda = \frac{x^2 - y^2 - 1}{xy},$$

$$d\lambda = 0 = \frac{(2x dx - 2y dy)xy - (x^2 - y^2 - 1)(x dy + y dx)}{x^2 y^2}.$$

L'équation différentielle des courbes C_λ est donc

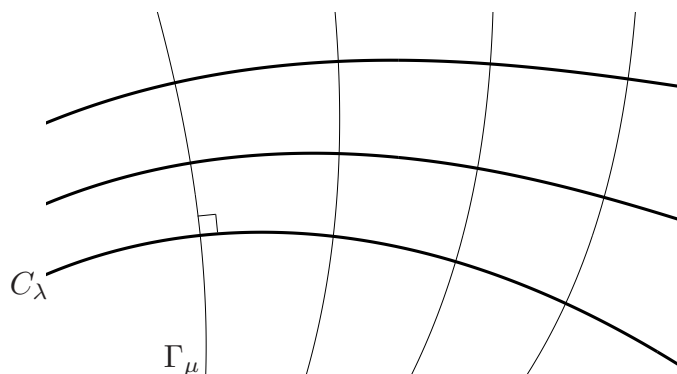
$$(E) : (2x^2 y - x^2 y + y^3 + y)dx + (-2xy^2 - x^3 + xy^2 + x)dy = 0,$$

$$(E) : (x^2 + y^2 + 1)ydx - (x^2 + y^2 - 1)x dy = 0.$$

3.2. Recherche des trajectoires orthogonales à une famille de courbes

Soient $(C_\lambda), (\Gamma_\mu)$ deux familles de courbes.

Définition. On dit que C_λ et Γ_μ sont orthogonales si les tangentes à C_λ et Γ_μ sont orthogonales en tout point de $C_\lambda \cap \Gamma_\mu$, quels que soient λ et μ .



Problème. Etant donné une famille de courbes C_λ , trouver la famille (Γ_μ) des courbes qui sont orthogonales aux C_λ .

Pour cela, on suppose que l'on connaît une équation différentielle (E) satisfaite par les courbes C_λ , et on cherche l'équation différentielle (E^\perp) des courbes orthogonales Γ_μ . Distinguons quelques cas.

- (C_λ) satisfait (E) : $y' = f(x, y)$.

En un point (x, y) donné, la pente de la tangente à C_λ est $y' = f(x, y)$. La pente de la tangente à Γ_μ est donc $-1/f(x, y)$. Les courbes (Γ_μ) sont donc solutions de

$$(E^\perp) : y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

• (C_λ) satisfait (E) : $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \end{cases}$.

La tangente à C_λ est portée par $\vec{V}(M)$, celle de (Γ_μ) est donc portée par le vecteur orthogonal $\vec{V}(M)^\perp \begin{pmatrix} -b(x, y) \\ a(x, y) \end{pmatrix}$. Par suite (Γ_μ) est solution de

$$(E^\perp) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = a(x, y) \end{cases}$$

• (C_λ) satisfait (E) : $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy = 0$.

Alors (Γ_μ) vérifie (E^\perp) : $-\beta(x, y)dx + \alpha(x, y)dy = 0$.

Cas particulier. Supposons que les courbes C_λ sont les lignes de niveau $V(x, y) = \lambda$ de la fonction V . Elles vérifient alors

$$(E) \quad V'_x(x, y)dx + V'_y(x, y)dy = 0.$$

Leurs trajectoires orthogonales (Γ_μ) sont les lignes de champ du gradient $\overrightarrow{\text{grad}} V$:

$$(E^\perp) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = V'_x(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = V'_y(x, y) \end{cases}$$

Exemple. Soit $C_\lambda : y^2 - x^2 + \lambda xy + 1 = 0$ (cf. § 3.1).

Nous avons vu que C_λ vérifie

$$(E) : \quad (x^2 + y^2 + 1)ydx - (x^2 + y^2 - 1)xdy = 0.$$

Donc Γ_μ vérifie

$$(E^\perp) : \quad (x^2 + y^2 - 1)xdx + (x^2 + y^2 + 1)ydy = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xdx + ydy) - xdx + ydy = 0.$$

Une intégrale première apparaît immédiatement :

$$d\left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right] = 0$$

Les courbes Γ_μ sont donc les lignes de niveau

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

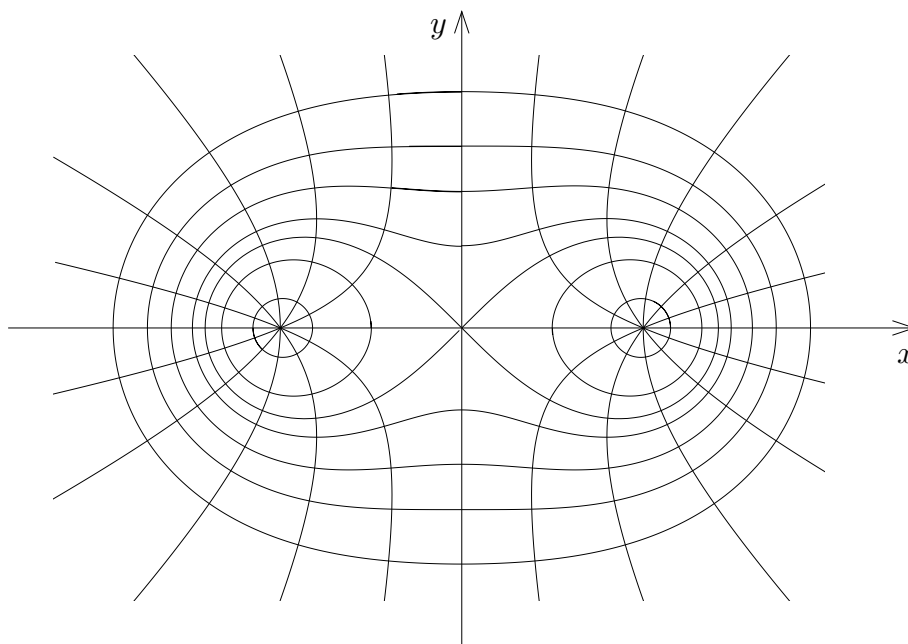
ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 &= \mu + 1, \\ (x^2 - 2x + 1 + y^2)(x^2 + 2x + 1 + y^2) &= \mu + 1, \\ ((x - 1)^2 + y^2)((x + 1)^2 + y^2) &= \mu + 1, \\ MA \cdot MA' &= C = \sqrt{\mu + 1},\end{aligned}$$

avec

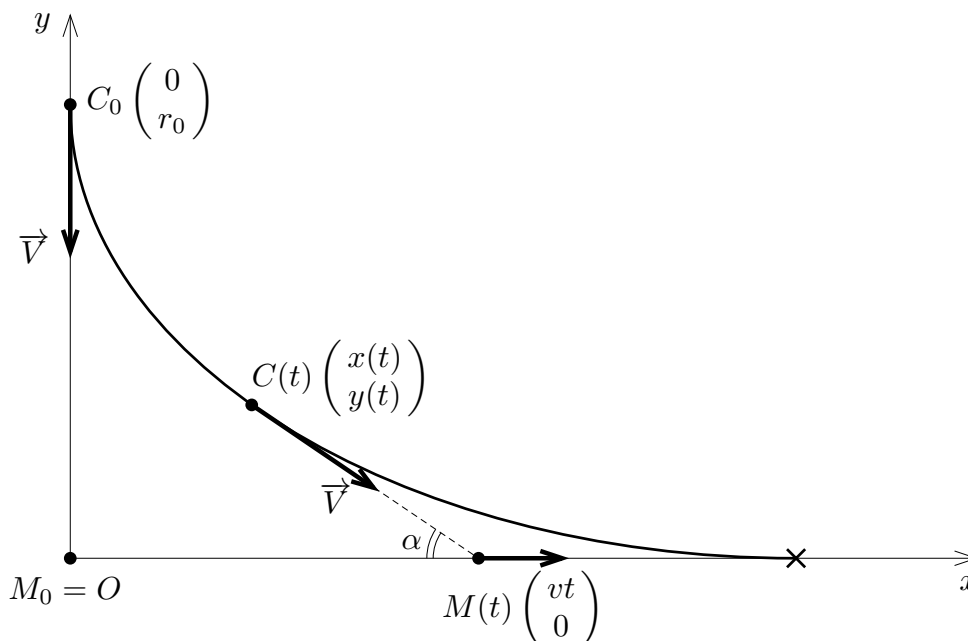
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les courbes $MA \cdot MA' = C$ s'appellent des ovales de Cassini. Leur allure est la suivante.



3.3. Courbe de poursuite du chien

Nous présentons ici la célèbre « courbe du chien » comme exemple de courbe de poursuite. Voici le problème : un chien et son maître se déplacent l'un et l'autre à des vitesses scalaires constantes V (pour le chien) et v (pour le maître), avec $V > v$. On suppose que le maître se déplace en ligne droite, disons sur l'axe Ox , dans la direction positive, suivant la loi $x = vt$. A l'instant $t = 0$, le chien se trouve au point $x = 0$ $y = r_0$, à distance r_0 du maître. Le chien cherche à rejoindre son maître en pointant son vecteur vitesse \vec{V} en direction du maître. Le problème est de déterminer la loi du mouvement $C(t)$ du chien.



Notons α l'angle (non orienté) $\alpha = (Ox, \overrightarrow{CM})$ et $r = \|\overrightarrow{CM}\|$; on a bien entendu $\alpha = \alpha(t)$ et $r = r(t)$. Comme d'habitude en Physique, on désignera par des points surlignants les dérivées temporelles $\dot{r}(t) = dr/dt$, $\dot{\alpha}(t) = d\alpha/dt$, A l'instant t , la position et la vitesse du chien sont données par

$$\begin{cases} x(t) = vt - r \cos \alpha, & \dot{x}(t) = v - \dot{r} \cos \alpha + r \dot{\alpha} \sin \alpha = V \cos \alpha, \\ y(t) = r \sin \alpha, & \dot{y}(t) = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha = -V \sin \alpha, \end{cases}$$

Ces équations fournissent aisément l'expression de \dot{r} et $r\dot{\alpha}$:

$$\begin{cases} \dot{r} = v \cos \alpha - V, \\ r\dot{\alpha} = -v \sin \alpha. \end{cases}$$

En prenant le quotient on élimine dt et on trouve donc

$$\frac{dr}{r d\alpha} = -\cotan \alpha + \frac{V}{v} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Notons $\lambda = V/v > 1$ le rapport des vitesses respectives du chien et du maître. Après intégration, et compte tenu de ce que $r = r_0$ et $\alpha = \pi/2$ quand $t = 0$, il vient

$$\ln r = -\ln \sin \alpha + \lambda \ln \tan(\alpha/2) + \text{Cte} \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 \frac{\tan(\alpha/2)^\lambda}{\sin \alpha}$$

Nous en déduisons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = -\frac{v \sin \alpha}{r} = -\frac{v}{r_0} (\sin \alpha)^2 \tan(\alpha/2)^{-\lambda}.$$

En posant $\theta = \tan(\alpha/2)$ et $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\theta}{1 + \theta^2}$, on trouve

$$dt = -\frac{r_0}{v} \frac{\tan(\alpha/2)^\lambda}{(\sin \alpha)^2} d\alpha = -\frac{r_0}{2v} (1 + \theta^2) \theta^{\lambda-2} d\theta,$$

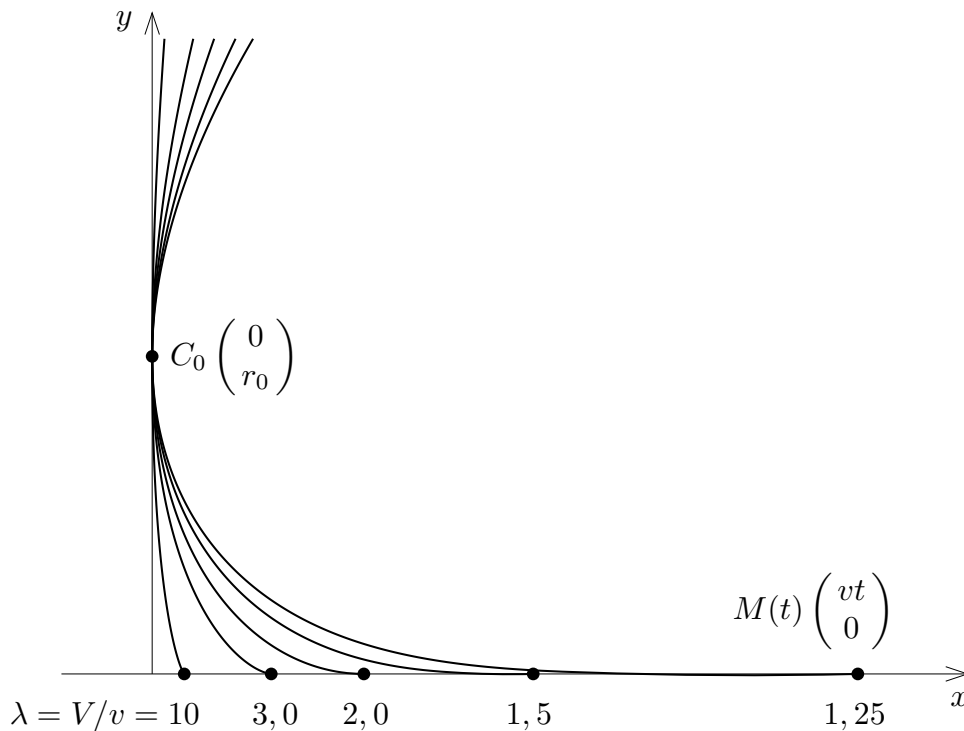
$$t = \frac{r_0}{2v} \left(\frac{1 - \theta^{\lambda-1}}{\lambda - 1} + \frac{1 - \theta^{\lambda+1}}{\lambda + 1} \right)$$

compte tenu du fait que $\theta = 1$ en $t = 0$. Par substitution dans les expressions de x et y , et d'après l'égalité $\tan \alpha = 2\theta/(1 - \theta^2)$, on obtient les équations paramétriques de la « courbe du chien », à savoir

$$\begin{cases} x = \frac{r_0}{2} \left(\frac{1 - \theta^{\lambda-1}}{\lambda - 1} + \frac{1 - \theta^{\lambda+1}}{\lambda + 1} \right) - \frac{r_0}{2} (1 - \theta^2) \theta^{\lambda-1} \\ y = r_0 \theta^\lambda \\ t = \frac{r_0}{2v} \left(\frac{1 - \theta^{\lambda-1}}{\lambda - 1} + \frac{1 - \theta^{\lambda+1}}{\lambda + 1} \right), \quad \theta \in [0, 1]. \end{cases}$$

Au terme de la poursuite ($y = \theta = 0$), le maître a parcouru la distance

$$x = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} r_0 \quad \text{pendant le temps} \quad t = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \frac{r_0}{v}.$$



Remarque. Les équations ont encore un sens lorsque $t < 0$. On a dans ce cas $\alpha \in]\pi/2, \pi[$, $\theta \in]1, +\infty[$, le chien se trouve dans le quadrant $x > 0$, $y > r_0$ et se dirige vers le maître qui parcourt de son côté la demi-droite $x < 0$.

4. Équations différentielles du second ordre

4.1. Remarques générales

On considère une équation différentielle

$$(E) \quad y'' = f(x, y, y')$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$, est une application continue localement lipschitzienne en ses deuxième et troisième variables.

La solution générale y définie au voisinage d'un point x_0 dépend alors de deux paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui apparaissent le plus souvent comme des constantes d'intégration :

$$y(x) = \varphi(x, \lambda, \mu).$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'on peut choisir $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$ comme paramètres.

Il existe très peu de cas où on sait résoudre explicitement une équation du second ordre : même les équations linéaires du second ordre sans second membre ne se résolvent pas explicitement en général.

4.2. Équations incomplètes du second ordre

a) Équations du type (E) : $y'' = f(x, y')$

Si on considère la nouvelle fonction inconnue $v = y'$, (E) se ramène à l'équation du premier ordre

$$v' = f(x, v).$$

La solution générale de cette dernière sera de la forme $v(x, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on obtient donc

$$y(x) = \int_{x_0}^x v(t, \lambda) dt + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

b) Équations du type (E) : $y'' = f(y, y')$

La méthode consiste à prendre y comme nouvelle variable et $v = y'$ comme variable fonction inconnue (en la variable y).

- Il peut y avoir des solutions constantes $y(x) = y_0$, auquel cas y ne peut être choisi comme variable. On a donc des solutions singulières

$$y(x) = y_j, \quad \text{avec} \quad f(y_j, 0) = 0.$$

- Cas général

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy'}{dy} = v \frac{dv}{dy}$$

L'équation se ramène alors à l'équation du premier ordre

$$v \frac{dv}{dy} = f(y, v).$$

La résolution de cette dernière donne une solution générale $v(y, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit ensuite résoudre

$$y' = v(y, \lambda) \Leftrightarrow \frac{dy}{v(y, \lambda)} = dx,$$

d'où la solution générale

$$\int \frac{dy}{v(y, \lambda)} = x + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Équations du type (E) : $y'' = f(y)$

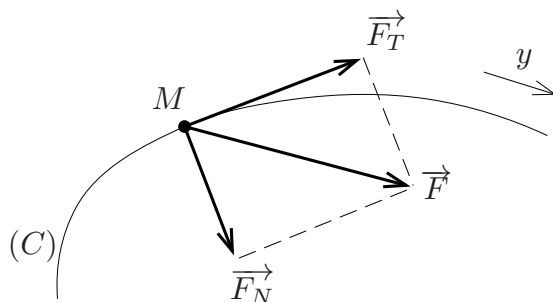
C'est un cas particulier du cas b) précédent, mais on peut ici préciser davantage la méthode de résolution. On a en effet

$$y'y'' = f(y)y',$$

et en intégrant il vient $\frac{1}{2}y'^2 = \varphi(y) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où φ est une primitive de f . On obtient donc

$$\begin{aligned} y' &= \pm \sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)}, \\ \pm \frac{dy}{\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)}} &= dx, \\ \pm \int_{y_0}^y \frac{du}{\sqrt{2(\varphi(u) + \lambda)}} &= x + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Interprétation physique. On étudie la loi du mouvement d'un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur une courbe (C) . On suppose que la composante tangentielle \vec{F}_T de la force \vec{F} qui s'exerce sur M ne dépend que de la position de M , repérée par son abscisse curviligne y sur (C) .



Par hypothèse, il existe une fonction f telle que $F_T = f(y)$. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$F_T = m\gamma_T = m \frac{d^2y}{dt^2},$$

d'où

$$(E) \quad my'' = f(y)$$

avec $y'' = d^2y/dt^2$. On en déduit $my'y'' - f(y)y' = 0$, donc $\frac{1}{2} my'^2 - \varphi(y) = \lambda$, où φ est une primitive de f . La quantité $\frac{1}{2} my'^2 = E_c$ est "l'énergie cinétique" de la particule tandis que

$$-\varphi(y) = - \int f(y)dy = - \int \vec{F}_T(M) \cdot d\vec{M} = - \int \vec{F}(M) \cdot d\vec{M}$$

est "l'énergie potentielle" E_p . L'énergie totale

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} my'^2 - \varphi(y)$$

est constante quel que soit le mouvement du point M . On dit que $U(y, y') = \frac{1}{2} my'^2 - \varphi(y)$ est une "intégrale première" de (E) (dans le sens que c'est une relation différentielle obtenue à l'aide d'une première intégration de l'équation du second ordre, une deuxième intégration restant nécessaire pour établir la loi du mouvement). Si E_t désigne l'énergie totale, la loi du mouvement est donnée par

$$t - t_0 = \pm \sqrt{m/2} \int_{y_0}^y \frac{du}{\sqrt{E_t + \varphi(u)}}$$

au voisinage de tout donnée initiale (t_0, y_0, y'_0) telle que $\frac{1}{2}my_0'^2 = E_t + \varphi(y_0) > 0$.

Complément. Supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit de classe C^1 , strictement décroissante et telle que $f(0) = 0$; on a donc en particulier $f(y) > 0$ pour $y < 0$ et $f(y) < 0$ pour $y > 0$ (physiquement, ceci signifie que la force est une "force de rappel" vers la position neutre $y = 0$, dont l'intensité s'accroît avec la distance à la position neutre). Alors les solutions maximales $t \mapsto y(t)$ sont *périodiques*. Pour le voir, posons par exemple $\varphi(u) = \int_0^u f(y)dy$ et observons que φ est une fonction concave négative ou nulle, passant par un maximum en $\varphi(0) = 0$. Comme $\frac{1}{2}my'^2 - \varphi(y) = E_t$ avec $y'^2 \geq 0$ et $-\varphi(y) > 0$ si $y \neq 0$, les solutions non triviales n'existent que pour une valeur $E_t > 0$ de l'énergie totale, et elles vérifient $|y'| \leq \sqrt{2E_t/m}$ et $-\varphi(y) \leq E_t$. De plus, si $a < 0$, $b > 0$ sont les uniques réels négatif et positif tels que $\varphi(a) = \varphi(b) = -E_t$, on a $a \leq y(t) \leq b$ pour tout t . Ceci implique déjà que les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} tout entier [si par exemple une solution maximale n'était définie que sur un intervalle ouvert $]t_1, t_2[$, le critère de Cauchy uniforme montrerait que y se prolonge par continuité à droite en t_1 et à gauche en t_2 , puisque y est lipschitzienne de rapport $\leq \sqrt{2E_t/m}$, et de même y' et y'' se prolongeraient grâce à la relation $y'' = \frac{1}{m}f(y)$; l'existence de solutions locales au voisinage de t_1 et t_2 contredirait alors la maximalité de y]. La relation $\frac{1}{2}my'^2 - \varphi(y) = E_t$ montre que $y' \neq 0$ lorsque $a < y < b$

(car on a alors $-\varphi(y) < E_t$). Par continuité, la fonction y' est donc de signe constant sur tout intervalle de temps où $a < y < b$. La solution explicite donnée plus haut montre que y est alternativement croissant de a à b puis décroissant de b à a , avec demi-période

$$\frac{T}{2} = \sqrt{m/2} \int_a^b \frac{du}{\sqrt{E_t + \varphi(u)}},$$

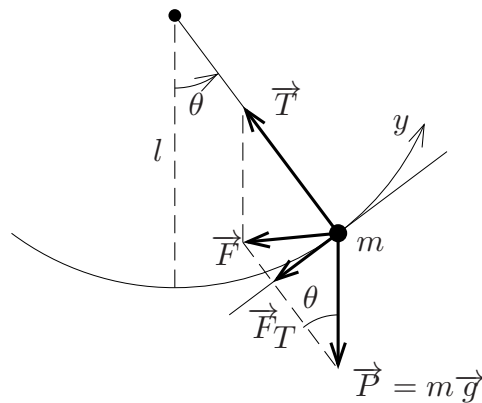
et, en choisissant t_0 tel que $y(t_0) = \min y = a$, on a les relations

$$t = t_0 + \sqrt{m/2} \int_a^y \frac{du}{\sqrt{E_t + \varphi(u)}} + nT, \quad t \in [t_0 + nT, t_0 + nT + T/2],$$

$$t = t_0 - \sqrt{m/2} \int_a^y \frac{du}{\sqrt{E_t + \varphi(u)}} + (n+1)T, \quad t \in [t_0 + nT + T/2, t_0 + (n+1)T].$$

On observera que l'intégrale donnant la période T est convergente, car on a $\varphi'(a) = f(a) > 0$, $\varphi'(b) = f(b) < 0$, de sorte que $E_t + \varphi(u) \sim f(a)(u - a)$ au voisinage de a , et de même au voisinage de b .

Exemple. Mouvement d'un pendule simple de masse m suspendu à un fil de longueur l .



On a ici $y = l\theta$ et $F_T = P \sin \theta = -mg \sin \theta$, d'où

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta,$$

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

L'énergie totale est

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} m y'^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} ml^2 \theta'^2 - mgl \cos \theta.$$

Les solutions $t \mapsto \theta(t)$ vérifient

$$\theta'^2 - \frac{2g}{l} \cos \theta = \lambda = \frac{2E_t}{ml^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\pm \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda + \frac{2g}{l} \cos \varphi}} = t - t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale ne se calcule pas explicitement, sauf si $\lambda = \frac{2g}{l}$, auquel cas

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{2 \cos \varphi/2} = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right),$$

et le pendule atteint la position verticale haute $\theta = \pm\pi$ en un temps infini. Dans les autres cas, les solutions maximales sont périodiques. Si $\lambda < 2g/l$, l'équation différentielle implique $\cos \theta \geq -\lambda l/2g > -1$ et l'amplitude angulaire est donc majorée en valeur absolue par une amplitude maximale $\theta_m \in]0, \pi[$ telle que $\cos \theta_m = -\lambda l/2g$; dans ce cas le mouvement est oscillatoire autour de la position d'équilibre $\theta = 0$ (ceci correspond à la situation étudiée dans la remarque, avec une fonction $f(\theta) = -\sin \theta$ strictement décroissante sur $[-\theta_m, \theta_m]$). La demi-période est donnée par

$$\frac{T}{2} = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda + \frac{2g}{l} \cos \varphi}} = 2 \int_0^{\theta_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda + \frac{2g}{l} \cos \varphi}}.$$

Si $\lambda > 2g/l$, on n'est plus dans la situation de la remarque, mais on a cependant encore un mouvement périodique de demi-période

$$\frac{T}{2} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda + \frac{2g}{l} \cos \varphi}},$$

le pendule effectuant des rotations complètes sans jamais changer de sens de rotation.

En physique, on s'intéresse généralement aux oscillations de faible amplitude du pendule. Ceci permet de faire l'approximation usuelle $\sin \theta \simeq \theta$ et on obtient alors les solutions approchées classiques $\theta = \theta_m \cos \omega(t - t_0)$ avec $\omega = \sqrt{g/l}$. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 2.4 du chapitre XI, et nous indiquerons en particulier une méthode permettant d'évaluer l'erreur commise.

4.3. Équations linéaires homogènes du second ordre

La théorie générale des équations et systèmes différentiels linéaires sera faite au chapitre suivant. Indiquons un cas où l'on peut se ramener à un calcul de primitives. Soit

$$(E) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Supposons qu'on connaisse une solution particulière $y_{(1)}$ de (E). On peut alors chercher la solution générale par la méthode de variation des constantes :

$$y(x) = \lambda(x)y_{(1)}(x).$$

Il vient

$$a(x) \left(\lambda'' y_{(1)} + 2\lambda' y'_{(1)} + \lambda y''_{(1)} \right) + b(x) \left(\lambda' y_{(1)} + \lambda y'_{(1)} \right) + c(x) \lambda y_{(1)} = 0,$$

$$\lambda \left(a(x) y''_{(1)} + b(x) y'_{(1)} + c(x) y_{(1)} \right) + \lambda' \left(2a(x) y'_{(1)} + b(x) y_{(1)} \right) + \lambda'' a(x) y_{(1)} = 0,$$

$$\lambda' \left(2a(x) y'_{(1)} + b(x) y_{(1)} \right) + \lambda'' a(x) y_{(1)} = 0.$$

La fonction $\mu = \lambda'$ est donc solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui se peut se récrire

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\lambda''}{\lambda'} = -2 \frac{y'_{(1)}}{y_{(1)}} - \frac{b(x)}{a(x)}.$$

La solution générale est donnée par $\mu = \alpha\mu_{(1)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, d'où $\lambda = \alpha\lambda_{(1)} + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, où $\lambda_{(1)}$ est une primitive de $\mu_{(1)}$. La solution générale de (E) est donc :

$$y(x) = \alpha\lambda_{(1)}(x)y_{(1)}(x) + \beta y_{(1)}(x), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice. Résoudre $x^2(1-x^2)y'' + x^3y' - 2y = 0$ en observant que $y_{(1)}(x) = x^2$ est solution.

4.4.* Équations différentielles issues de problèmes variationnels

Les problèmes variationnels conduisent très souvent à la résolution d'équations différentielles du second ordre. Avant de donner un exemple, nous allons résoudre un problème variationnel général dans une situation simple. On considère un opérateur fonctionnel (c'est-à-dire une fonction dont la variable est une fonction)

$$\begin{aligned} \varphi : C^2([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx, \end{aligned}$$

où $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ est une application de classe C^2 . Le problème typique du calcul des variations est de rechercher les extrema de $\varphi(u)$ lorsque u décrit $C^2([a, b])$ avec la « contrainte aux bornes » suivante : les valeurs aux bornes de l'intervalle $u(a) = u_1$, $u(b) = u_2$ sont fixées.

Soit $h \in C^2([a, b])$ avec $h(a) = h(b) = 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $u + th$ vérifie la même contrainte aux bornes que la fonction u . Si u est un extremum de φ sous les conditions précisées plus haut, alors $t = 0$ est un extremum de la fonction d'une variable réelle

$$\psi_h(t) = \varphi(u + th) = \int_a^b F(x, u(x) + th(x), u'(x) + th'(x)) dx.$$

On doit donc avoir $\psi'_h(0) = 0$, et ceci quel que soit la fonction $h \in C^2([a, b])$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme il vient

$$\psi'_h(0) = \int_a^b (h(x)F'_y(x, u, u') + h'(x)F'_z(x, u, u')) dx.$$

En intégrant par parties le terme en $h'(x)$ on obtient

$$\psi'_h(0) = \int_a^b h(x) \left(F'_y(x, u, u') - \frac{d}{dx} F'_z(x, u, u') \right) dx.$$

Par densité de l'ensemble des fonctions h considérées dans l'espace $L^1([a, b])$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$, on aura donc $\psi'_h(0) = 0$ pour tout h si et seulement si u satisfait l'équation différentielle

$$(E) \quad F'_y(x, u, u') - \frac{d}{dx} \left(F'_z(x, u, u') \right) = 0,$$

ou encore :

$$F'_y(x, u, u') - F''_{xz}(x, u, u') - u' F''_{yz}(x, u, u') - u'' F''_{zz}(x, u, u') = 0.$$

Cette équation différentielle du second ordre en u est appelée *équation d'Euler-Lagrange* associée au problème variationnel défini par l'opérateur φ .

Application à la chaînette*. On cherche à déterminer la courbe représentant la position à l'équilibre d'un fil souple inextensible de masse linéique $\mu = dm/ds$ constante, lorsque ce fil est suspendu par ses extrémités en des points situés à la même hauteur (cette courbe est appelée « chaînette »). On admettra comme physiquement évident que la courbe cherchée est symétrique et située dans le plan vertical contenant les extrémités. Soit Oxy un repère orthonormé de ce plan tel que Oy est la verticale orienté vers le haut et passant par le point le plus bas de la courbe, les extrémités ayant pour coordonnées $(\pm a, 0)$. Soit enfin $s \in [-\ell/2, \ell/2]$ l'abscisse curviligne mesurée le long du fil avec le point le plus bas pris comme origine (ℓ désigne la longueur du fil). La position d'équilibre correspond à la position la plus basse possible du centre de gravité G . Par symétrie, on a (x étant choisi comme variable) :

$$y_G = \frac{1}{m/2} \int_0^a y \, dm = \frac{1}{\mu\ell/2} \int_0^a y \mu \, ds = \frac{2}{\ell} \int_0^a y \, ds,$$

où $m = \mu\ell$ est la masse du fil. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\ell} [ys]_0^a - \frac{2}{\ell} \int_0^a s \, dy \\ &= -\frac{2}{\ell} \int_0^a s \, dy = -\frac{2}{\ell} \int_0^a s \sqrt{s'^2 - 1} \, dx \end{aligned}$$

avec $s' = ds/dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}/dx$. Le problème revient donc à déterminer les fonctions $s = s(x)$ réalisant le maximum de l'opérateur

$$\varphi(s) = \int_0^a s \sqrt{s'^2 - 1} \, dx,$$

avec les contraintes $s(0) = 0$, $s(a) = \ell/2$. L'équation d'Euler-Lagrange appliquée à $F(x, s, t) = s\sqrt{t^2 - 1}$ donne

$$\sqrt{s'^2 - 1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{ss'}{\sqrt{s'^2 - 1}} \right) = \sqrt{s'^2 - 1} - \frac{s'^2 + ss''}{\sqrt{s'^2 - 1}} + \frac{ss'^2 s''}{(s'^2 - 1)^{3/2}} = 0.$$

Après multiplication par $(s'^2 - 1)^{3/2}$ on obtient l'équation

$$(E) \quad (s'^2 - 1)^2 - (s'^2 - 1)(s'^2 + ss'') + ss'^2 s'' = 1 - s'^2 + ss'' = 0.$$

On résout cette équation grâce à la méthode décrite au paragraphe 4.2.b), consistant à choisir s comme nouvelle variable et $v = s'$ comme nouvelle fonction inconnue. Il vient successivement

$$\begin{aligned} s'' &= \frac{ds'}{dx} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{ds'}{ds} = v \frac{dv}{ds}, \\ (E) &\Rightarrow 1 - v^2 + sv \frac{dv}{ds} = 0, \\ \frac{ds}{s} &= \frac{v dv}{v^2 - 1} \Rightarrow \ln s = \frac{1}{2} \ln(v^2 - 1) + C, \\ s &= \lambda \sqrt{v^2 - 1} = \lambda \sqrt{s'^2 - 1}, \\ s' &= \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}} \Rightarrow dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/\lambda^2}}, \\ x &= \lambda \operatorname{Argsinh} \frac{s}{\lambda} \Rightarrow s = \lambda \sinh \frac{x}{\lambda}, \\ \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{\lambda}. \end{aligned}$$

On en déduit l'équation de la chaînette, en tenant compte du fait que $y(a) = 0$:

$$y = \lambda \left(\cosh \frac{x}{\lambda} - \cosh \frac{a}{\lambda} \right).$$

Le paramètre λ se calcule à partir de la relation $\lambda \sinh a/\lambda = \ell/2$, obtenue en égalant $s(a) = \ell/2$.

Remarque. Notre raisonnement n'est pas parfaitement rigoureux dans la mesure où $F(x, s, t) = s\sqrt{t^2 - 1}$ est de classe C^2 seulement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{|t| > 1\}$, alors que $|s'| \geq 1$ mais prend la valeur 1 pour $x = 0$ (on notera que $ds/dx = 1/\cos \theta$ où θ est l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe $0x$). Supposons $s'(x) > 1$ pour $x > 0$, comme c'est le cas pour la solution physique observée. Le raisonnement de dérivation sous la signe somme et l'intégration par parties appliqués dans les considérations générale du début fonctionnent encore pour $|t|$ petit si on suppose $h(x) = 0$ sur un voisinage de 0 (et aussi bien sûr $h(a) = 0$).

Ces fonctions h sont encore denses dans $L^1([0, a])$, donc s doit effectivement satisfaire l'équation différentielle (E) sur $]0, a[$.

Calcul de géodésiques.** Nous étudions ici une autre application importante du calcul des variations, à savoir le calcul des géodésiques d'une surface (ou d'une variété de dimension plus grande). Si nous avons une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ donnée comme un graphe $z = h(x, y)$ d'une fonction $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'élément de longueur infinitésimal de la surface S est donné pour tout $(x, y) \in \Omega$ par

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (h'_x dx + h'_y dy)^2 \\ &= (1 + h'^2_x) dx^2 + 2h'_x h'_y dx dy + (1 + h'^2_y) dy^2. \end{aligned}$$

Plus généralement, une *métrique riemannienne* sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est une expression de l'élément de longueur infinitésimal par une forme quadratique définie positive, dépendant du point $x \in \Omega$ considéré :

$$ds^2 = q(x, dx) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij}(x) dx_i dx_j$$

(avec une matrice symétrique $(a_{ij}(x))$ définie positive). On supposera en outre que les coefficients $a_{ij}(x)$ sont suffisamment réguliers, disons de classe C^2 . Étant donné une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ de classe C^1 , sa longueur (riemannienne) est par définition

$$ds = \|\gamma'(t) dt\|_q = \sqrt{q(\gamma(t), \gamma'(t) dt)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t)} dt,$$

$$\text{lg}(\gamma) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t)} dt.$$

Pour deux points $x, y \in \Omega$, la distance géodésique $d_q(x, y)$ est par définition $\inf_{\gamma} \text{lg}(\gamma)$ pour tous les chemins $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ de classe C^1 d'extrémités $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. Si un chemin réalise l'infimum, on dit qu'il s'agit d'une géodésique de la métrique riemannienne (on notera qu'en général un tel chemin n'existe pas nécessairement, et s'il existe il peut ne pas être unique). Un problème fondamental est de déterminer l'équation des géodésiques afin entre autres de calculer la distance géodésique. Pour cela il est commode d'introduire « l'énergie d'un chemin » qui est par définition

$$E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_q^2 dt = \int_a^b \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b \|\gamma'(t)\|_q dt \right)^2 = \left(\int_a^b 1 \cdot \|\gamma'(t)\|_q dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b \|\gamma'(t)\|_q^2 dt$$

soit $\text{lg}(\gamma) \leq ((b - a)E(\gamma))^{1/2}$, avec égalité si et seulement si

$$\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|_q = \text{Cte},$$

condition qui peut toujours être réalisée en reparamétrisant le chemin γ par son abscisse curviligne s . Il en résulte que les chemins qui minimisent l'énergie sont exactement les géodésiques paramétrées par l'abscisse curviligne (à un facteur constant près). Or la fonctionnelle d'énergie $\gamma \mapsto E(\gamma)$ admet pour différentielle

$$E'(\gamma) \cdot h = \int_a^b \left(\sum_{i, j, k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) h_k(t) + 2 \sum_{i, j} a_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) h'_j(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \sum_k h_k(t) \left(\sum_{i, j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) - 2 \frac{d}{dt} \sum_i a_{ik}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right) dt$$

après intégration par parties (on suppose bien sûr $h_j(a) = h_j(b) = 0$). Il en résulte que le coefficient de chaque terme $h_k(t)$ doit être identiquement nul. En multipliant par $-1/2$ et en développant la dérivée d/dt , on obtient le système d'équations d'Euler-Lagrange caractérisant les géodésiques :

$$\sum_i a_{ik}(\gamma(t)) \gamma_i''(t) + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right) (\gamma(t)) \gamma_i'(t) \gamma_j'(t) = 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

5. Problèmes

5.1. On considère l'équation différentielle à variables séparées

$$(F_\alpha) \quad \frac{dy}{dt} = y^\alpha + 1, \quad \alpha > 0.$$

(a) Exprimer la solution générale de (F_α) en introduisant la fonction auxiliaire

$$G(y) = \int_0^y \frac{dx}{x^\alpha + 1}$$

(b) Plus précisément :

- Déterminer (en distinguant les deux cas $0 < \alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$) le comportement de $G(y)$ sur $[0, +\infty[$;
- en déduire dans chaque cas l'allure des solutions maximales de (F_α) ;
- traiter complètement et explicitement les deux cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

5.2. On considère l'équation différentielle

$$xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x.$$

(a) Possède-t-elle une solution particulière de type polynôme ? En donner la solution générale.

(b) Quelle est l'équation de l'isocline de pente 0 dans le nouveau repère de vecteurs de base $((1, 1), (0, 1))$? Dessiner cette isocline en précisant les tangentes aux points d'abscisse 0 dans l'ancien repère.

(c) Dessiner l'allure générale des solutions.

(d) Soit (x_0, y_0) un point de \mathbb{R}^2 . Combien passe-t-il de solutions maximales de classe C^1 par (x_0, y_0) ? On précisera l'intervalle de définition de ces solutions et le cas échéant on indiquera les solutions globales.

5.3. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - (2x - 1)y + x^2 - x + 1.$$

- (a) Déterminer explicitement les solutions de cette équation ; on pourra commencer par chercher s'il existe des solutions polynomiales simples.
- (b) Montrer que les courbes intégrales maximales correspondant à des solutions non polynomiales forment deux familles de courbes se déduisant les unes des autres par translations. Tracer celles de ces courbes qui sont asymptotes à l'axe $y'Oy$.

5.4. On considère l'équation différentielle (1) $y'^2 = yy' + x$, où y est une fonction de x à valeurs réelles, de classe C^1 par morceaux.

- (a) Par quels points (x, y) de \mathbb{R}^2 passe-t-il une solution de (1) ? Faire un graphique.
- (b) En paramétrant (1) par $dy = tdx$, montrer que y est solution d'une équation différentielle (2) $f(y, t, \frac{dy}{dt}) = 0$.
- (c) Intégrer (2) puis (1) ; on pourra poser $t = \tan \varphi$ avec $\varphi \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. On obtient une famille de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ .
- (d) Pour $\lambda = 0$ préciser les limites quand $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ de $x, y, y/x$, puis préciser $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$. Quelle est la norme euclidienne du vecteur $(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi})$? On se rappellera que $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$.
- (e) On pose $z(\varphi) = \sqrt{(\frac{dx}{d\varphi})^2 + (\frac{dy}{d\varphi})^2}$ pour $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Etudier les variations de $z(\varphi)$ puis tracer la courbe C_0 .

5.5. On considère la famille de paraboles (P_λ) d'équation

$$P_\lambda : x = y^2 + \lambda y.$$

- (a) Montrer que ces courbes sont solutions d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.
- (b) Déterminer la famille des courbes orthogonales aux courbes (P_λ) .

5.6. On considère la famille de courbes (C_λ) dans \mathbb{R}^2 définies par l'équation

$$x^2 - y^2 + \lambda y^3 = 0,$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Tracer les courbes $(C_0), (C_1)$ dans un repère orthonormé Oxy (unité : 4 cm). Quelle relation existe-t-il entre (C_1) et (C_λ) ?

- (b) Montrer que les courbes (C_λ) sont solutions d'une équation différentielle du premier ordre.
- (c) Déterminer l'équation des trajectoires orthogonales aux courbes (C_λ) . Quelle est la nature de ces courbes ? Représenter la trajectoire orthogonale passant par le point $(1, 0)$ sur le même schéma que (C_0) et (C_1) .

5.7. On considère dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 la famille de courbes

$$(C_\lambda) \quad x^4 = y^4 + \lambda x.$$

- (a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la famille (C_λ) .
- (b) Écrire l'équation différentielle des trajectoires orthogonales aux courbes (C_λ) .

En observant que cette équation est d'un type classique, déterminer l'équation des trajectoires orthogonales.

5.8. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \quad y' = t^2 + y^2 + 1; \quad y(0) = 0.$$

- (a) Soient T et R deux réels > 0 , et soit $\Omega(T, R)$ le rectangle défini par les inégalités

$$0 \leq t \leq T; \quad -R \leq y \leq R.$$

- (α) Montrer que si la condition

$$T^2 + R^2 + 1 \leq R/T$$

est vérifiée, alors $\Omega(T, R)$ est un rectangle de sécurité pour (P).

- (β) Montrer que pour $T > 0$ suffisamment petit, par exemple pour $T < T_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, il existe $R > 0$ tel que $\Omega(T, R)$ soit un rectangle de sécurité pour (P).

- (γ) Montrer que $\Omega(1/3, 2)$ est un rectangle de sécurité pour (P), et en déduire avec précision que (P) admet une solution y et une seule sur l'intervalle $[0, 1/3]$.

- (b) On va montrer que la solution y de (P) mise en évidence en (a) (γ) ne se prolonge pas à $[0, +\infty[$. On introduit à cet effet le problème de Cauchy auxiliaire

$$(P_1) \quad z' = z^2 + 1, \quad z(0) = 0,$$

où z désigne une nouvelle fonction inconnue de t .

- (α) Déterminer explicitement l'unique solution z de (P_1) , et indiquer son intervalle de définition maximal.

(β) Soit $[0, T]$ un intervalle sur lequel y et z soient simultanément définies. Montrer que $u = y - z$ est solution d'un problème de Cauchy

$$(P_2) \quad u' = a(t)u + b(t); \quad u(0) = 0;$$

où b vérifie $b(t) \geq 0$ pour tout t dans $[0, T]$. En déduire que $y(t) \geq z(t)$ pour tout t dans $[0, T]$.

(γ) Déduire de ce qui précède que si $T \geq \frac{\pi}{2}$, alors y ne se prolonge certainement pas jusqu'à $t = T$.

(δ) Tracer avec le maximum de précision possible le graphe de y sur son intervalle de définition maximal $[0, T_1[$ (forme du graphe au voisinage de 0 ; sens de variation, convexité ; asymptote ; etc...).

5.9.** On appelle métrique de Poincaré du disque unité $D = \{|z| < 1\}$ du plan complexe la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}, \quad z = x + iy.$$

(a) Montrer (avec les notations du § 4.4, et en gardant les fonctions complexes dans les calculs) que la différentielle de l'énergie est donnée par

$$E(\gamma) \cdot h = 2 \operatorname{Re} \int_a^b \left(\frac{\gamma'(t)}{(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)})^2} \overline{h'(t)} + 2 \frac{\gamma(t)\gamma'(t)\overline{\gamma'(t)}}{(1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)})^3} \overline{h(t)} \right) dt.$$

En déduire que l'équation d'Euler-Lagrange des géodésiques est

$$\gamma''(t) + \frac{2\gamma'(t)^2\overline{\gamma(t)}}{1 - \gamma(t)\overline{\gamma(t)}} = 0.$$

(b) Montrer que le chemin $\gamma(t) = \tanh(kt)$ (qui décrit le diamètre $] - 1, 1[$ du disque) est solution de l'équation pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que si $t \mapsto \gamma(t)$ est solution, alors $t \mapsto \lambda\gamma(t)$ est encore solution pour tout nombre complexe λ de module 1, et également que $h_a \circ \gamma$ est solution, pour toute homographie complexe h_a de la forme

$$h_a(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}, \quad a \in D.$$

(d) En utilisant un argument d'unicité des solutions du problème de Cauchy, montrer que les géodésiques sont toutes données par $\gamma(t) = h_a(\lambda \tanh(kt))$, $a \in D$, $|\lambda| = 1$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ [on pourra calculer $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$].

(e) Montrer que les trajectoires des géodésiques sont les diamètres et les arcs de cercle orthogonaux au cercle unité $|z| = 1$.

Chapitre VI

Systèmes différentiels linéaires

Les systèmes différentiels linéaires ont une grande importance pratique, car de nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser par de tels systèmes, au moins en première approximation. On sait d'autre part résoudre complètement les systèmes à coefficients constants, le calcul des solutions se ramenant à des calculs d'algèbre linéaire (diagonalisation ou triangulation de matrices). Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Généralités

1.1. Définition

Un système différentiel linéaire du premier ordre dans \mathbb{K}^m est une équation

$$(E) \quad \frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t)$$

où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ est la fonction inconnue et où

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq m} \in M_m(\mathbb{K}), \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

sont des fonctions *continues* données :

$$A : I \rightarrow M_m(\mathbb{K}) = \{\text{matrices carrées } m \times m \text{ sur } \mathbb{K}\}, \\ B : I \rightarrow \mathbb{K}^m,$$

définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On observe que la fonction $f(t, Y) = A(t)Y + B(t)$ est continue sur $I \times \mathbb{K}^m$ et lipschitzienne en Y de rapport

$$k(t) = \|A(t)\|.$$

D'après le critère V 3.4 sur l'existence de solutions globales, on peut énoncer :

Théorème. *Par tout point $(t_0, V_0) \in I \times \mathbb{K}^m$ il passe une solution maximale unique, définie sur I tout entier.*

1.2. Cas d'un système linéaire sans second membre

On entend par là un système linéaire avec $B = 0$ identiquement :

$$(E_0) \quad \frac{dY}{dt} = A(t)Y.$$

Soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions maximales. Alors pour tous $Y_{(1)}, Y_{(2)} \in \mathcal{S}$ et tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ on a $\lambda_1 Y_{(1)} + \lambda_2 Y_{(2)} \in \mathcal{S}$, donc \mathcal{S} est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Considérons l'application d'évaluation au temps t_0 :

$$\begin{aligned} \phi_{t_0} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ Y &\mapsto Y(t_0). \end{aligned}$$

ϕ_{t_0} est un isomorphisme linéaire, la surjectivité provenant du théorème d'existence, et l'injectivité du théorème d'unicité relatif au problème de Cauchy.

Conséquence. *L'ensemble \mathcal{S} des solutions maximales est un espace vectoriel de dimension m sur \mathbb{K} .*

1.3. Cas général

Revenons au système linéaire le plus général :

$$(E) \quad \frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t).$$

On sait qu'il existe au moins une solution globale $Y_{(1)}$. Si Y est une solution quelconque, il est clair que $Z = Y - Y_{(1)}$ satisfait l'équation sans second membre (E_0) : $dZ/dt = A(t)Z$, et réciproquement. Par conséquent, l'ensemble des solutions maximales est donné par

$$Y_{(1)} + \mathcal{S} = \{Y_{(1)} + Z ; Z \in \mathcal{S}\},$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des solutions maximales de l'équation sans second membre (E_0) associée. L'ensemble $Y_{(1)} + \mathcal{S}$ des solutions est un translaté de \mathcal{S} , c'est donc un espace affine de dimension m sur \mathbb{K} , admettant \mathcal{S} comme direction vectorielle.

2. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Ce sont les systèmes de la forme

$$(E) \quad \frac{dY}{dt} = AY + B(t)$$

où la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est indépendante de t .

2.1. Solutions exponentielles élémentaires de $\frac{dY}{dt} = AY$

On cherche une solution de la forme $Y(t) = e^{\lambda t}V$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, $V \in \mathbb{K}^m$ sont des constantes. Cette fonction est solution si et seulement si $\lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}AV$, soit

$$AV = \lambda V.$$

On est donc amené à chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

Cas simple : A est diagonalisable.

Il existe alors une base (V_1, \dots, V_m) de \mathbb{K}^m constituée de vecteurs propres de A , de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. On obtient donc m solutions linéairement indépendantes

$$t \mapsto e^{\lambda_j t}V_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

La solution générale est donnée par

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + \dots + \alpha_m e^{\lambda_m t}V_m, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Lorsque A est n'est pas diagonalisable, on a besoin en général de la notion d'exponentielle d'une matrice. Toutefois le cas des systèmes 2×2 à coefficients constants est suffisamment simple pour qu'on puisse faire les calculs « à la main ». Le lecteur pourra se reporter au § X 2.2 pour une étude approfondie de ce cas.

2.2. Exponentielle d'une matrice

La définition est calquée sur celle de la fonction exponentielle complexe usuelle, calculée au moyen du développement en série entière.

Définition. Si $A \in M(\mathbb{K})$, on pose $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Munissons $M_n(\mathbb{K})$ de la norme $\| \cdot \|$ des opérateurs linéaires sur \mathbb{K}^m associée à la norme euclidienne (resp. hermitienne) de \mathbb{R}^m (resp. \mathbb{C}^m). On a alors

$$\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n,$$

de sorte que la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente. On voit de plus que

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Propriété fondamentale. Si $A, B \in M_m(\mathbb{K})$ commutent ($AB = BA$), alors

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Vérification. On considère la série produit $\sum \frac{1}{p!} A^p \cdot \sum \frac{1}{q!} B^q$, dont le terme général est

$$C_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} A^p B^q = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} A^p B^{n-p} = \frac{1}{n!} (A + B)^n$$

d'après la formule du binôme (noter que cette formule n'est vraie que si A et B commutent). Comme les séries de e^A et e^B sont absolument convergentes, on en déduit

$$e^A \cdot e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = e^{A+B}. \quad \square$$

On voit en particulier que e^A est une *matrice inversible*, d'inverse e^{-A} .

Remarque. La propriété fondamentale tombe en défaut lorsque A et B ne commutent pas. Le lecteur pourra par exemple calculer $e^A \cdot e^B$ et e^{A+B} avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. Que remarque-t-on ?

Méthode générale de calcul dans $M_n(\mathbb{C})$. Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ peut être mise sous forme de blocs triangulaires correspondant aux différents sous-espaces caractéristiques de A . Il existe donc une matrice de passage P , dont les colonnes sont constituées par des vecteurs formant des bases des sous-espaces caractéristiques, telle que

$$T = P^{-1}AP$$

soit une matrice triangulaire de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{T_s} \end{pmatrix}, \quad T_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de A . On a alors de façon évidente

$$T^n = \begin{pmatrix} T_1^n & & & \mathbf{0} \\ & T_2^n & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & T_s^n \end{pmatrix}, \quad e^T = \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & \mathbf{0} \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{T_s} \end{pmatrix}$$

Comme $A = PTP^{-1}$, il vient $A^n = PT^nP^{-1}$, d'où

$$e^A = Pe^T P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & \mathbf{0} \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{T_s} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On est donc ramené à calculer l'exponentielle e^B lorsque B est un bloc triangulaire de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \in M_p(\mathbb{K}),$$

où I est la matrice unité et N une matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. La puissance N^n comporte n diagonales nulles à partir de la diagonale principale (celle-ci incluse), en particulier $N^n = 0$ pour $n \geq p$. On obtient donc

$$e^N = I + \frac{1}{1!} N + \dots + \frac{1}{(p-1)!} N^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme I et N commutent, il vient finalement

$$e^B = e^{\lambda I} e^N = e^\lambda e^N \quad (\text{car } e^{\lambda I} = e^\lambda I).$$

Formule. $\det(e^A) = \exp(\text{tr}(A))$.

Vérification. Dans le cas d'un bloc triangulaire $B \in M_p(\mathbb{K})$, on trouve

$$\det(e^B) = (e^\lambda)^p \det(e^N) = e^{p\lambda} = \exp(\text{tr}(B)).$$

On en déduit donc

$$\det(e^T) = \det(e^{T_1}) \dots \det(e^{T_s}) = \exp(\text{tr}(T_1) + \dots + \text{tr}(T_s)) = \exp(\text{tr}(T))$$

Comme $A = PTP^{-1}$ et $e^A = Pe^T P^{-1}$, on a finalement

$$\det(e^A) = \det(e^T), \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(T) = \sum \text{valeurs propres.} \quad \square$$

2.3. Solution générale du système sans second membre $\frac{dY}{dt} = AY$

L'une des propriétés fondamentales de l'exponentiation des matrices réside dans le fait qu'elle est intimement liée à la résolution des équations linéaires à coefficients constants $dY/dt = AY$.

Théorème. La solution Y telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot V_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a $Y(t_0) = e^0 \cdot V_0 = IV_0 = V_0$.

D'autre part, la série entière

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

est de rayon de convergence $+\infty$. On peut donc dériver terme à terme pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} A^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p A^{p+1},$$

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A.$$

Par conséquent, on a bien

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt} \left(e^{(t-t_0)A} \cdot V_0 \right) = A e^{(t-t_0)A} \cdot V_0 = AY(t). \quad \square$$

En prenant $t_0 = 0$, on voit que la solution générale est donnée par $Y(t) = e^{tA} \cdot V$ avec $V \in \mathbb{K}^m$.

Le calcul de e^{tA} se ramène au cas d'un bloc triangulaire $B = \lambda I + N \in M_p(\mathbb{C})$. Dans ce cas on a $e^{tB} = e^{\lambda t I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}$, avec

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{t^n}{n!} N^n = \begin{pmatrix} 1 & Q_{12}(t) & \dots & Q_{1p}(t) \\ & 1 & Q_{23}(t) & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & Q_{p-1p}(t) \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $Q_{ij}(t)$ est un polynôme de degré $\leq j - i$, avec $Q_{ij}(0) = 0$. Les composantes de $Y(t)$ sont donc toujours des fonctions exponentielles-polynômes $\sum_{1 \leq j \leq s} P_j(t) e^{\lambda_j t}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres complexes de A (même si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

2.4. Solution générale de $\frac{dY}{dt} = AY + B(t)$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la *méthode de variation des constantes*, c'est-à-dire qu'on cherche une solution particulière sous la forme

$$Y(t) = e^{tA} \cdot V(t)$$

où V est supposée différentiable. Il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= Ae^{tA} \cdot V(t) + e^{tA} \cdot V'(t) \\ &= AY(t) + e^{tA} \cdot V'(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir V telle que $e^{tA} \cdot V'(t) = B(t)$, soit par exemple

$$V(t) = \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du, \quad t_0 \in I.$$

On obtient ainsi la solution particulière

$$Y(t) = e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du = \int_{t_0}^t e^{(t-u)A} B(u) du,$$

qui est la solution telle que $Y(t_0) = 0$. La solution générale du problème de Cauchy telle que $Y(t_0) = V_0$ est donc

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot V_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A} B(u) du.$$

Exemple. Une particule de masse m et de charge électrique q se déplace dans \mathbb{R}^3 sous l'action d'un champ magnétique \vec{B} et d'un champ électrique \vec{E} uniformes et indépendants du temps. Quelle est la trajectoire de la particule ?

Si \vec{V} et $\vec{\gamma}$ désignent respectivement la vitesse et l'accélération, la loi de Lorentz et le principe fondamental de la dynamique donnent l'équation

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = q\vec{V} \wedge \vec{B} + q\vec{E},$$

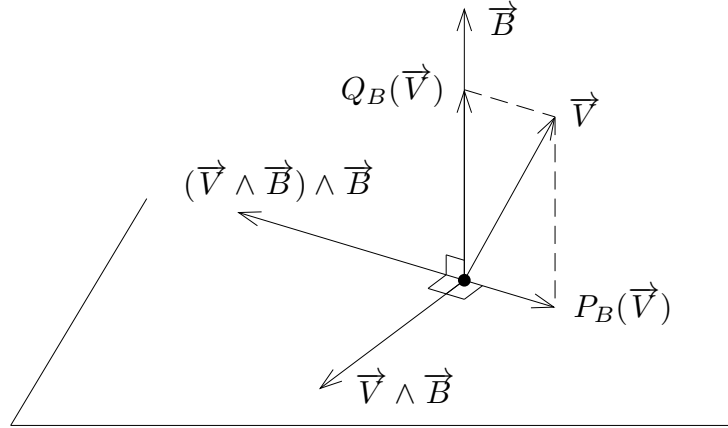
d'où

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{V} \wedge \vec{B} + \frac{q}{m} \vec{E}.$$

Il s'agit d'un système linéaire où la matrice A (à coefficients constants) est la matrice de l'application linéaire $\vec{V} \mapsto \frac{q}{m} \vec{V} \wedge \vec{B}$. On confondra dans la suite A avec cette application linéaire. Un calcul simple montre que

$$A^2(\vec{V}) = \left(\frac{q}{m}\right)^2 (\vec{V} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = -\left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 P_B(\vec{V})$$

où $B = \|\vec{B}\|$ et où P_B désigne le projection orthogonale sur la plan vectoriel de vecteur normal \vec{B} . Le schéma est le suivant :



On observe pour le calcul que $\vec{V} \wedge \vec{B} = P_B(\vec{V}) \wedge \vec{B}$. On en déduit alors facilement

$$A^{2p}(\vec{V}) = (-1)^p \left(\frac{q}{m}\right)^{2p} B^{2p} P_B(\vec{V}), \quad p \geq 1$$

$$A^{2p+1}(\vec{V}) = (-1)^p \left(\frac{q}{m}\right)^{2p+1} B^{2p} \vec{V} \wedge \vec{B},$$

cette dernière relation étant encore valable pour $p = 0$. En notant $\omega = \frac{q}{m} B$, on en déduit

$$e^{tA}(\vec{V}) = \vec{V} + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\omega^{2p} t^{2p}}{(2p)!} P_B(\vec{V}) + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\omega^{2p+1} t^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{1}{B} \vec{V} \wedge \vec{B}$$

$$= \vec{V} - P_B(\vec{V}) + \cos \omega t P_B(\vec{V}) + \sin \omega t \frac{1}{B} \vec{V} \wedge \vec{B}.$$

En l'absence de champ électrique, les équations du mouvement sont données par

$$\vec{V} = Q_B(\vec{V}_0) + \cos \omega t P_B(\vec{V}_0) + \sin \omega t \frac{1}{B} \vec{V}_0 \wedge \vec{B}$$

$$\overline{M_0 \dot{M}} = t Q_B(\vec{V}_0) + \frac{1}{\omega} \sin \omega t P_B(\vec{V}_0) + \frac{1 - \cos \omega t}{\omega B} \vec{V}_0 \wedge \vec{B}$$

où M_0 , \vec{V}_0 désignent la position et la vitesse en $t = 0$ et Q_B la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot \vec{B}$. Il est facile de voir qu'il s'agit d'un mouvement hélicoïdal uniforme de pulsation ω , tracé sur un cylindre d'axe parallèle à \vec{B} et de rayon $R = \|P_B(\vec{V}_0)\|/\omega$.

En présence d'un champ électrique \vec{E} , le calcul est aisé si \vec{E} est parallèle à \vec{B} . On a donc dans ce cas une solution particulière évidente $\vec{V} = t \frac{q}{m} \vec{E}$, d'où les lois générales des vitesses et du mouvement :

$$\vec{V} = Q_B(\vec{V}_0) + t \frac{q}{m} \vec{E} + \cos \omega t P_B(\vec{V}_0) + \sin \omega t \frac{1}{B} \vec{V}_0 \wedge \vec{B},$$

$$\overline{M_0 \dot{M}} = \left(t Q_B(\vec{V}_0) + t^2 \frac{q}{2m} \vec{E} \right) + \frac{1}{\omega} \sin \omega t P_B(\vec{V}_0) + \frac{1 - \cos \omega t}{\omega B} \vec{V}_0 \wedge \vec{B}.$$

Le mouvement est encore tracé sur un cylindre à base circulaire et sa pulsation est constante, mais le mouvement est accéléré dans la direction de l'axe.

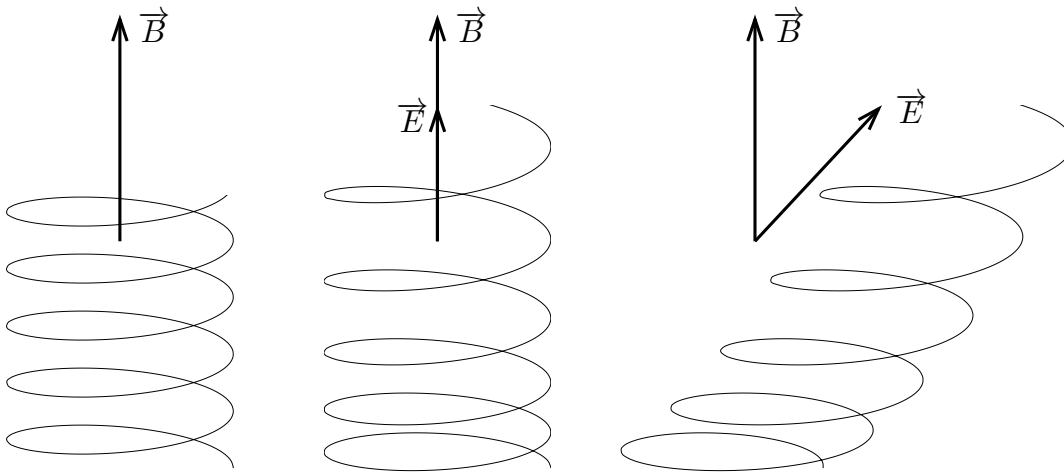
Dans le cas général, on décompose $\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp}$ en ses composantes parallèles et orthogonales à \vec{B} , et on observe qu'il existe un vecteur \vec{U} orthogonal à \vec{B} et \vec{E}_{\perp} , tel que $\vec{U} \wedge \vec{B} = \vec{E}_{\perp}$. L'équation différentielle devient

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{V} + \vec{U}) \wedge \vec{B} + \frac{q}{m} \vec{E}_{//}$$

de sorte que $\vec{V} + \vec{U}$ satisfait l'équation différentielle correspondant à un champ électrique parallèle à \vec{B} . En substituant $\vec{V} + \vec{U}$ à \vec{V} et $\vec{V}_0 + \vec{U}$ à \vec{V}_0 dans les formules, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{V} + \vec{U} &= Q_B(\vec{V}_0) + t \frac{q}{m} \vec{E}_{//} + \cos \omega t (P_B(\vec{V}_0) + \vec{U}) \\ &\quad + \sin \omega t \frac{1}{B} (\vec{V}_0 \wedge \vec{B} + \vec{E}_{\perp}), \\ \overline{M_0 \vec{M}} &= t(Q_B(\vec{V}_0) - \vec{U}) + t^2 \frac{q}{2m} \vec{E}_{//} + \frac{\sin \omega t}{\omega} (P_B(\vec{V}_0) + \vec{U}) \\ &\quad + \frac{1 - \cos \omega t}{\omega B} (\vec{V}_0 \wedge \vec{B} + \vec{E}_{\perp}). \end{aligned}$$

Il s'agit encore d'un mouvement de type hélicoïdal accéléré, mais cette fois le mouvement n'est plus tracé sur un cylindre.



3. Équations différentielles linéaires d'ordre p à coefficients constants

On considère ici une équation différentielle sans second membre

$$(E) \quad a_p y^{(p)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

où $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $t \mapsto y(t)$ est la fonction inconnue, et où les $a_j \in \mathbb{K}$ sont des constantes, $a_p \neq 0$.

D'après le paragraphe V 4.2, on sait que l'équation (E) est équivalente à un système différentiel (S) d'ordre 1 dans \mathbb{K}^p , qui est le système linéaire sans second membre $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{p-1} \end{pmatrix}, \quad c_j = -\frac{a_j}{a_p}.$$

Grâce au § 1.1, on peut donc énoncer :

Théorème. *L'ensemble \mathcal{S} des solutions globales de (E) est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension p .*

Plaçons-nous maintenant sur le corps \mathbb{C} (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les solutions réelles s'obtiennent simplement en prenant la partie réelle et la partie imaginaire des solutions complexes). Cherchons les solutions exponentielles de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme $y^{(j)}(t) = \lambda^j e^{\lambda t}$, on voit que y est solution de (E) si et seulement si λ est racine du *polynôme caractéristique*

$$P(\lambda) = a_p \lambda^p + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

3.1. Cas où P a toutes ses racines simples

Si P possède p racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on obtient p solutions distinctes

$$t \mapsto e^{\lambda_j t}, \quad 1 \leq j \leq p.$$

On verra plus loin que ces solutions sont linéairement indépendantes sur \mathbb{C} . L'ensemble des solutions est donc l'espace vectoriel de dimension p des fonctions

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_p e^{\lambda_p t}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

3.2. Cas où P a des racines multiples

On peut alors écrire

$$P(\lambda) = a_p \prod_{j=1}^s (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

où m_j est la multiplicité de la racine λ_j , avec

$$m_1 + \dots + m_s = p.$$

Considérons l'opérateur différentiel

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i}{dt^i}.$$

On voit que l'équation différentielle étudiée peut se récrire

$$(E) \quad P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$$

et on a d'autre part la formule

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme les dérivées partielles $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d}{d\lambda}$ commutent d'après le théorème de Schwarz, on obtient

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda t}) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d^q}{d\lambda^q} e^{\lambda t}\right) = \frac{d^q}{d\lambda^q}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t}\right) = \frac{d^q}{d\lambda^q}\left(P(\lambda)e^{\lambda t}\right),$$

d'où, grâce à la formule de Leibnitz :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^q C_q^i P^{(i)}(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Comme λ_j est racine de multiplicité m_j , on a $P^{(i)}(\lambda_j) = 0$ pour $0 \leq i \leq m_j - 1$, et $P^{(m_j)}(\lambda_j) \neq 0$. On en déduit

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda_j t}) = 0, \quad 0 \leq q \leq m_j - 1.$$

L'équation (E) admet donc les solutions

$$y(t) = t^q e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leq q \leq m_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq s$$

soit au total $m_1 + \dots + m_s = p$ solutions.

Lemme. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, alors les fonctions

$$y_{j,q}(t) = t^q e^{\lambda_j t}, \quad 1 \leq j \leq s, \quad q \in \mathbb{N}$$

sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Considérons une combinaison linéaire finie

$$\sum \alpha_{j,q} y_{j,q} = 0, \quad \alpha_{j,q} \in \mathbb{C}.$$

Si les coefficients sont non tous nuls, soit N le maximum des entiers q tels qu'il existe j avec $\alpha_{j,q} \neq 0$. Supposons par exemple $\alpha_{1,N} \neq 0$. On pose alors

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^N (\lambda - \lambda_2)^{N+1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{N+1}$$

Il vient $Q^{(i)}(\lambda_j) = 0$ pour $j \geq 2$ et $0 \leq i \leq N$, tandis que $Q^{(i)}(\lambda_1) = 0$ pour $0 \leq i < N$ et $Q^{(N)}(\lambda_1) \neq 0$. On en déduit

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda_j t}) = \sum_{i=0}^q C_q^i Q^{(i)}(\lambda_j) t^{q-i} e^{\lambda_j t} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq q \leq N, \quad 1 \leq j \leq s,$$

sauf si $q = N, j = 1$, auquel cas

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)(t^N e^{\lambda_1 t}) = Q^{(N)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t}.$$

En appliquant l'opérateur $Q\left(\frac{d}{dt}\right)$ à la relation $\sum \alpha_{j,q} t^q e^{\lambda_j t} = 0$ on obtient alors $\alpha_{1,N} Q^{(N)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} = 0$, ce qui est absurde puisque $\alpha_{1,N} \neq 0$ et $Q^{(N)}(\lambda_1) \neq 0$. Le lemme est démontré. On peut donc énoncer :

Théorème. *Lorsque le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ a des racines complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicités respectives m_1, \dots, m_s , l'ensemble \mathcal{S} des solutions est le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension p ayant pour base les fonctions*

$$t \mapsto t^q e^{\lambda_j t}, \quad 1 \leq j \leq s, \quad 0 \leq q \leq m_j - 1.$$

3.3. Équations linéaires d'ordre p avec second membre

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad a_p y^{(p)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(t),$$

où $b : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue donnée. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_0) \quad a_p y^{(p)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Soit (v_1, \dots, v_p) une base des solutions de (E_0) . On cherche alors une solution particulière de (E) .

Dans un certain nombre de cas, une solution simple peut être trouvée rapidement. Par exemple, si b est un polynôme de degré d et si $a_0 \neq 0$, l'équation (E) admet une solution polynomiale y de degré d , que l'on peut rechercher par identification des coefficients. Si $b(t) = \alpha e^{\lambda t}$ et si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique, l'équation admet pour solution $(\alpha/P(\lambda))e^{\lambda t}$. Si b est une fonction exponentielle-polynôme, (E) admet une solution du même type (noter que les fonctions trigonométriques se ramènent à ce cas).

En général, le principe consiste à appliquer la *méthode de variation des constantes au système différentiel (S) d'ordre 1 associé à (E)*.

Si on pose $y = y_0, y' = y_1, \dots, y^{(p-1)} = y_{p-1}$, l'équation (E) équivaut au système

$$(S) \quad \begin{cases} y'_0 = y_1 \\ \vdots \\ y'_{p-2} = y_{p-1} \\ y'_{p-1} = -\frac{1}{a_p} (a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_{p-1} y_{p-1}) + \frac{1}{a_p} b(t). \end{cases}$$

Ce système linéaire peut se récrire (S): $Y' = AY + B(t)$ avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_p} b(t). \end{pmatrix}$$

Le système homogène (S₀) $Y' = AY$ admet pour base de solutions les fonctions

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ \vdots \\ v_1^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_2 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v_2^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad \dots \quad V_p = \begin{pmatrix} v_p \\ v'_p \\ \vdots \\ v_p^{(p-1)} \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une solution particulière de (S) sous la forme

$$Y(t) = \alpha_1(t)V_1(t) + \dots + \alpha_p(t)V_p(t).$$

Comme $V'_j = AV_j$, il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \sum \alpha_j(t)V'_j(t) + \sum \alpha'_j(t)V_j(t) \\ &= AY(t) + \sum \alpha'_j(t)V_j(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir les α_j tels que $\sum \alpha'_j(t)V_j(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha'_1(t)v_1(t) + \dots + \alpha'_p(t)v_p(t) = 0 \\ \dots \\ \alpha'_1(t)v_1^{(p-2)}(t) + \dots + \alpha'_p(t)v_p^{(p-2)}(t) = 0 \\ \alpha'_1(t)v_1^{(p-1)}(t) + \dots + \alpha'_p(t)v_p^{(p-1)}(t) = \frac{1}{a_p} b(t). \end{cases}$$

On obtient ainsi un système linéaire de p équations par rapport aux p inconnues $\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_p(t)$. Le déterminant de ce système est non nul pour tout $t \in \mathbb{R}$ (les vecteurs $V_1(t), \dots, V_p(t)$ sont linéairement indépendants, car si une combinaison linéaire $Y = \beta_1 V_1 + \dots + \beta_p V_p$ est telle que $Y(t) = 0$, alors $Y \equiv 0$ d'après le théorème d'unicité, donc $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$).

La résolution de ce système permet de calculer $\alpha'_1, \dots, \alpha'_p$, puis $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ par intégration, d'où la solution particulière cherchée :

$$y(t) = \alpha_1(t)v_1(t) + \dots + \alpha_p(t)v_p(t).$$

Exemple. (E) $y'' + 4y = \tan t$, avec $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_0) \quad y'' + 4y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, et possède deux racines simples $2i$ et $-2i$. L'équation (E_0) admet pour base de solutions les fonctions $t \mapsto e^{2it}$, $t \mapsto e^{-2it}$, ou encore :

$$t \mapsto \cos 2t, \quad t \mapsto \sin 2t.$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E) en posant

$$y(t) = \alpha_1(t) \cos 2t + \alpha_2(t) \sin 2t.$$

Ceci conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) \cos 2t + \alpha'_2(t) \sin 2t = 0 \\ \alpha'_1(t) \cdot (-2 \sin 2t) + \alpha'_2(t) \cdot (2 \cos 2t) = \tan t. \end{cases}$$

Le déterminant du système étant égal à 2, on obtient

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) = -\frac{1}{2} \tan t \sin 2t = -\sin^2 t = -\frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \\ \alpha'_2(t) = \frac{1}{2} \tan t \cos 2t = \frac{1}{2} \tan t (2 \cos^2 t - 1) = \sin 2t - \frac{1}{2} \tan t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \\ \alpha_2(t) = -\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2} \ln(\cos t), \end{cases}$$

d'où la solution particulière

$$y(t) = -\frac{t}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \ln(\cos t).$$

La solution générale est donc

$$y(t) = -\frac{t}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \ln(\cos t) + \alpha_1 \cos 2t + \alpha_2 \sin 2t.$$

4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables

L'objet de ce paragraphe (avant tout théorique) est de généraliser les résultats du § 2 au cas des systèmes linéaires à coefficients variables.

4.1. Résolvante d'un système linéaire

Considérons une équation linéaire sans second membre

$$(E_0) \quad Y' = A(t)Y$$

où $A : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M_m(\mathbb{K})$ est une matrice $m \times m$ sur \mathbb{K} à coefficients continus.

Soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions maximales de (E_0) . Pour tout $t_0 \in I$, on sait que

$$\Phi_{t_0} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}^m, \quad Y \longmapsto Y(t_0)$$

est un isomorphisme \mathbb{K} -linéaire. Pour tout couple $(t, t_0) \in I^2$, on définit

$$R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1} : \mathbb{K}^m \xrightarrow{\Phi_{t_0}^{-1}} \mathcal{S} \xrightarrow{\Phi_t} \mathbb{K}^m$$

$$V \longmapsto Y \longmapsto Y(t).$$

On a donc $R(t, t_0) \cdot V = Y(t)$, où Y est la solution telle que $Y(t_0) = V$. Comme $R(t, t_0)$ est un isomorphisme $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$, il sera identifié à la matrice inversible qui lui correspond canoniquement dans $M_m(\mathbb{K})$.

Définition. $R(t, t_0)$ s'appelle la résolvante du système linéaire (E_0) .

Pour tout vecteur $V \in \mathbb{K}^m$, on a avec les notations ci-dessus

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} R(t, t_0) \right) \cdot V &= \frac{d}{dt} \left(R(t, t_0) \cdot V \right) \\ &= \frac{dY}{dt} = A(t)Y(t) = A(t)R(t, t_0) \cdot V. \end{aligned}$$

On en déduit donc $\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

Propriétés de la résolvante.

- (i) $\forall t \in I, \quad R(t, t) = I_m \quad (\text{matrice unité } m \times m).$
- (ii) $\forall (t_0, t_1, t_2) \in I^3, \quad R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0).$
- (iii) $R(t, t_0)$ est la solution dans $M_m(\mathbb{K})$ du système différentiel

$$\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$$

où $M(t) \in M_m(\mathbb{K})$ vérifie la condition initiale $M(t_0) = I_m$.

(i) et (ii) sont immédiats à partir de la définition de $R(t, t_0)$ et (iii) résulte de ce qui précède. Retenons enfin que la solution du problème de Cauchy

$$Y' = A(t)Y \quad \text{avec} \quad Y(t_0) = V_0$$

est donnée par

$$Y(t) = R(t, t_0) \cdot V_0.$$

Remarque. Le système $dM/dt = A(t)M(t)$ peut paraître plus compliqué que le système initial puisqu'on a m^2 équations scalaires au lieu de m (on passe de \mathbb{K}^m à $M_m(\mathbb{K})$). Il est néanmoins parfois utile de considérer ce système plutôt que l'équation initiale, parce que tous les objets sont dans $M_m(\mathbb{K})$ et qu'on peut exploiter la structure d'algèbre de $M_m(\mathbb{K})$.

Exemple. Supposons que

$$A(t)A(u) = A(u)A(t) \quad \text{pour tous } t, u \in I. \quad (*)$$

Alors

$$R(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(u) du \right).$$

Pour le voir, il suffit de montrer que $M(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(u) du \right)$ satisfait la condition (iii) ci-dessus. Il est clair que $M(t_0) = I_m$. Par ailleurs l'hypothèse de commutation (*) entraîne que $\int_a^b A(u) du$ et $\int_c^d A(u) du$ commutent pour tous $a, b, c, d \in I$, le produit étant égal dans les deux cas à

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} A(u)A(v) du dv$$

par le théorème de Fubini. On a donc

$$\begin{aligned} M(t+h) &= \exp \left(\int_{t_0}^t A(u) du + \int_t^{t+h} A(u) du \right) \\ &= \exp \left(\int_t^{t+h} A(u) du \right) M(t). \end{aligned}$$

Or $\int_t^{t+h} A(u) du = hA(t) + o(h)$, donc utilisant le développement en série de l'exponentielle on trouve

$$\begin{aligned} M(t+h) &= (I_m + hA(t) + o(h))M(t) \\ &= M(t) + hA(t)M(t) + o(h), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $dM/dt = A(t)M(t)$.

En particulier, si U et V sont des matrices constantes qui commutent et si $A(t) = f(t)U + g(t)V$ pour des fonctions scalaires f, g , alors l'hypothèse (*) est satisfaite. On a donc

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= \exp \left(\int_{t_0}^t f(u)du \cdot U + \int_{t_0}^t g(u)du \cdot V \right) \\ &= \exp \left(\int_{t_0}^t f(u)du \cdot U \right) \exp \left(\int_{t_0}^t g(u)du \cdot V \right). \end{aligned}$$

Exercice 1. Utiliser la dernière remarque de l'exemple pour calculer la résolvante associée aux matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos^2 t \\ 0 & 1 & \cos^2 t \\ 0 & 0 & \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}x + ty \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases} \quad \text{où} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et en déduire la formule donnant la résolvante $R(t, t_0)$.
Montrer que dans ce cas on a

$$R(t, t_0) \neq \exp \left(\int_{t_0}^t A(u)du \right).$$

L'exercice 2 montre que c'est le plus souvent la résolution du système qui permet de déterminer la résolvante, et non pas l'inverse comme pourrait le laisser croire la terminologie.

4.2. Wronskien d'un système de solutions

On va voir ici qu'on sait toujours calculer le déterminant d'un système de solutions, ou ce qui revient au même, le déterminant de la résolvante, même lorsque la résolvante n'est pas connue.

Définition. Le Wronskien d'un système de m solutions Y_1, Y_2, \dots, Y_m de (E_0) est

$$W(t) = \det (Y_1(t), \dots, Y_m(t))$$

Posons $V_j = Y_j(t_0)$. Alors $Y_j(t) = R(t, t_0) \cdot V_j$, d'où

$$W(t) = \det(R(t, t_0)) \cdot \det(V_1, \dots, V_m).$$

On est donc ramené à calculer la quantité

$$\Delta(t) = \det(R(t, t_0)),$$

et pour cela on va montrer que $\Delta(t)$ vérifie une équation différentielle simple. On a

$$\begin{aligned} \Delta(t+h) &= \det(R(t+h, t_0)) = \det(R(t+h, t)R(t, t_0)) \\ &= \det(R(t+h, t))\Delta(t). \end{aligned}$$

Comme $R(t, t) = I_m$ et $\frac{d}{du} R(u, t)|_{u=t} = A(t)R(t, t) = A(t)$, la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} R(t+h, t) &= I_m + hA(t) + o(h), \\ \det(R(t+h, t)) &= \det(I_m + hA(t)) + o(h). \end{aligned}$$

Lemme. Si $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{K})$, alors

$$\det(I_m + hA) = 1 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_m h^m$$

avec $\alpha_1 = \text{tr } A = \sum_{1 \leq i \leq m} a_{ii}$.

En effet dans $\det(I_m + hA)$ le terme diagonal est

$$(1 + ha_{11}) \dots (1 + ha_{mm}) = 1 + h \sum a_{ii} + h^2 \dots$$

et les termes non diagonaux sont multiples de h^2 . □

Le lemme entraîne alors

$$\begin{aligned} \det(R(t+h, t)) &= 1 + h \text{tr}(A(t)) + o(h), \\ \Delta(t+h) &= \Delta(t) + h \text{tr}(A(t))\Delta(t) + o(h). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Delta'(t) = \text{tr}(A(t))\Delta(t),$$

et comme $\Delta(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det I_m = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \det R(t, t_0) &= \Delta(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(u) du\right), \\ W(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(u) du\right) \det(V_1, \dots, V_m). \end{aligned}$$

4.3. Méthode de variation des constantes

Soit à résoudre le système différentiel linéaire

$$(E) \quad Y' = A(t)Y + B(t),$$

et soit $R(t, t_0)$ la résolvante du système linéaire sans second membre

$$(E_0) \quad Y' = A(t)Y.$$

On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme

$$Y(t) = R(t, t_0) \cdot V(t)$$

où V est supposée différentiable. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \left(\frac{d}{dt} R(t, t_0) \right) \cdot V(t) + R(t, t_0) \cdot V'(t) \\ &= A(t)R(t, t_0) \cdot V(t) + R(t, t_0) \cdot V'(t) \\ &= A(t)Y(t) + R(t, t_0) \cdot V'(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $R(t, t_0) \cdot V'(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} V'(t) &= R(t_0, t) \cdot B(t), \\ V(t) &= \int_{t_0}^t R(t_0, u) \cdot B(u) du, \\ Y(t) &= R(t, t_0) \cdot V(t) = \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, u) \cdot B(u) du, \\ Y(t) &= \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la solution particulière telle que $Y(t_0) = 0$. La solution telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par

$$Y(t) = R(t, t_0) \cdot V_0 + \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du.$$

Dans le cas où $A(t) = A$ est à coefficients constants on retrouve la formule du § 2.4, dans laquelle $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$, et la formule du Wronskien équivaut à l'identité déjà connue

$$\det(e^{(t-t_0)A}) = \exp((t - t_0) \operatorname{tr} A).$$

5. Problèmes

5.1. Soient b et c deux fonctions continues sur un intervalle fixé $T = [0, \tau[$. Soit (S) le système différentiel linéaire à coefficients constants et avec second membre

$$\begin{cases} x' = & y + b(t) \\ y' = 2x - y + c(t) \end{cases}$$

et soit (S_0) le système sans second membre associé (pour lequel $b(t) = c(t) = 0$).

- Écrire la matrice A de (S_0) , et calculer e^{tA} .
- Déterminer la solution générale du système (S_0) .
- Déterminer la solution générale du système (S) pour $b(t) = 0$, $c(t) = e^{-t}$.

5.2. Soit t une variable réelle ≥ 0 . On considère le système différentiel linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x' = & 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$

- Écrire la matrice A de (S), montrer qu'elle a deux valeurs propres réelles λ et μ ($\lambda > \mu$) et déterminer les sous-espaces propres correspondants.

- On pose $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on note respectivement $v_\lambda = \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix}$ et $v_\mu = \begin{pmatrix} x_\mu \\ y_\mu \end{pmatrix}$ les vecteurs propres associés à λ et μ tels que $y_\lambda = y_\mu = 1$.

Calculer x_λ, x_μ . Déterminer la matrice de passage P de l'ancienne base (e_x, e_y) à la nouvelle base (v_λ, v_μ) , et calculer sa matrice inverse P^{-1} .

- On pose $e^{tA} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Calculer explicitement $a(t), b(t), c(t), d(t)$.

Donner la solution du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

- Soit $T(x_0, y_0)$ la trajectoire $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t)$ correspondant aux conditions initiales $M(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(α) Pour quelles positions de $M(0)$ cette trajectoire $T(x_0, y_0)$ est-elle une demi-droite ?

(β) Pour quelles positions de $M(0)$ tend-elle vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$?

(γ) Indiquer sur un même figure :

- la forme des trajectoires $T(x_0, 0)$ partant d'un point $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$, de l'axe des x ;
- la forme des trajectoires $T(0, y_0)$ partant d'un point $(0, y_0)$, $y_0 > 0$, de l'axe des y .

5.3. On note t une variable réelle, et on considère les deux matrices

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Pour tout $n \geq 0$, calculer explicitement B^n et C^n , et en déduire e^{tB} et e^{tC} .
- (b) Mêmes questions pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose maintenant $T = [0, +\infty[$; on note $b_i(t)$ ($1 \leq i \leq 4$) quatre fonctions continues sur T , et on considère le système différentielle linéaire avec second membre

$$(S) \quad \begin{cases} y_1' = & y_2 & + b_1(t) \\ y_2' = y_1 & & + b_2(t) \\ y_3' = & y_3 + y_4 + b_3(t) \\ y_4' = & y_4 + b_4(t) \end{cases} .$$

On note (S_0) le système sans second membre associé à (S) .

- (c) Écrire la solution de (S_0) correspondant à des conditions initiales $y_i(0) = v_i$, les v_i ($1 \leq i \leq 4$) étant quatre constantes données.
- (d) Indiquer comment on peut alors résoudre (S) par la méthode dite de variation des constantes, et appliquer cette méthode au cas particulier

$$b_1(t) = 1, \quad b_2(t) = b_3(t) = 0, \quad b_4 = e^t.$$

5.4. On considère l'équation linéaire du 3^e ordre

$$(E) \quad y''' + y'' + y' + y = \cos t,$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable $t \geq 0$.

- (a) Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E) .
- (b) A l'aide de la méthode de variation des constantes, déterminer la solution générale de l'équation (E) .

- (c) Montrer que (E) admet une solution et une seule de la forme $At \cos t + Bt \sin t$: la déterminer explicitement, et tracer son graphe.

5.5. On considère dans \mathbb{R}^2 le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + ty \end{cases}$$

où x, y sont des fonctions réelles de la variable réelle t .

- (a) Résoudre le problème de Cauchy de donnée initiale (x_0, y_0) au temps $t_0 = 0$ (on pourra poser $z = x + iy$).
- (b) Même question pour le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx - y + t \cos t - t^3 \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x + ty + t \sin t + t^3 \cos t. \end{cases}$$

5.6. On considère un système différentiel $X' = A(t)X$ où $A(t)$ est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients de période 2π , bornés et continus par morceaux.

- (a) Montrer que l'application qui à $M \in \mathbb{R}^2$ associe la position à l'instant s de la solution $X(t)$ de $X' = A(t)X$ vérifiant $X(0) = M$ est une application linéaire bijective. On désignera par U_s cet endomorphisme et on notera $V = U_{2\pi}$.
- (b) Montrer que l'équation $X' = A(t)X$ admet une solution 2π -périodique non identiquement nulle si et seulement si 1 est valeur propre de V ; comment peut-on interpréter le fait que V admette pour valeur propre une racine k -ième de l'unité ?
- (c) On considère l'équation différentielle $y'' + f(t)y = 0$ où f est une fonction 2π -périodique à valeurs réelles. Mettre cette équation sous la forme d'un système du premier ordre.
- (d) On supposera dorénavant que

$$f(t) = \begin{cases} (w + \varepsilon)^2 & \text{si } t \in [0, \pi[\\ (w - \varepsilon)^2 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

où $0 < \varepsilon < w$ sont des constantes. Déterminer U_π ; montrer que V se met sous la forme $B \circ U_\pi$ où l'on déterminera la matrice B (on pourra utiliser que f est constante sur $[\pi, 2\pi[$ ainsi que sur $[0, \pi[$). Vérifier que $\det V = 1$.

- (e) Montrer qu'alors une des valeurs propres de V est inférieure à 1 en module et que l'équation $y'' + f(t)y = 0$ admet une solution bornée (non identiquement nulle) sur $[0, +\infty[$ et une solution bornée (non identiquement nulle) sur $] -\infty, 0[$; à quelle condition admet-elle une solution bornée (non identiquement nulle) sur \mathbb{R} ?
- (f) Montrer que la trace de V s'écrit

$$-\Delta \cos 2\pi\varepsilon + (2 + \Delta) \cos 2\pi w$$

où

$$\frac{w + \varepsilon}{w - \varepsilon} + \frac{w - \varepsilon}{w + \varepsilon} = 2(1 + \Delta).$$

En déduire que si w n'est pas la moitié d'un entier et si ε est assez petit, toutes les solutions de $y'' + f(t)y = 0$ sont bornées. Que passe-t-il si w est la moitié d'un entier ?

Chapitre VII

Stabilité des solutions et points singuliers d'un champ de vecteurs

On se propose ici d'étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle et des lignes intégrales d'un champ de vecteurs lorsque le temps t tend vers l'infini. On s'intéresse essentiellement au cas des équations linéaires ou « voisines » de telles équations. Dans ce cas, le comportement des solutions est gouverné par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice associée à la partie linéaire de l'équation : une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la donnée initiale restent proches de la solution considérée jusqu'à l'infini. Cette notion de stabilité (dite aussi stabilité au sens de Lyapunov) ne devra pas être confondue avec la notion de stabilité d'une méthode numérique, qui concerne la stabilité de l'algorithme sur un intervalle de temps fixé. On étudie finalement les différentes configurations possibles des lignes intégrales au voisinages des points singuliers non dégénérés d'un champ de vecteurs plan.

1. Stabilité des solutions

1.1. Définitions

On considère le problème de Cauchy associé à une équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$. On suppose que la solution de ce problème existe sur $[t_0, +\infty[$.

Définition. Soit $y(t, z)$ la solution maximale de (E) tel que $y(t_0, z) = z$. On dira que la solution $y(t, z_0)$ est stable s'il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une constante $C \geq 0$ telles que

(i) Pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$, $t \mapsto y(t, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$;

(ii) Pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on a

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq C\|z - z_0\|.$$

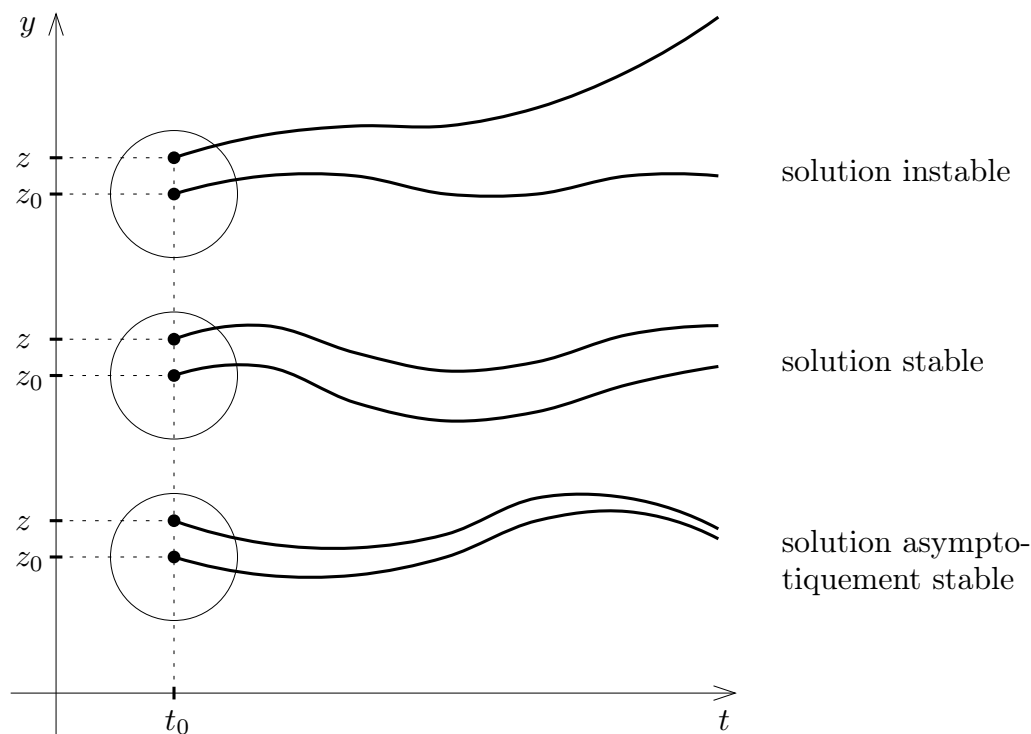
La solution $y(t, z_0)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si la condition (ii') plus forte que (ii) est satisfaite :

(ii') Il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$ telles que pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on ait

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|.$$



La signification géométrique de ces notions de stabilité est illustrée par le schéma suivant.



1.2. Cas d'un système linéaire à coefficients constants

Nous étudierons d'abord le cas le plus simple, à savoir le cas d'un système linéaire sans second membre

$$(E) \quad Y' = AY, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

avec $y_j, a_{ij} \in \mathbb{C}$; le cas réel peut bien entendu être vu comme un cas particulier du cas complexe. La solution du problème de Cauchy de condition initiale $Y(t_0) = Z$ est donnée par $Y(t, Z) = e^{(t-t_0)A} \cdot Z$. On a donc

$$Y(t, Z) - Y(t, Z_0) = e^{(t-t_0)A} \cdot (Z - Z_0)$$

et la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ quand t tend vers $+\infty$, dont la norme $\|e^{(t-t_0)A}\|$ doit rester bornée. Distinguons quelques cas.

- $m = 1$, $A = (a)$. On a alors

$$|e^{(t-t_0)a}| = e^{(t-t_0)\operatorname{Re}(a)}.$$

Les solutions sont stables si et seulement si cette quantité reste bornée quand t tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si $\operatorname{Re}(a) \leq 0$. De même, les solutions sont asymptotiquement stables si et seulement si $\operatorname{Re}(a) < 0$, et on peut alors prendre

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)\operatorname{Re}(a)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

- m quelconque. Si A est diagonalisable, on se ramène après un changement linéaire de coordonnées à

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres de A . Le système se ramène aux équations indépendantes $y'_j = \lambda_j y_j$ et admet pour solution

$$y_j(t, Z) = z_j e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Les solutions sont donc stables si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ pour tout j et asymptotiquement stables si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout j .

Si A n'est pas diagonalisable, il suffit de regarder ce qui se passe pour chaque bloc d'une triangulation de A . Supposons donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

où N est une matrice nilpotente (triangulaire supérieure) non nulle. Il vient alors

$$\begin{aligned} e^{(t-t_0)A} &= e^{(t-t_0)\lambda I} \cdot e^{(t-t_0)N} \\ &= e^{\lambda(t-t_0)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} N^k, \end{aligned}$$

donc les coefficients de $e^{(t-t_0)A}$ sont des produits de $e^{\lambda(t-t_0)}$ par des polynômes de degré $\leq m-1$ non tous constants (car $N \neq 0$, donc le degré est au moins 1). Si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, les coefficients tendent vers 0, et si $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ leur module tend vers $+\infty$ car la croissance de l'exponentielle l'emporte sur celle des polynômes. Si $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, on a $|e^{\lambda(t-t_0)}| = 1$ et par suite $e^{(t-t_0)A}$ est non bornée. On voit donc que les solutions sont asymptotiquement stables si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ et sinon elle sont instables. En résumé, on peut énoncer :

Théorème. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A . Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont

- asymptotiquement stables si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$.
- stables si et seulement si pour tout j , ou bien $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, ou bien $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

1.3. Petite perturbation d'un système linéaire

On considère dans $\mathbb{K}^m = \mathbb{R}^m$ ou \mathbb{C}^m un système de la forme

$$(E) \quad Y' = AY + g(t, Y)$$

où $g : [t_0, +\infty[\times \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une fonction continue. On se propose de montrer que si la partie linéaire est asymptotiquement stable et si la « perturbation » g est suffisamment petite, en un sens à préciser, alors les solutions de (E) sont encore asymptotiquement stables.

Théorème. *On suppose que les valeurs propres complexes λ_j de A sont de partie réelle $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$.*

(a) *S'il existe une fonction $k : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = 0$ et*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^m, \quad \|g(t, Y_1) - g(t, Y_2)\| \leq k(t)\|Y_1 - Y_2\|,$$

alors toute solution de (E) est asymptotiquement stable.

(b) *Si $g(t, 0) = 0$ et s'il existe $r_0 > 0$ et une fonction continue $k : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = 0$ et*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \overline{B}(0, r), \quad \|g(t, Y_1) - g(t, Y_2)\| \leq k(r)\|Y_1 - Y_2\|$$

pour $r \leq r_0$, alors il existe une boule $\overline{B}(0, r_1) \subset \overline{B}(0, r_0)$ telle que toute solution $Y(t, Z_0)$ de valeur initiale $Z_0 \in \overline{B}(0, r_1)$ soit asymptotiquement stable.

*Démonstration.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut toujours étendre le système à \mathbb{C}^m en posant par exemple $\tilde{g}(t, Y) = g(t, \operatorname{Re}(Y))$ pour $Y \in \mathbb{C}^m$. On se placera donc dans \mathbb{C}^m . Il existe alors une base (e_1, \dots, e_m) dans laquelle A se met sous forme triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & a_{m-1m} \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Posons $\tilde{e}_j = \varepsilon^j e_j$ avec $\varepsilon > 0$ petit. Il vient

$$\begin{aligned} A\tilde{e}_j &= \varepsilon^j (a_{1j}e_1 + \dots + a_{j-1j}e_{j-1} + \lambda_j e_j) \\ &= \varepsilon^{j-1} a_{1j} \tilde{e}_1 + \dots + \varepsilon a_{j-1j} \tilde{e}_{j-1} + \lambda_j \tilde{e}_j \end{aligned}$$

de sorte que dans la base (\tilde{e}_j) les coefficients non diagonaux peuvent être rendus arbitrairement petits. On supposera donc qu'on a $|a_{ij}| \leq \varepsilon$, et on pourra choisir ε aussi petit qu'on veut. Considérons deux solutions $Y(t, Z)$ et $Y(t, Z_0)$:

$$\begin{aligned} Y'(t, Z) &= AY(t, Z) + g(t, Y(t, Z)), \\ Y'(t, Z_0) &= AY(t, Z_0) + g(t, Y(t, Z_0)) \end{aligned}$$

et cherchons à évaluer la différence $\Delta(t) = Y(t, Z) - Y(t, Z_0)$ en distinguant les deux cas (a) et (b).

(a) Observons dans ce cas que $f(t, Y) = AY + g(t, Y)$ est lipschitzienne en Y avec constante de Lipschitz $\|A\| + k(t)$. Le critère V 3.4 montre donc déjà que toutes les solutions sont globalement définies sur $[t_0, +\infty[$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= A\Delta(t) + g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0)), \\ \|g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0))\| &\leq k(t)\|\Delta(t)\| \end{aligned}$$

Notons $(\delta_j(t))_{1 \leq j \leq m}$ les composantes de $\Delta(t)$ et

$$\rho(t) = \|\Delta(t)\|^2 = \sum_{j=1}^m \delta_j(t)\overline{\delta_j(t)}.$$

Par différentiation on obtient

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \sum_{j=1}^m \delta_j'(t)\overline{\delta_j(t)} + \delta_j(t)\overline{\delta_j'(t)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m \delta_i'(t)\overline{\delta_i(t)}, \\ &= 2 \operatorname{Re}({}^t\overline{\Delta(t)}\Delta'(t)) \\ &= 2 \operatorname{Re}({}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t)) + 2 \operatorname{Re}({}^t\overline{\Delta(t)}(g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0)))). \end{aligned}$$

La deuxième partie réelle est majorée par

$$2\|\Delta(t)\| \cdot \|g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0))\| \leq 2k(t)\|\Delta(t)\|^2 = 2k(t)\rho(t).$$

On a par ailleurs

$${}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t) = \sum_{j=1}^m \lambda_j |\delta_j(t)|^2 + \sum_{i < j} a_{ij} \overline{\delta_i(t)} \delta_j(t),$$

de sorte que

$$\operatorname{Re}({}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t)) \leq \sum_{j=1}^m (\operatorname{Re} \lambda_j) |\delta_j(t)|^2 + \left(\sum_{i < j} |a_{ij}| \right) \|\Delta(t)\|^2.$$

Comme $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ par hypothèse et $|a_{ij}| \leq \varepsilon$, il y a un choix de ε tel que

$$\operatorname{Re}({}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t)) \leq -\alpha \sum_{j=1}^m |\delta_j(t)|^2 = -\alpha\rho(t)$$

avec $\alpha > 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \rho'(t) &\leq -2\alpha\rho(t) + 2k(t)\rho(t), \\ \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} &\leq -2\alpha + 2k(t), \\ \ln \frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} &\leq -2 \int_{t_0}^t (\alpha - k(u)) du, \\ \rho(t) &\leq \|Z - Z_0\|^2 \exp\left(-2 \int_{t_0}^t (\alpha - k(u)) du\right) \end{aligned}$$

car $\rho(t_0) = \|Z - Z_0\|^2$. On notera que $\rho(t) = \|\Delta(t)\|^2$ ne peut s'annuler que si les deux solutions coïncident identiquement. En prenant la racine carrée, on obtient

$$\|Y(t, Z) - Y(t, Z_0)\| \leq \gamma(t)\|Z - Z_0\|$$

avec

$$\gamma(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t (\alpha - k(u)) du \right).$$

Comme $\lim_{u \rightarrow +\infty} (\alpha - k(u)) = \alpha > 0$, l'intégrale diverge vers $+\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$. Les solutions sont donc bien asymptotiquement stables.

(b) Ce cas est un peu plus délicat car on ne sait pas *a priori* si toutes les solutions sont globales ; elles ne le seront d'ailleurs pas en général si $Z_0 \notin \overline{B}(0, r_0)$, vu que les hypothèses ne concernent que ce qui se passe pour $Y \in \overline{B}(0, r_0)$. Comme $g(t, 0) = 0$, on a toutefois la solution globale $Y(t) = 0$, c'est-à-dire que $Y(t, 0) = 0$ pour $t \in [t_0, +\infty[$. De plus on a

$$\|g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0))\| \leq k(r)\|\Delta(t)\|,$$

à condition de supposer que $t \mapsto Y(t, Z)$ et $t \mapsto Y(t, Z_0)$ prennent toutes leurs valeurs dans $\overline{B}(0, r) \subset \overline{B}(0, r_0)$. Sous cette hypothèse, les mêmes calculs que précédemment donnent

$$\rho(t) \leq \|Z - Z_0\|^2 \exp \left(- 2 \int_{t_0}^t (\alpha - k(r)) du \right),$$

$$\|Y(t, Z) - Y(t, Z_0)\| \leq \exp \left(- (t - t_0)(\alpha - k(r)) \right) \|Z - Z_0\|, \quad (*)$$

et en particulier pour $Z_0 = 0$:

$$\|Y(t, Z)\| \leq \exp \left(- (t - t_0)(\alpha - kr) \right) \|Z\|.$$

Comme $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = 0$, on peut choisir $r_1 < r_0$ tel que $k(r_1) < \alpha$, c'est-à-dire $\alpha - k(r_1) > 0$. L'inégalité précédente montre alors que pour $Z \in B(0, r_1)$ la solution maximale $Y(t, Z)$ contenue dans la boule ouverte $B(0, r_1)$ vérifie les inégalités $\|Y(t, Z)\| \leq \|Z\| < r_1$. Cette solution maximale est nécessairement définie globalement sur $[t_0, +\infty[$. Sinon l'intervalle maximal serait un intervalle borné $[t_0, t_1[$, nécessairement ouvert à droite d'après les résultats de V 2.4. Comme la dérivée de $t \mapsto Y(t, Z)$ est majorée par

$$\|AY + g(t, Y)\| \leq (\|A\| + k(r_1))\|Y\| \leq M$$

avec $M = (\|A\| + k(r_1))r_1$, la fonction $Y(t, Z)$ vérifierait le critère de Cauchy

$$\lim_{t, t' \rightarrow t_1 - 0} \|Y(t, Z) - Y(t', Z)\| = 0.$$

Elle aurait donc une limite $Y_1 = \lim_{t \rightarrow t_1 - 0} Y(t, Z)$ avec $\|Y_1\| \leq \|Z\| < r_1$ et se prolongerait sur un voisinage à droite de t_1 en une solution entièrement contenue dans $B(0, r_1)$, contradiction. Quitte à diminuer encore un peu r_1 , on voit que toute solution $Y(t, Z)$ avec $Z \in \overline{B}(0, r_1)$ est globale et entièrement contenue dans $\overline{B}(0, r_1)$. Par conséquent (*) est satisfaite pour tous $t \in [t_0, +\infty[$ et $Z, Z_0 \in \overline{B}(0, r_1)$ avec la constante $\alpha - k(r_1) > 0$, ce qui démontre le théorème. □

2. Points singuliers d'un champ de vecteurs

2.1. Position du problème

On suppose donné un champ de vecteurs de classe C^1 dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application

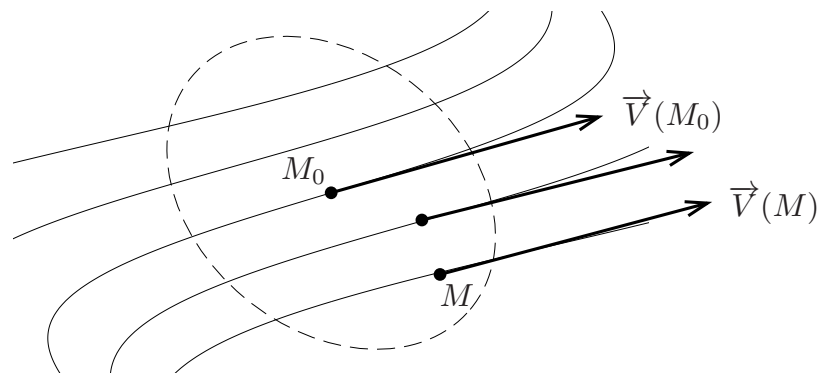
$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

où f, g sont de classe C^1 sur Ω . On considère le système différentiel associé

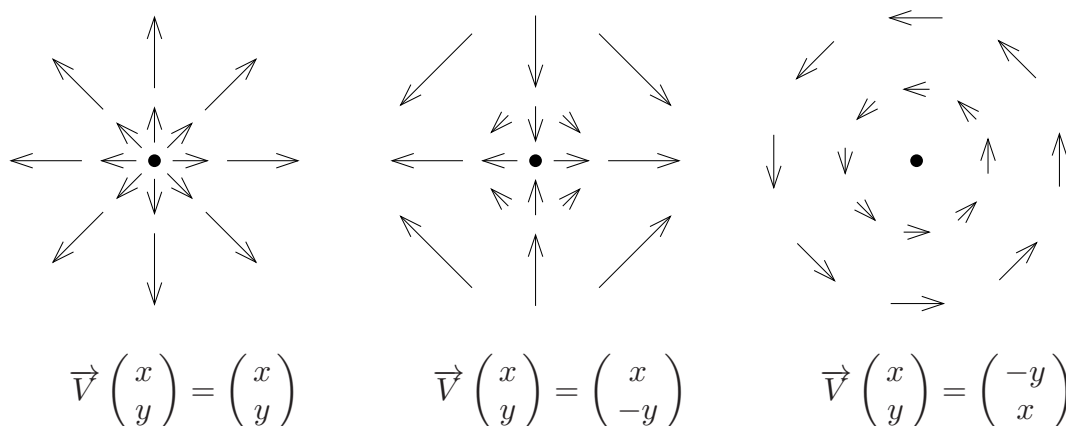
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M) \iff \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que par tout point il passe une courbe intégrale unique. Un problème géométrique intéressant est de décrire l'allure de la famille des courbes intégrales passant au voisinage d'un point M_0 donné.

Premier cas. $\vec{V}(M_0) \neq \vec{0}$. Dans ce cas, l'angle entre $\vec{V}(M)$ et $\vec{V}(M_0)$ tend vers 0 quand M tend vers 0. Par conséquent, les tangentes aux lignes intégrables sont sensiblement parallèles les unes aux autres dans un petit voisinage de M_0 . Un tel point M_0 est dit régulier :



Deuxième cas. $\vec{V}(M_0) = \vec{0}$. On voit alors facilement sur des exemples qu'il y a plusieurs configurations possibles pour le champ des tangentes :



Si $\vec{V}(M_0) = \vec{0}$, on dit que M_0 est un *point singulier* (ou *point critique*) du champ de vecteurs. Un tel point donne évidemment une solution constante $M(t) = M_0$ de (E). Pour étudier les solutions voisines, on supposera après translation éventuelle de l'origine des coordonnées que $M_0 = 0$. On a alors $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, de sorte que le système différentiel peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) = ax + by + o(|x| + |y|) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) = cx + dy + o(|x| + |y|). \end{cases}$$

Introduisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x(0, 0) & f'_y(0, 0) \\ g'_x(0, 0) & g'_y(0, 0) \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel considéré s'écrit maintenant

$$\frac{dM}{dt} = AM + G(M)$$

avec $G(0, 0) = G'_x(0, 0) = G'_y(0, 0) = 0$. La fonction continue

$$k(r) = \sup_{M \in \overline{B}(0, r)} \|G'(M)\|$$

tend vers 0 quand r tend vers 0 et le théorème des accroissements finis donne

$$\|G(M_1) - G(M_2)\| \leq k(r) \|\overline{M_1 M_2}\|$$

pour tous $M_1, M_2 \in \overline{B}(0, r)$. L'hypothèse (b) du théorème du § 1.3 est donc satisfaite. Dire que le point M_0 est asymptotiquement stable signifie que les lignes intégrales issues d'un point M_1 voisin de M_0 convergent toutes vers M_0 (à peu près uniformément à la même vitesse) quand le temps tend vers $+\infty$. On peut donc énoncer :

Proposition. *Pour qu'un point singulier $M_0 = (x_0, y_0)$ soit asymptotiquement stable, il suffit que les valeurs propres de la matrice jacobienne*

$$A = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

soient de partie réelle < 0 .

Remarque. Contrairement au cas d'un système linéaire, on ne peut pas décider de la nature du point critique si la matrice jacobienne a une valeur propre de partie réelle nulle. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x^3 \\ \frac{dy}{dt} = \beta y^3 \end{cases} \quad t \in [t_0, +\infty[= [0, +\infty[,$$

qui admet l'origine comme point critique avec matrice jacobienne $A = 0$. On voit facilement que la solution du problème de Cauchy est

$$x(t) = x_0(1 - 2\alpha x_0^2 t)^{-1/2}, \quad y(t) = y_0(1 - 2\beta y_0^2 t)^{-1/2}.$$

Par conséquent l'origine est un point asymptotiquement stable si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, instable dès que $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$. Dans ce dernier cas, les solutions ne sont en fait même pas globalement définies : lorsque $\alpha > 0$, $\beta \leq 0$ et $x_0 \neq 0$, la solution maximale n'est définie que pour $t \in [0, 1/(2\alpha x_0^2)[$.

Si la matrice jacobienne est inversible (valeurs propres $\neq 0$), le théorème d'inversion locale montre que la fonction $M \mapsto \vec{V}(M)$ définit une bijection d'un voisinage de M_0 sur un voisinage de 0 ; en particulier, pour M assez voisin et distinct de M_0 on aura $\vec{V}(M) \neq \vec{0}$, de sorte que M_0 est un point singulier *isolé*. Ce n'est pas toujours le cas si la matrice est dégénérée : le champ $\vec{V}(x, y) = (x, 0)$ admet par exemple toute une droite $x = 0$ de points singuliers. On exclura en général ces situations qui peuvent être extrêmement compliquées.

Définition. *On dira qu'un point singulier M_0 est non dégénéré si*

$$\det \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier les différentes configurations possibles pour un point singulier non dégénéré. On verra au chapitre XI, § 2.3 que les courbes intégrales ont tendance à ressembler à celles du système linéaire $dM/dt = AM$ lorsqu'on se rapproche du point critique, tout au moins sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ fixé ; ceci n'est pas nécessairement vrai sur tout l'intervalle $[t_0, +\infty[$ (voir § 2.3 pour des exemples). On se restreindra dans un premier temps au cas linéaire.

2.2. Cas d'un champ linéaire de vecteurs

Considérons le système

$$\frac{dM}{dt} = AM, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On supposera $\det A \neq 0$, de sorte que le champ de vecteurs $\vec{V}(M) = AM$ admet l'origine pour seul point critique. Comme le champ des tangentes est invariant par les homothéties de centre O, les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par homothéties. Distinguons maintenant plusieurs cas en fonction des valeurs propres de A.

(a) Les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont réelles.

• Supposons de plus $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Après changement de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy avec $M(0) = (x_0, y_0)$ est donc

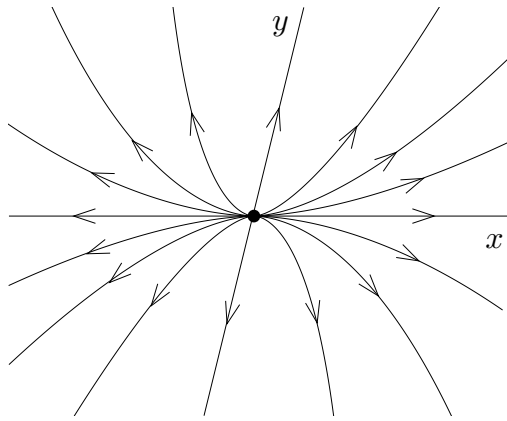
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

de sorte que les courbes intégrales sont les courbes

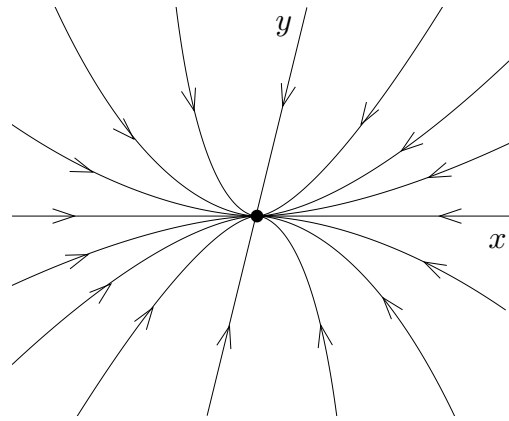
$$y = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

et la droite d'équation $x = 0$. Distinguons deux sous-cas :

* λ_1, λ_2 de même signe et, disons, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. On a alors $\lambda_2/\lambda_1 > 1$. On dit qu'on a affaire à un *nœud impropre* :

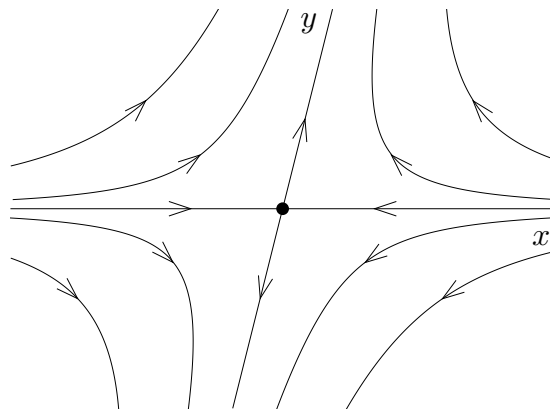


$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
nœud impropre instable



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
nœud impropre stable

* λ_1, λ_2 de signes opposés, par exemple $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Il s'agit d'un *col* (toujours instable) :

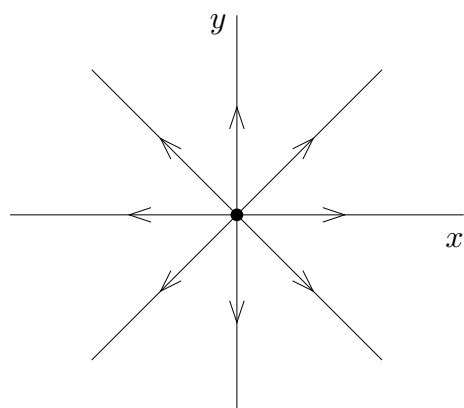


• Les valeurs propres sont confondues : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Deux cas sont possibles :

* A est diagonalisable. Alors A est en fait diagonale et les courbes intégrales sont données par

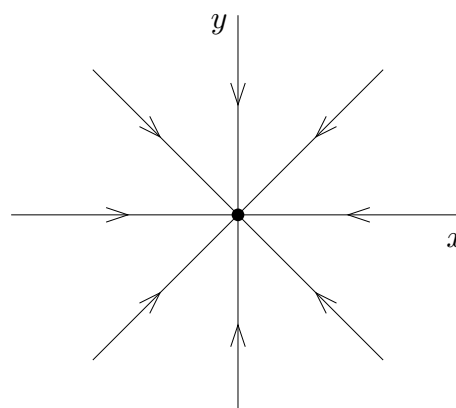
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

ce sont les droites $y = \alpha x$ et $x = 0$. On dit qu'on a affaire à un *nœud propre* :



$$\lambda > 0$$

Nœud propre instable



$$\lambda < 0$$

Nœud propre stable

* A est non diagonalisable. Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y. \end{cases}$$

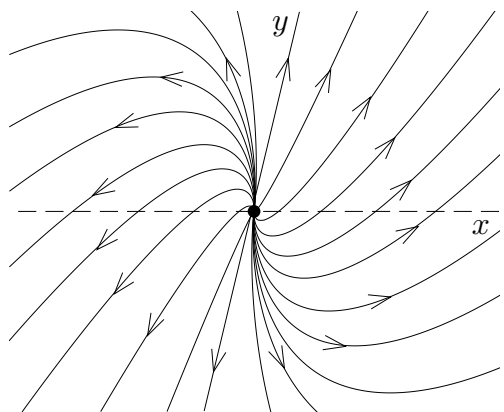
Les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Comme toute courbe intégrale avec $x_0 \neq 0$ passe par un point tel que $|x(t)| = 1$, on obtient toutes les courbes intégrales autres que $x = 0$ en prenant $x_0 = \pm 1$, d'où

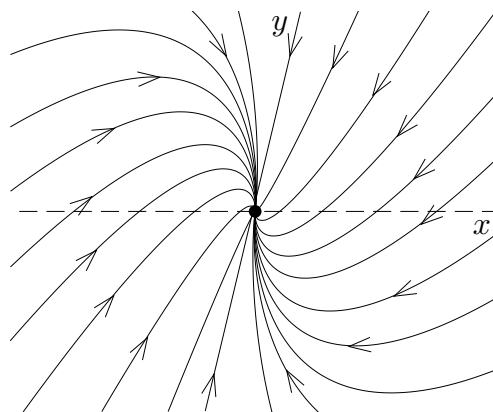
$$\begin{cases} t = \frac{1}{\lambda} \ln |x| \\ y = y_0 |x| + \frac{x}{\lambda} \ln |x| \end{cases}$$

On dit qu'il s'agit d'un *nœud exceptionnel*. Pour construire les courbes, on tracera par exemple d'abord la courbe $y = \frac{x}{\lambda} \ln |x|$ passant par $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$. Toutes les autres s'en déduisent par homothéties.



$$\lambda > 0$$

Nœud exceptionnel instable



$$\lambda < 0$$

Nœud exceptionnel stable

(b) Les valeurs propres de A sont non réelles.

On a des valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ avec disons $\beta > 0$, et il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

La manière la plus rapide de résoudre un tel système est de poser $z = x + iy$. On trouve alors

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha + i\beta)x + (-\beta + \alpha i)y = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha + i\beta)z,$$

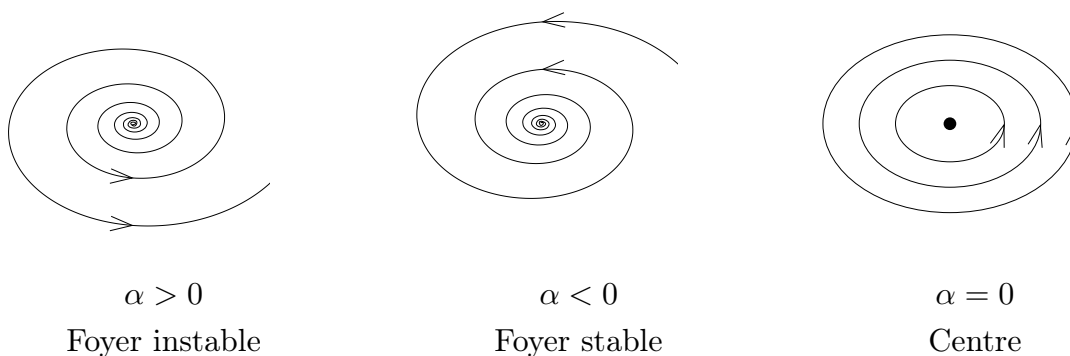
de sorte que la solution générale est

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha + i\beta)t} = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}.$$

En coordonnées polaires $z = r e^{i\theta}$, l'équation devient

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}, \quad \text{soit} \quad r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}.$$

Il s'agit d'une spirale logarithmique si $\alpha \neq 0$ et d'un cercle si $\alpha = 0$ (noter que ce cercle donne en général graphiquement une ellipse car la base utilisée ci-dessus n'est pas nécessairement orthonormée). On dit alors que le point singulier est un *foyer*, respectivement un *centre* :



Si $\alpha \neq 0$, le rapport d'homothétie de deux spires consécutives de la spirale est $e^{2\pi\alpha/\beta}$.

2.3. Singularités de champs de vecteurs non linéaires

L'objet de ce paragraphe est essentiellement de mettre en garde le lecteur contre un certain nombre d'idées fausses fréquemment rencontrées, en particulier l'idée que les courbes intégrales d'un champ de vecteurs quelconque au voisinage d'un point singulier ressemblent toujours à celles du système linéaire associé. En fait, ce n'est en général pas le cas lorsque le système linéarisé présente *un centre*, et cela peut de même ne pas être le cas lorsque celui-ci présente *un nœud*. Les deux exemples ci-dessous illustrent le phénomène.

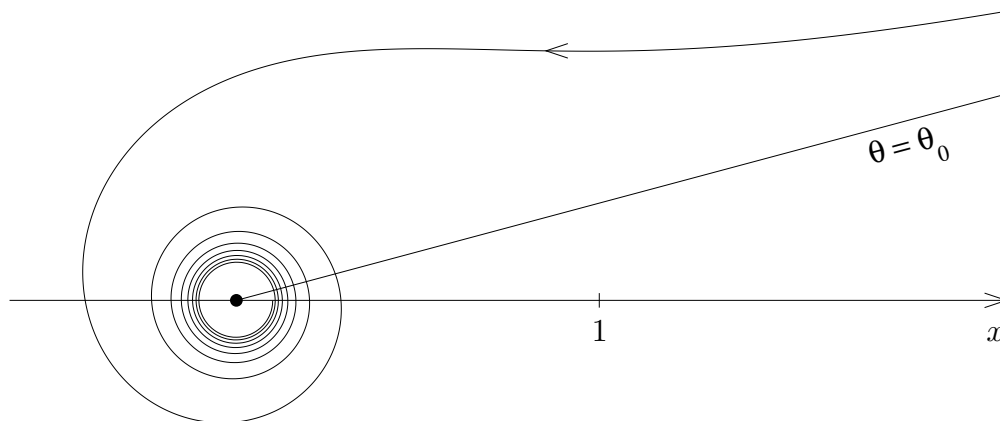
Exemple 1. On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

L'origine est un point critique non dégénéré, et le système linéaire associé $dx/dt = -y, dy/dt = x$ présente un centre d'après le §2.2. Si l'on passe en coordonnées polaires (r, θ) le système (S) devient

$$\begin{cases} r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = -(x^2 + y^2)^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dr}{r^3} = -dt \\ d\theta = dt \end{cases}$$

car $rdr = xdx + ydy$ et $xdy - ydx = r^2d\theta$ (exercice !). Les courbes intégrales de l'équation $-dr/r^3 = d\theta$ sont données par $1/2r^2 = \theta - \theta_0$, soit $r = (2(\theta - \theta_0))^{-1/2}$ pour $\theta > \theta_0$. On a ici $\theta = t + C, \lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = 0$. On voit que les courbes intégrales sont des spirales convergeant vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, l'origine est donc *un foyer stable*.



Exemple 2. On considère maintenant le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - \frac{2y}{\ln(x^2 + y^2)} \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{2x}{\ln(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

sur le disque unité ouvert $x^2 + y^2 < 1$. Observons que $2y/\ln(x^2 + y^2)$ se prolonge en une fonction de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$: elle admet en effet une limite égale à 0 à l'origine, ainsi que ses dérivées partielles

$$\frac{-4xy}{(x^2 + y^2)(\ln(x^2 + y^2))^2}, \quad \frac{2}{\ln(x^2 + y^2)} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)(\ln(x^2 + y^2))^2}.$$

Il en est de même pour le terme $2x/\ln(x^2 + y^2)$. L'origine est donc un point singulier, et le système linéaire associé $dx/dt = -x$, $dy/dt = -y$ présente *un nœud propre*. Pour résoudre (S), on utilise de nouveau les coordonnées polaires (r, θ) . Il vient

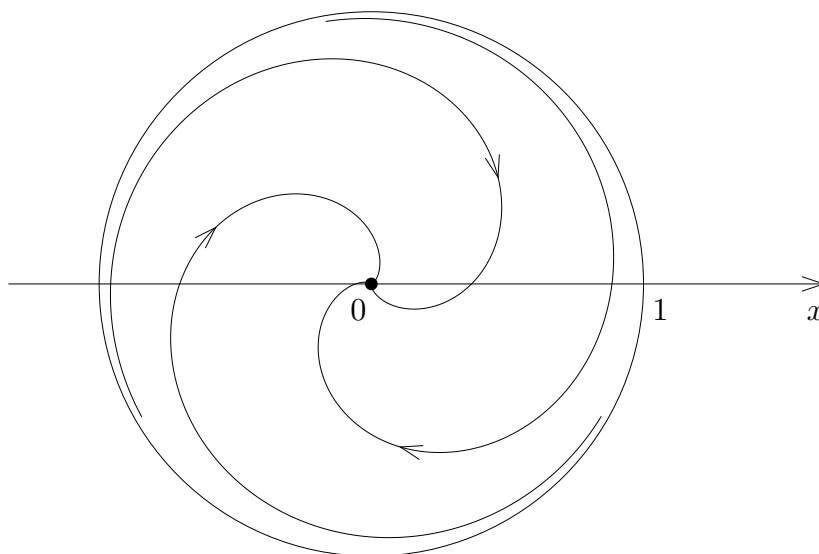
$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\frac{x^2 + y^2}{r} = -r \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{2x^2 + 2y^2}{\ln(x^2 + y^2)} = \frac{1}{\ln r}. \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donnée par

$$r = r_0 e^{-t} \quad \text{avec} \quad r_0 < 1, \\ d\theta = \frac{dt}{\ln r_0 - t}, \quad \theta = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln r_0)$$

pour une donnée initiale (r_0, θ_0) en $t = 0$. La solution est définie sur $[\ln r_0, +\infty[$ et on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$. On a ici encore une spirale convergeant vers 0 (c'est peu visible sur le schéma ci-dessus car θ tend vers $-\infty$ très lentement). L'origine

est donc un *foyer stable*. Comme $\lim_{t \rightarrow \ln r_0 + 0} r(t) = 1_-$ et $\lim_{t \rightarrow \ln r_0 + 0} \theta(t) = +\infty$, la courbe s'enroule en spirale à l'intérieur du cercle $r = 1$ quand $t \rightarrow \ln r_0 + 0$.



3. Problèmes

3.1. On considère sur \mathbb{R}^2 le champ de vecteurs

$$\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les points critiques.
- En posant $z = x + iy$, calculer la solution correspondant à la donnée initiale z_0 au temps $t = 0$.
- En déduire que les courbes intégrales sont les deux demi-axes $0x, 0x'$ et les cercles passant par l'origine, centrés sur l'axe $y'0y$.
- Montrer que les solutions telles que $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ sont asymptotiquement stables. Qu'en est-il si $z_0 \in [0, +\infty[$?

3.2. On étudie dans \mathbb{R}^2 le système différentiel

$$(S) \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M)$$

où \vec{V} désigne le champ de vecteurs qui à tout point $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le vecteur

$$\vec{V}(M) = (-x^2 - y, -x + y^2).$$

Déterminer les points critiques du champ de vecteurs \vec{V} . Calculer les solutions $t \mapsto \widetilde{M}(t) = (\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$ du système différentiel obtenu en linéarisant \vec{V} au voisinage de chacun des points critiques. Faire un schéma indiquant l'allure des solutions au voisinage des points critiques. Ces points sont-ils stables ?

3.3. Mêmes questions pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (-1 + x^2 + y^2, -x)$.

3.4. On considère le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x \sin \left(\frac{\pi}{x^2+y^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{x^2+y^2} \right) \\ x + y \sin \left(\frac{\pi}{x^2+y^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{x^2+y^2} \right) \end{pmatrix}$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et par $\vec{V}(0, 0) = \vec{0}$.

(a) Montrer que le champ \vec{V} est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 ; on pourra commencer par montrer que la fonction

$$t \mapsto \sin(\pi/t) \exp(-1/t), \quad t > 0,$$

se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que le système différentiel $dM/dt = \vec{V}(M)$ se ramène à une équation de la forme $dr/d\theta = f(r)$; on ne cherchera pas à résoudre explicitement cette équation. En déduire qu'il y a une infinité de cercles concentriques $(C_k)_{k \geq 1}$ de rayons R_k décroissant vers 0, qui sont des courbes intégrales du champ.

(c) Étudier la convergence des intégrales $\int_{R_{k+1}}^{R_k} dr/f(r)$ en chacune des bornes. Montrer que la courbe intégrale issue d'un point de coordonnées polaires (r_0, θ_0) telles que $R_{k+1} < r_0 < R_k$ est une spirale admettant les cercles $r = R_k$ et $r = R_{k+1}$ comme asymptotes. Étudier de même le comportement à l'infini des courbes intégrales.

Chapitre VIII

Équations différentielles dépendant d'un paramètre

Étant donné une équation différentielle $y' = f(t, y, \lambda)$ dépendant d'un paramètre λ , on se propose d'étudier comment les solutions varient en fonction de λ . En particulier on montrera que, sous des hypothèses convenables, les solutions dépendent continûment ou différentiablement du paramètre λ . Outre l'aspect théorique, ces résultats sont importants en vue de la méthode dite des perturbations : il arrive fréquemment qu'on sache calculer la solution y pour une valeur particulière λ_0 , mais pas pour les valeurs voisines λ ; on cherche alors un développement limité de la solution y associée à la valeur λ en fonction de $\lambda - \lambda_0$. On montrera que le coefficient de $\lambda - \lambda_0$ est obtenu en résolvant une équation différentielle linéaire, appelée équation « linéarisée » de l'équation initiale ; ce fait remarquable permet généralement de bien étudier les petites perturbations de la solution.

1. Dépendance de la solution en fonction du paramètre

1.1. Notations

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, y, \lambda) &\mapsto f(t, y, \lambda) \end{aligned}$$

une fonction continue. Pour chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{R}^p$, on considère l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \quad y' = f(t, y, \lambda), \quad (t, y) \in U_\lambda$$

où $U_\lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ est l'ouvert des points tels que $(t, y, \lambda) \in U$. Une donnée initiale (t_0, y_0) étant fixée, on note $y(t, \lambda)$ la solution maximale du problème de Cauchy relatif à (E_λ) telle que $y(t_0, \lambda) = y_0$; on supposera toujours dans la suite que les hypothèses assurant l'unicité des solutions sont vérifiées. Notre objectif est d'étudier la continuité ou la différentiabilité de $y_0(t, \lambda)$ en fonction du couple (t, λ) .

Fixons un point $(t_0, y_0, \lambda_0) \in U$. Comme U est ouvert, ce point admet un voisinage (compact) contenu dans U

$$V_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \times \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0).$$

On note $M = \sup_{V_0} \|f\|$. Alors pour tout $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ fixé et pour tout $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0)$, le cylindre

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U_\lambda$$

est un cylindre de sécurité pour les solutions de E_λ , d'après les résultats du chapitre V, § 2.1. Le théorème d'existence V 2.4 implique :

Proposition. *Avec les notations précédentes, la solution $y(t, \lambda)$ est définie pour tout $(t, \lambda) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0)$ et elle est à valeurs dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.*

1.2. Continuité

On suppose maintenant de plus que f est localement lipschitzienne en y , c'est-à-dire qu'après avoir éventuellement rétréci V_0 , il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$\begin{aligned} \forall (t, \lambda) \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0), \quad \forall y_1, y_2 \in \overline{B}(y_0, r_0), \\ \|f(t, y_1, \lambda) - f(t, y_2, \lambda)\| \leq k \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Théorème. *Si f est continue sur U et localement lipschitzienne en y , alors la solution $y(t, \lambda)$ est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\left\| \frac{d}{dt} y(t, \lambda) \right\| = \|f(t, y(t, \lambda), \lambda)\| \leq M$$

car $\|f\| \leq M$ sur V_0 . Le théorème des accroissements finis montre alors que $y(t, \lambda)$ est M -lipschitzienne par rapport à t , c'est-à-dire que

$$\|y(t_1, \lambda) - y(t_2, \lambda)\| \leq M |t_1 - t_2|$$

pour tous $(t_1, \lambda), (t_2, \lambda) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0)$. Par ailleurs, comme V_0 est compact, f y est conformément continue et il existe donc un module de continuité $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|f(t, y, \lambda_1) - f(t, y, \lambda_2)\| \leq \eta(\|\lambda_1 - \lambda_2\|)$$

avec $\lim_{u \rightarrow 0_+} \eta(u) = 0$. Alors $z_1(t) = y(t, \lambda_1)$ est la solution exacte du problème de Cauchy pour l'équation

$$(E_{\lambda_1}) \quad y' = f(t, y, \lambda_1),$$

tandis que $z_2(t) = y(t, \lambda_2)$ en est une solution ε -approchée avec $\varepsilon = \eta(\|\lambda_1 - \lambda_2\|)$. Le lemme de Gronwall V 3.1 montre que

$$\begin{aligned} \|z_1(t) - z_2(t)\| &\leq \varepsilon \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}, \quad \text{d'où} \\ \|y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)\| &\leq \frac{e^{kT} - 1}{k} \eta(\|\lambda_1 - \lambda_2\|). \end{aligned}$$

De ces inégalités, nous déduisons

$$\begin{aligned} \|y(t_1, \lambda_1) - y(t_2, \lambda_2)\| &\leq \|y(t_1, \lambda_1) - y(t_2, \lambda_1)\| + \|y(t_2, \lambda_1) - y(t_2, \lambda_2)\| \\ &\leq M|t_1 - t_2| + \frac{e^{kT} - 1}{k} \eta(\|\lambda_1 - \lambda_2\|) \end{aligned}$$

et comme le second membre tend vers 0 lorsque $(t_2, \lambda_2) \rightarrow (t_1, \lambda_1)$, on voit que $y(t, \lambda)$ est bien continue sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(\lambda_0, \alpha_0)$. \square

Remarque. La démonstration montre aussi que si $f(t, y, \lambda)$ est localement lipschitzienne en λ , alors $y(t, \lambda)$ est localement lipschitzienne en (t, λ) : dans ce cas, on peut prendre $\eta(u) = Cu$.

1.3. Différentiabilité

Afin de simplifier les notations, on suppose dans un premier temps que $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $p = 1$. Pour deviner les résultats, nous effectuons d'abord un calcul formel en supposant les fonctions f et $y(t, \lambda)$ autant de fois différentiables que nécessaire. Comme y satisfait (E_λ) par hypothèse, on a

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) = f(t, y(t, \lambda), \lambda).$$

Différentions cette relation par rapport à λ :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, y(t, \lambda), \lambda) \frac{\partial y_j}{\partial \lambda}(t, \lambda) + f'_\lambda(t, y(t, \lambda), \lambda).$$

En posant $u(t) = y(t, \lambda)$ et $v(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ il vient

$$(E'_\lambda) \quad v'(t) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u(t), \lambda) v_j(t) + f'_\lambda(t, u(t), \lambda).$$

On observe que l'équation (E'_λ) satisfaite par v est *linéaire*. L'équation (E'_λ) s'appelle l'*équation différentielle linéarisée* associée à (E_λ) . Par ailleurs v satisfait la condition initiale

$$v(t_0) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t_0, \lambda) = 0,$$

car par hypothèse $y(t_0, \lambda) = y_0$ ne dépend pas de λ .

Théorème. On suppose que f est continue sur U et admet des dérivées partielles f'_{y_j} et f'_λ continues sur U .

Alors $y(t, \lambda)$ est de classe C^1 sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times B(\lambda_0, \alpha_0)$ et admet des dérivées partielles secondes croisées continues

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

De plus, si $u(t) = y(t, \lambda)$, la dérivée partielle $v(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ est la solution de l'équation différentielle linéarisée

$$(E'_\lambda) \quad v'(t) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u(t), \lambda)v_j(t) + f'_\lambda(t, u(t), \lambda)$$

avec condition initiale $v(t_0) = 0$.

*Démonstration.** Les hypothèses entraînent que f est localement lipschitzienne en la variable y , donc on sait déjà que $y(t, \lambda)$ est continue. Pour λ_1 fixé posons $u_1(t) = y(t, \lambda_1)$ et soit $v_1(t)$ la solution de l'équation linéaire

$$(E'_{\lambda_1}) \quad v'_1(t) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u_1(t), \lambda_1)v_{1,j}(t) + f'_\lambda(t, u_1(t), \lambda_1).$$

avec condition initiale $v_1(t_0) = 0$. Bien entendu, on ne sait pas encore que $v_1(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)$, c'est justement ce qu'on veut démontrer. Pour cela on compare $u(t) = y(t, \lambda)$ et $u_1(t) + (\lambda - \lambda_1)v_1(t)$ et on cherche à montrer que la différence est $o(\lambda - \lambda_1)$. Posons donc

$$w(t) = u(t) - u_1(t) - (\lambda - \lambda_1)v_1(t).$$

Par définition de u, u_1, v_1 il vient

$$w'(t) = f(t, u(t), \lambda) - f(t, u_1(t), \lambda_1) - (\lambda - \lambda_1) \left(\sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u_1(t), \lambda_1)v_{1,j}(t) + f'_\lambda(t, u_1(t), \lambda_1) \right) \quad (*)$$

Pour chaque composante f_k , la formule des accroissements finis montre que

$$f_k(t, y, \lambda) - f_k(t, y_1, \lambda_1) = \sum_{j=1}^m f'_{k, y_j}(t, \tilde{y}, \tilde{\lambda})(y_j - y_{1,j}) + f'_{k, \lambda}(t, \tilde{y}, \tilde{\lambda})(\lambda - \lambda_1)$$

où $(\tilde{y}, \tilde{\lambda})$ est un point appartenant au segment d'extrémités (y_1, λ_1) et (y, λ) . Si η_k est un module de continuité uniforme pour les dérivées partielles f'_{k, y_j} et $f'_{k, \lambda}$ sur le compact V_0 , l'écart de chaque fonction entre les points $(\tilde{y}, \tilde{\lambda})$ et (y_1, λ_1) est majoré par

$$\eta_k(\|\tilde{y} - y_1\| + |\tilde{\lambda} - \lambda_1|) \leq \eta_k(\|y - y_1\| + |\lambda - \lambda_1|).$$

On peut donc écrire

$$f(t, y, \lambda) - f(t, y_1, \lambda_1) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, y_1, \lambda_1)(y_j - y_{1,j}) + f'_\lambda(t, y_1, \lambda_1)(\lambda - \lambda_1) + g(t, y, y_1, \lambda)$$

où $g(t, y, y_1, \lambda)$ admet une majoration uniforme

$$\|g(t, y, y_1, \lambda)\| \leq (\|y - y_1\| + |\lambda - \lambda_1|) \eta(\|y - y_1\| + |\lambda - \lambda_1|)$$

pour un certain module de continuité η . En substituant $y = u(t)$, $y_1 = u_1(t)$ dans la dernière formule, on déduit de (*) les relations

$$\begin{aligned} w'(t) &= \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u_1(t), \lambda_1)(u_j(t) - u_{1,j}(t) - (\lambda - \lambda_1)v_{1,j}(t)) + g(t, u(t), u_1(t), \lambda), \\ w'(t) &= \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u_1(t), \lambda_1)w_j(t) + g(t, u(t), u_1(t), \lambda), \end{aligned} \quad (**)$$

avec la majoration uniforme

$$\|g(t, u(t), u_1(t), \lambda)\| \leq (C + 1)|\lambda - \lambda_1| \eta((C + 1)|\lambda - \lambda_1|) = o(\lambda - \lambda_1) ;$$

en effet

$$\|u(t) - u_1(t)\| = \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_1)\| \leq C|\lambda - \lambda_1|$$

d'après la remarque finale du § 1.2. L'équation (**) est linéaire en w , et donc K -lipschitzienne avec

$$K = \sup_{V_0} \sum_{1 \leq j \leq m} \|f'_{y_j}\|.$$

Comme $u(t_0) = u_1(t_0) = y_0$ et $v_1(t_0) = 0$, on a $w(t_0) = 0$, et par ailleurs $\tilde{w}(t) \equiv 0$ est une solution ε -approchée de (**) avec $\varepsilon = o(\lambda - \lambda_1)$. Le lemme de Gronwall V 3.1 montre que

$$\|w(t)\| = \|w(t) - \tilde{w}(t)\| \leq \varepsilon \frac{e^{KT} - 1}{K} = o(\lambda - \lambda_1),$$

c'est-à-dire, par définition de w , u , u_1 :

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_1) - (\lambda - \lambda_1)v_1(t)\| = o(\lambda - \lambda_1).$$

Ceci signifie que $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda_1)$ existe et coïncide avec $v_1(t)$. La fonction y admet donc bien des dérivées partielles premières

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) = f(t, y(t, \lambda), \lambda) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda).$$

La dérivée partielle $\frac{\partial y}{\partial t}$ est continue en (t, λ) puisque y l'est. Par ailleurs $v(t, \lambda) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ est la solution avec données initiales $t_0, v_0 = 0$ de l'équation linéarisée

$$(E'_\lambda) \quad v' = G(t, v, \lambda) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, y(t, \lambda), \lambda)v_j + f'_\lambda(t, y(t, \lambda), \lambda).$$

Ici G est continue en (t, v, λ) et localement lipschitzienne en v , puisque linéaire en cette variable. Par suite $v = \frac{\partial y}{\partial \lambda}$ est également continue en (t, λ) , ce qui implique que y est de classe C^1 . Enfin, on a bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, \lambda) \\ &= \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, y(t, \lambda), \lambda) \frac{\partial y_j}{\partial \lambda}(t, \lambda) + f'_{\lambda}(t, y(t, \lambda), \lambda) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} (f(t, y(t, \lambda), \lambda)) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \end{aligned}$$

et ces dérivées partielles secondes sont continues grâce à la deuxième ligne. \square

Généralisation. Le théorème s'étend aisément au cas où $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Il suffit en effet de fixer toutes les variables λ_i sauf une pour constater que $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \lambda_i}$ et que $v(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda_i}(t, \lambda)$ est la solution de l'équation linéarisée

$$(E_{\lambda_i}) \quad v'(t) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u(t), \lambda) v_j(t) + f'_{\lambda_i}(t, u(t), \lambda)$$

avec condition initiale $v(t_0) = 0$.

Le fait que $y(t, \lambda)$ soit encore de classe C^1 provient de ce que le théorème de continuité du § 1.2 est vrai globalement par rapport à l'ensemble des variables $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$: celui-ci entraîne la continuité en (t, λ) des dérivées partielles $\partial y / \partial \lambda_i$. Nous étudions maintenant la différentiabilité d'ordre supérieur : nous allons voir qu'elle se déduit aussitôt par récurrence du cas de l'ordre un.

Théorème. On suppose que f est de classe C^s et admet des dérivées partielles f'_{y_j} et f'_{λ_i} de classe C^s . Alors la solution $y(t, \lambda)$ du problème de Cauchy relatif à (E_{λ}) est de classe C^{s+1} .

Démonstration. Par récurrence sur s . Pour $s = 0$, il s'agit du théorème précédent. Supposons le résultat déjà démontré à l'ordre $s - 1$. Alors $y(t, \lambda)$ est de classe C^s . Il en est de même de sa dérivée

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) = f(t, y(t, \lambda), \lambda).$$

De plus $v(t, \lambda) = \frac{\partial y}{\partial \lambda_i}(t, \lambda)$ est la solution de l'équation linéarisée (E'_{λ_i}) , soit $v' = G(t, v, \lambda)$. Comme f'_{y_j} et f'_{λ_i} sont de classe C^s , on voit que G est de classe C^s ; les dérivées G'_{v_j} et G'_{λ_i} sont donc de classe C^{s-1} et l'hypothèse de récurrence implique que v est de classe C^s . Ceci montre que y est de classe C^{s+1} . \square

1.4. Dépendance de la solution en fonction de la donnée initiale

On désignera ici par $t \mapsto y(t, y_0, \lambda)$ la solution de l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \quad y' = f(t, y, \lambda)$$

de donnée initiale (t_0, y_0) . L'objectif est d'étudier la continuité ou la différentiabilité de $y(t, y_0, \lambda)$ en fonction des 3 variables t, y_0, λ . Ceci résoudra du même coup le cas particulier des solutions $y(t, y_0)$ d'une équation différentielle (E) sans paramètre.

Pour résoudre cette question, on considère la variable y_0 elle-même comme un paramètre et on pose donc $\mu = y_0$. La fonction $z(t, \mu, \lambda) = y(t, \mu, \lambda) - \mu$ satisfait alors la condition initiale $z(t_0, \mu, \lambda) = 0$ et l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(t, \mu, \lambda) &= \frac{\partial y}{\partial t}(t, \mu, \lambda) = f(t, y(t, \mu, \lambda), \lambda) \\ &= f(t, z(t, \mu, \lambda) + \mu, \lambda). \end{aligned}$$

La fonction $z(t, \mu, \lambda)$ est donc la solution de l'équation différentielle

$$(E_{\mu, \lambda}) \quad z' = f(t, z + \mu, \lambda)$$

avec donnée initiale $(t_0, 0)$. Les propriétés cherchées résultent alors des théorèmes déjà démontrés, appliqués à l'équation $(E_{\mu, \lambda})$ pour le paramètre $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+p}$. On peut donc énoncer :

Théorème. *Si f est de classe C^s et admet des dérivées partielles f'_{y_j} et f'_{λ_i} de classe C^s , alors $y(t, y_0, \lambda)$ est de classe C^{s+1} .*

1.5. Flot d'un champ de vecteurs

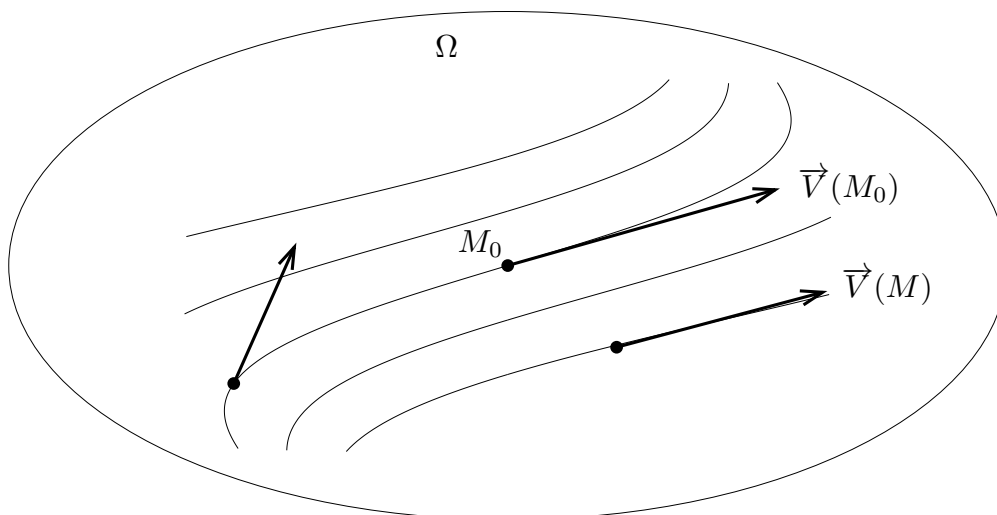
Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et un champ de vecteurs $M \mapsto \vec{V}(M)$ de classe C^k défini sur Ω , $k \geq 1$. On appelle équation différentielle associée au champ de vecteurs \vec{V} l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M).$$

Si nous représentons le point M par ses coordonnées notées $y = (y_1, \dots, y_m)$, et le champ \vec{V} par une fonction $\vec{V}(M) = f(y)$, l'équation devient

$$(E) \quad y' = f(y),$$

il s'agit donc tout simplement d'une équation différentielle dont le second membre est indépendant du temps. L'ouvert de définition est dans ce cas l'ouvert produit $U = \mathbb{R} \times \Omega$. Résoudre (E) revient à chercher les *courbes intégrales* (ou *orbites*) du champ de vecteurs.



Dans cette situation, il y a invariance des solutions par translation dans le temps : si $t \mapsto y(t)$ est solution, il en est encore de même pour $t \mapsto y(t + a)$. Pour un point $M_0 = x \in \mathbb{R}^m$ donné, considérons la solution maximale du problème de Cauchy $y(t)$ de donnée initiale $y(0) = x$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution maximale est définie sur un intervalle ouvert contenant le temps 0. On appelle « flot du champ de vecteurs \vec{V} » l'application

$$\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x) = y(t),$$

c'est-à-dire que $t \mapsto \Phi(t, x)$ est la solution de l'équation

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, x) = \vec{V}(\Phi(t, x)) \quad \text{avec } \Phi(0, x) = x.$$

La solution maximale n'est en général définie à x fixé que pour un certain intervalle ouvert de temps, de sorte que $\Phi(t, x)$ n'est défini que sur un certain voisinage ouvert Δ de $\{0\} \times \Omega$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$. Le fait que le domaine de définition maximal Δ soit ouvert dans $\mathbb{R} \times \Omega$ résulte du § 1.1, et d'après le § 1.4, on sait que Φ est une application de classe C^k sur Δ .

Pour que les solutions soient globales et que $\Delta = U = \mathbb{R} \times \Omega$, un comportement adéquat du champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ au voisinage du bord de Ω ; par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^m$, il suffit, d'après le critère de globalité des solutions du chapitre V § 3.4, que l'on ait une croissance au plus linéaire à l'infini $\|f(y)\| \leq A\|y\| + B$. Pour des raisons qui vont apparaître tout de suite, on note en général $\Phi_t(x)$ le flot plutôt que $\Phi(t, x)$. Une propriété immédiate est alors la loi de groupe

$$(*) \quad \Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x).$$

Ceci signifie précisément que si l'on suit une trajectoire à partir d'un point x pendant le temps s pour atteindre un point $\Phi_s(x)$, puis, à partir de ce point la même trajectoire pendant le temps t pour atteindre $\Phi_t(\Phi_s(x))$, cela revient au même que de suivre la

trajectoire pendant le temps $s + t$. Formellement, on a besoin du théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz pour pouvoir conclure. On voit que $t \mapsto \Phi_t$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $\text{Diff}^k(\Omega)$ des C^k difféomorphismes de Ω : on a en effet

$$\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t = \Phi_0 = \text{Id}_\Omega,$$

par suite Φ_t est un C^k -difféomorphisme d'inverse Φ_{-t} .

Dans le cas où les solutions ne sont plus globales, l'existence globale de $\Phi_t \in \text{Diff}^k(\Omega)$ n'est pas assurée, mais $\Phi_t(x)$ continue à exister en temps petit, et la loi de groupe (*) est encore valable là où les applications sont définies, donc au moins dans un voisinage de $\{0\} \times \Omega$. L'exercice 3.4 donne quelques critères supplémentaires pour que le flot soit globalement défini.

Le théorème de régularité du flot est l'un des points de départ de résultats plus globaux comme le théorème de Poincaré-Bendixson, que nous nous contenterons d'énoncer. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à approfondir la très vivante branche des mathématiques connue aujourd'hui sous le nom de théorie des systèmes dynamiques.

Théorème de Poincaré-Bendixson. Soit $M \mapsto \vec{V}(M)$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans un ouvert Ω du plan. On suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ ne contenant aucun zéro du champ de vecteurs \vec{V} et stable par le flot Φ_t pour $t \geq 0$ [ce qui implique que $\Phi_t(x)$ est défini pour tout $x \in K$ et tout $t \geq 0$]. Alors K est constitué d'une orbite périodique du flot.

2. Méthode des petites perturbations

2.1. Description de la méthode

On considère une équation différentielle

$$(E_\lambda) \quad y' = f(t, y, \lambda)$$

dépendant d'un paramètre λ ; on prendra pour simplifier $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue ainsi que ses dérivées partielles f'_{y_j} et f'_λ . Soit $y(t, \lambda)$ la solution maximale du problème de Cauchy satisfaisant la condition initiale $y(t_0, \lambda) = y_0(\lambda)$; y_0 peut donc dépendre ici de λ ; on supposera que $y_0(\lambda)$ est de classe C^1 .

On suppose connue une solution particulière $u(t) = y(t, \lambda_0)$ correspondant à une certaine valeur λ_0 du paramètre. L'objectif est d'étudier les petites perturbations de la solution, c'est-à-dire les solutions $y(t, \lambda)$ associées à des valeurs λ voisines de λ_0 . Ceci correspond à une situation physique très courante, dans laquelle on connaît la solution théorique idéale d'un problème et pour laquelle on cherche la solution réelle tenant compte de petites perturbations plus ou moins complexes. En général, on ne sait pas calculer la solution exacte $y(t, \lambda)$ pour $\lambda \neq \lambda_0$. Les résultats des § 1.3, 1.4 montrent que $y(t, \lambda)$ est de classe C^1 et on cherche donc une approximation au premier ordre

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) &= y(t, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0) \\ &= u(t) + (\lambda - \lambda_0)v(t) + o(\lambda - \lambda_0) \end{aligned}$$

où $v(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda_0)$ est à déterminer. On sait que v est la solution de l'équation linéarisée

$$(E'_{\lambda_0}) \quad v'(t) = \sum_{j=1}^m f'_{y_j}(t, u(t), \lambda_0)v_j(t) + f'_\lambda(t, u(t), \lambda_0),$$

la condition initiale s'écrivant ici

$$v(t_0) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t_0, \lambda_0) = y'_0(\lambda_0).$$

Comme (E'_{λ_0}) est linéaire, la résolution est en principe plus facile que celle de (E_λ) . Nous allons maintenant donner des exemples concrets de la méthode.

2.2. Perturbation d'un champ de vecteurs

Considérons dans le plan le champ de vecteurs

$$M = (x, y) \mapsto \vec{V}(M) = (-y, x).$$

Les lignes intégrales du champ $t \mapsto (x(t), y(t))$ sont les solutions du système différentiel

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

On résout ce système comme au chapitre X, § 2.2(b) en posant $z = x + iy$. Le système se ramène alors à l'équation $dz/dt = iz$, de sorte que la solution du problème de Cauchy avec donnée initiale $z_0 = x_0 + iy_0$ est $z = z_0 e^{it}$. Les lignes de champ sont les cercles centrés en 0.

On suppose maintenant que le champ de vecteurs subit une petite perturbation de la forme

$$M = (x, y) \mapsto \vec{V}_\lambda(M) = (-y, x) + \lambda(a(x, y), b(x, y))$$

où a, b sont de classe C^1 et où $\lambda \in \mathbb{R}$ est petit. On aboutit donc au système différentiel

$$(E_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \lambda a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda b(x, y) \end{cases} \iff \frac{dz}{dt} = iz + \lambda A(z) \quad (*)$$

avec $A(z) = a(x, y) + ib(x, y)$. Notons $z(t, \lambda)$ la solution telle que $z(0, \lambda) = z_0$. On sait que $z(t, 0) = z_0 e^{it}$ et on aimerait avoir une approximation de $z(t, \lambda)$ quand λ est petit. Écrivons

$$z(t, \lambda) = z(t, 0) + \lambda \frac{\partial z}{\partial \lambda}(t, 0) + o(\lambda).$$

Grâce à une différentiation de (*) par rapport à λ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (iz + \lambda A(z)) \\ &= i \frac{\partial z}{\partial \lambda} + A(z) + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} (A(z(t, \lambda))). \end{aligned}$$

Par conséquent $v(t) = \frac{\partial z}{\partial \lambda}(t, 0)$ satisfait l'équation

$$(E'_0) \quad \frac{dv}{dt} = iv + A(z(t, 0)) = iv + A(z_0 e^{it})$$

avec condition initiale $v(0) = \frac{\partial z}{\partial \lambda}(0, 0) = 0$. Cette équation se résout par variation des constantes en posant $v(t) = C(t)e^{it}$. Il vient

$$C'(t)e^{it} + iC(t)e^{it} = iC(t)e^{it} + A(z_0 e^{it}),$$

soit $C'(t) = e^{-it} A(z_0 e^{it})$. Comme $C(0) = v(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^t e^{-iu} A(z_0 e^{iu}) du, \\ v(t) &= C(t)e^{it} = \int_0^t e^{i(t-u)} A(z_0 e^{iu}) du, \\ z(t, \lambda) &= z_0 e^{it} + \lambda \int_0^t e^{i(t-u)} A(z_0 e^{iu}) du + o(\lambda). \end{aligned}$$

Ceci se calcule facilement dès que $a(x, y)$ et $b(x, y)$ sont des polynômes par exemple. Néanmoins, même dans ce cas, il est généralement impossible d'expliciter la solution exacte de l'équation non linéarisée.

2.3. Courbes intégrales d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point singulier

Soit $M \mapsto \vec{V}(M)$ un champ de vecteurs de classe C^s , $s \geq 1$, sur un ouvert Ω du plan. On se place au voisinage d'un point singulier qu'on suppose choisi comme origine des coordonnées pour simplifier. On a donc $\vec{V}(0) = \vec{0}$, et comme au chapitre X § 2.1, le système différentiel va s'écrire

$$(E) \quad \frac{dM}{dt} = \vec{V}(M), \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + g(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + h(x, y) \end{cases}$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice des dérivées partielles $(\vec{V}_x'(0, 0), \vec{V}_y'(0, 0))$ et où g, h s'annulent ainsi que leurs dérivées partielles premières au point $(0, 0)$. Les fonctions g, h sont par hypothèse définies sur une certaine boule $\overline{B}(0, r_0)$.

On cherche à comparer l'allure des courbes intégrales situées près de l'origine lorsqu'on effectue des « grossissements successifs » (observation à l'œil nu, à la loupe puis au microscope...). Autrement dit, on veut comparer la courbe issue d'un point M_0 et la courbe issue du point λM_0 (avec λ petit), lorsque ces courbes sont ramenées à la même échelle. Pour grossir la deuxième courbe dans le rapport $1/\lambda$, on effectue le changement de coordonnées $X = x/\lambda$, $Y = y/\lambda$. Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation du système devient

$$(E_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX + bY + \frac{1}{\lambda} g(\lambda X, \lambda Y) \\ \frac{dY}{dt} = cX + dY + \frac{1}{\lambda} h(\lambda X, \lambda Y). \end{cases}$$

La solution de (E_λ) de valeur initiale (X_0, Y_0) en $t = 0$, correspond à la solution de (E) de valeur initiale $(x_0, y_0) = (\lambda X_0, \lambda Y_0)$. Vu les hypothèses, les fonctions

$$\begin{aligned} G(X, Y, \lambda) &= \frac{1}{\lambda} g(\lambda X, \lambda Y) \\ H(X, Y, \lambda) &= \frac{1}{\lambda} h(\lambda X, \lambda Y) \end{aligned}$$

sont définies et de classe C^s sur $\overline{B}(0, r_0) \times]0, 1]$ et se prolongent par continuité en $\lambda = 0$ en posant $G(X, Y, 0) = H(X, Y, 0) = 0$. Ce prolongement est en fait de classe C^{s-1} sur $\overline{B}(0, r_0) \times [0, 1]$ car

$$G(X, Y, \lambda) = \int_0^1 (X g'_x(u\lambda X, u\lambda Y) + Y g'_y(u\lambda X, u\lambda Y)) du = \left[\frac{1}{\lambda} g(u\lambda X, u\lambda Y) \right]_{u=0}^{u=1}.$$

Si $s = 1$, les fonctions G, H sont bien lipschitziennes en X, Y (avec la même constante de Lipschitz que g et h). La solution $(X(t, \lambda), Y(t, \lambda))$ du problème de Cauchy est donc continue, et pour $s \geq 1$ elle est de classe C^{s-1} par rapport à (t, λ) , borne $\lambda = 0$ incluse. En particulier :

Proposition. *Lorsque λ tend vers 0, la solution de (E_λ) de valeur initiale (X_0, Y_0) converge vers la solution du système linéaire*

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX + bY \\ \frac{dY}{dt} = cX + dY. \end{cases}$$

Bien entendu, les méthodes précédentes permettent aussi d'avoir un développement limité à l'ordre 1 de la solution de (E_λ) au voisinage de $\lambda = 0$, comme on l'a vu au § 2.2.

2.4. Oscillations du pendule simple

On étudie les oscillations d'un pendule ponctuel de masse m suspendu à un fil de longueur l . L'équation du mouvement a été établie au paragraphe V 4.2(c) :

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta,$$

où θ désigne l'angle fait par le fil avec la verticale. On suppose ici qu'on lâche le pendule au temps $t = 0$ à partir de l'élongation maximale $\theta = \theta_m$ avec vitesse initiale nulle. Lorsque θ_m est petit, on fait habituellement l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$, d'où

$$\theta'' = -\omega^2 \theta \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

La solution cherchée est alors classiquement

$$\theta(t) = \theta_m \cos \omega t.$$

Néanmoins, ceci n'est pas rigoureusement exact, et on aimerait connaître l'erreur commise. Pour cela, on pose $\theta(t) = \theta_m y(t)$, de sorte que y est la solution de l'équation

$$y'' = -\omega^2 \frac{\sin \theta_m y}{\theta_m}$$

avec condition initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Le développement en série de $\sin \theta_m y$ donne

$$\frac{\sin \theta_m y}{\theta_m} = y - \frac{1}{6} \theta_m^2 y^3 + \frac{1}{120} \theta_m^4 y^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta_m^{2n} y^{2n+1} + \dots = \varphi(y, \lambda)$$

où $\lambda = \theta_m^2$ et où

$$\varphi(y, \lambda) = y - \frac{1}{6} \lambda y^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \lambda^n y^{2n+1} + \dots$$

est une fonction de classe C^∞ . La solution $y(t, \lambda)$ de l'équation

$$(E_\lambda) \quad y'' = -\omega^2 \varphi(y, \lambda)$$

est donc de classe C^∞ (on notera que tous les résultats du paragraphe 1 sont encore vrais pour des équations d'ordre ≥ 2 , puisque ces équations sont équivalentes à des systèmes d'ordre 1). On a $\varphi(y, 0) = y$ et $y(t, 0) = \cos \omega t$. Pour obtenir un développement limité de $y(t, \lambda)$ lorsque λ est petit, on dérive (E_λ) par rapport à λ , ce qui donne

$$(E'_\lambda) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (-\omega^2 \varphi(y, \lambda)) \\ &= -\omega^2 \left(\varphi'_y(y, \lambda) \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \varphi'_\lambda(y, \lambda) \right). \end{aligned}$$

On a $\varphi'_y(y, 0) = 1$ et $\varphi'_\lambda(y, 0) = -\frac{1}{6} y^3$, de sorte que la fonction $v(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, 0)$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} v''(t) &= -\omega^2 \left(v(t) - \frac{1}{6} y(t, 0)^3 \right) \\ &= -\omega^2 v(t) + \frac{1}{6} \omega^2 \cos^3 \omega t. \end{aligned}$$

Comme $y(0, \lambda) = 1$ et $\partial y / \partial t(0, \lambda) = 0$ pour tout λ , les conditions initiales sont $v(0) = v'(0) = 0$. La solution générale du système sans second membre est

$$v(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t.$$

On applique alors la méthode de variation des constantes avec

$$v(t) = \alpha(t) \cos \omega t + \beta(t) \sin \omega t.$$

D'après le chapitre VI § 3.3, ceci conduit au système

$$\begin{cases} \alpha'(t) \cos \omega t + \beta'(t) \sin \omega t = 0 \\ \alpha'(t)(-\omega \sin \omega t) + \beta'(t) \omega \cos \omega t = \frac{1}{6} \omega^2 \cos^3 \omega t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha'(t) = -\frac{\omega}{6} \cos^3 \omega t \sin \omega t \\ \beta'(t) = \frac{\omega}{6} \cos^4 \omega t = \frac{\omega}{48} (3 + 4 \cos 2\omega t + \cos 4\omega t), \\ \alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{24} \cos^4 \omega t \\ \beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{48} (3\omega t + 2 \sin 2\omega t + \frac{1}{4} \sin 4\omega t). \end{cases}$$

Les conditions initiales $v(0) = \alpha(0) = 0$ et $v'(0) = \alpha'(0) + \omega\beta(0) = 0$ donnent $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, donc $\alpha_0 = -\frac{1}{24}$, $\beta_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{24} (\cos^4 \omega t - 1) \cos \omega t + \frac{1}{48} (3\omega t + 2 \sin 2\omega t + \frac{1}{4} \sin 4\omega t) \sin \omega t \\ &= \frac{1}{16} \left(\omega t + \frac{1}{6} \sin 2\omega t \right) \sin \omega t, \\ y(t, \lambda) &= \cos \omega t + \frac{\lambda}{16} \left(\omega t + \frac{1}{6} \sin 2\omega t \right) \sin \omega t + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant à partir de là l'influence de l'élongation maximale θ_m sur la période des oscillations [on a vu au chapitre V, 2.4 c) que les solutions de faible amplitude étaient périodiques ; ceci n'est pas contradictoire avec le fait que le développement limité de $y(t, \lambda)$ ci-dessus soit non périodique, à cause du terme $O(\lambda^2)$ dépendant de t et lui-même non périodique]. Soit $T(\lambda)$ la période, de sorte que $\frac{1}{4} T(\lambda)$ correspond au plus petit $t > 0$ tel que $y(t, \lambda) = 0$, c'est-à-dire $y\left(\frac{1}{4} T(\lambda), \lambda\right) = 0$. Le

théorème des fonctions implicites montre que cette équation définit une fonction $T(\lambda)$ de classe C^∞ pour λ petit, car

$$T(0) = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{1}{4} T(0), 0 \right) = -\omega \sin \omega t \Big|_{t=\frac{1}{4} T(0)} = -\omega \neq 0.$$

Par différentiation de l'équation en $\lambda = 0$, on trouve de plus

$$\frac{1}{4} T'(0) \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{1}{4} T(0), 0 \right) + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{4} T(0), 0 \right) = 0$$

avec

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{4} T(0), 0 \right) = v \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) = \frac{\pi}{32},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T'(0)(-\omega) + \frac{\pi}{32} &= 0, & T'(0) &= \frac{\pi}{8\omega}, \\ T(\lambda) &= T(0) + \lambda T'(0) + O(\lambda^2) \\ &= \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{16} \lambda + O(\lambda^2) \right). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'approximation bien connue

$$T(\theta_m^2) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 + O(\theta_m^4) \right).$$

Cette approximation pourrait également se retrouver de manière directe à partir de la relation exacte

$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta_m}},$$

qui résulte des formules obtenues au chapitre V 4.2 c). Exercice pour le lecteur !

3. Problèmes

3.1. On considère une équation différentielle d'ordre p

$$(E_\lambda) \quad y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \lambda)$$

dépendant d'un paramètre λ , où f est définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p \times \mathbb{R}^q$.

(a) On suppose que $f(t, Y, \lambda)$ est de classe C^k sur U et qu'elle admet des dérivées partielles de classe C^k par rapport à chacune des composantes de Y et λ . On note

$$y(t, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}, \lambda)$$

la solution de (E_λ) satisfaisant les conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}.$$

Montrer que cette solution y est de classe C^{k+1} par rapport à l'ensemble des variables t, y_j, λ , de même que ses dérivées partielles $\partial y / \partial t, \dots, \partial^{p-1} y / \partial t^{p-1}$.

[Indication : se ramener au cas d'un système d'ordre 1].

(b) On suppose ici que $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u(t, \lambda)$ la solution satisfaisant la condition initiale

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t_0, \lambda) = y_k(\lambda), \quad 0 \leq k \leq p-1$$

où $y_0(\lambda), \dots, y_{p-1}(\lambda)$ sont de classe C^1 au moins en λ . Montrer que $v(t, \lambda) = \partial u / \partial \lambda(t, \lambda)$ est la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre p dont on précisera les conditions initiales.

(c) Application : Écrire l'équation du (b) pour $y'' = e^{\lambda t} y^2 + \lambda y'$, avec les conditions initiales $y(0) = e^{-\lambda}$, $y'(0) = \cosh 2\lambda$.

3.2. On s'intéresse ici au comportement des courbes intégrales passant par un point voisin de l'origine, pour le système (S) de l'exercice X 3.2. Pour tout $\lambda > 0$, on note

$$t \mapsto M(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda))$$

la solution maximale de (S) qui passe par le point de coordonnées $(\lambda, 0)$ au temps $t = 0$.

- (a) Déterminer la solution $t \mapsto (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ du système *linéarisé* au voisinage de l'origine, qui passe par le point $(1, 0)$ au temps $t = 0$.
- (b) A l'aide d'une homothétie convenable et des méthodes du chap. XI, montrer que $M(t, \lambda)$ admet un développement limité de la forme

$$M(t, \lambda) = (\lambda \tilde{x}(t) + \lambda^2 u(t) + O(\lambda^3), \lambda \tilde{y}(t) + \lambda^2 v(t) + O(\lambda^3))$$

où u, v sont des fonctions que l'on explicitera.

3.3. L'objet de ce problème est d'étudier les lignes de champ créées dans un plan par un dipôle électrique (par exemple une molécule polarisée telle que le chlorure d'hydrogène).

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où O est la position du dipôle (supposé ponctuel), et $(O; \vec{i})$ l'axe du dipôle. Si M est un point quelconque distinct de O , on note (r, θ) les coordonnées polaires de M relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On associe à M le vecteur radial $\vec{u} = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$ et le vecteur orthoradial $\vec{v} = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j}$. On admettra que le potentiel électrique $V(M)$ créé par le dipôle en tout point $M \neq O$ est donné par

$$V(M) = \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

(a) On rappelle les formules

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= dr \cdot \vec{u} + r d\theta \cdot \vec{v}, \\ \overrightarrow{\text{grad}} V &= \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Évaluer le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ créé par le dipôle.

Déterminer l'équation $r = \varphi(\theta)$ de la ligne de champ (courbe intégrale du champ de vecteurs \vec{E}) passant par le point de coordonnées polaires (r_0, θ_0) avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

(b) Le dipôle est supposé placé dans un champ électrique ambiant constant $\vec{E}_0 = \lambda \vec{j}$, d'intensité très faible par rapport à son champ propre \vec{E} .

(α) Écrire l'équation différentielle $\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta, \lambda)$ des lignes de champ relatives au champ $\vec{E} + \vec{E}_0$. Calculer le développement limité à l'ordre 1 de $f(r, \theta, \lambda)$ en fonction de λ .

(β) On note $r = \psi(\theta, \lambda)$ l'équation polaire de la ligne de champ passant par le point $(r_0, \frac{\pi}{2})$ [on ne cherchera pas à évaluer ψ].

Montrer que $w(\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(\theta, 0)$ satisfait à une équation différentielle linéaire.

En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $\psi(\theta, \lambda)$ en fonction de λ .

3.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^m et $M \mapsto \vec{V}(M)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur Ω . On considère le flot associé à l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}(M).$$

Montrer que toute solution maximale de (E) est globale dans les trois cas suivants :

(a) $\Omega = \mathbb{R}^m$ et \vec{V} satisfait à l'infini la condition $\vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{OM} \leq \|\overrightarrow{OM}\| \varphi(\|\overrightarrow{OM}\|)$ où $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, croissante et positive telle que $\int_1^{+\infty} dt/\varphi(t) = +\infty$.

Indication: majorer $v(\|\overrightarrow{OM}\|)$ où $v(t) = \int_1^t du/\varphi(u)$ à l'aide d'un raisonnement de type lemme de Gronwall.

(b) Ω est un ouvert borné et on a la condition $\|\vec{V}(M)\| \leq \varphi(d(M, \partial\Omega))$ avec $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante et positive telle que $\int_0^1 dt/\varphi(t) = +\infty$ (et donc telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$).

Indication: majorer $v(d(M, \partial\Omega))$ où $v(t) = \int_t^1 du/\varphi(u)$.

(c) Ω est un ouvert borné à bord régulier de classe C^1 , et $M \mapsto \vec{V}(M)$ se prolonge en champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ tel que $\vec{V}(M)$ soit tangent à $\partial\Omega$ en tout point du bord.