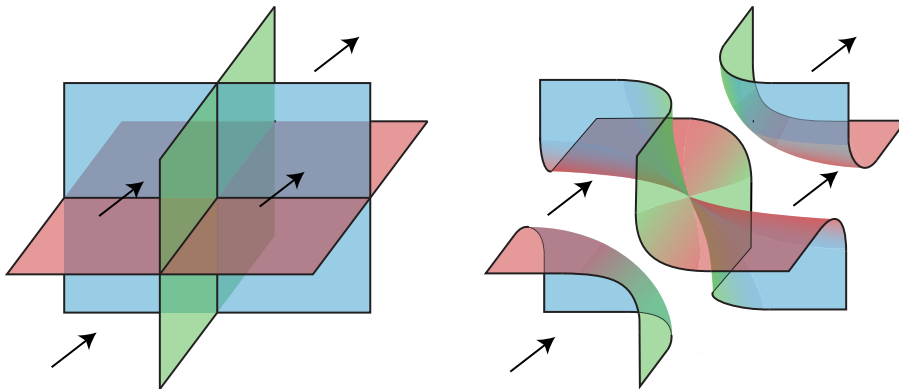


Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Pierre Dehornoy

Flots et surfaces

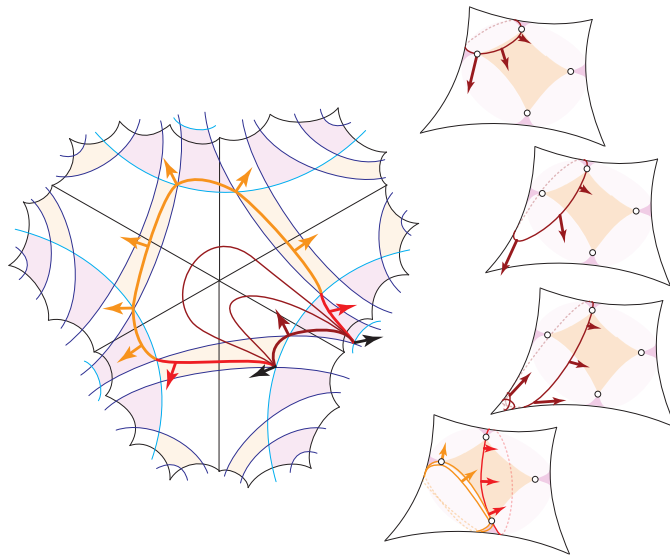


soutenue le 13 décembre 2019, devant un jury composé de :

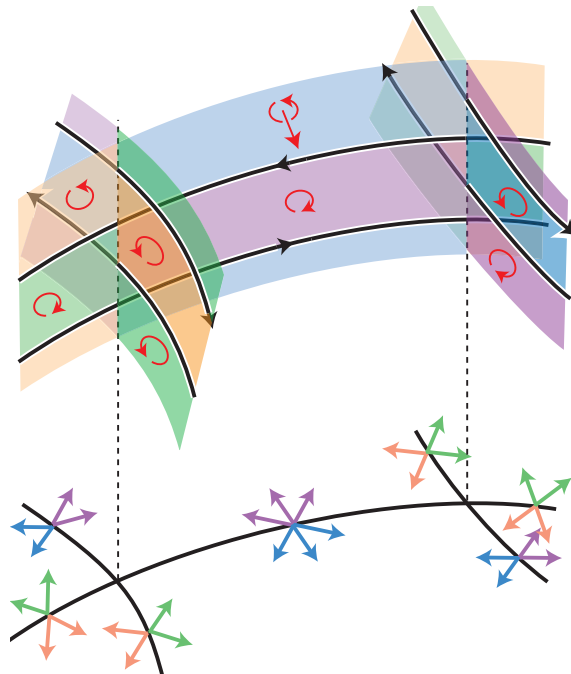
Marie-Claude ARNAUD	Université Paris 7	examinatrice
François BÉGUIN	Université Paris 13	rapporteur
Christian BONATTI	Université de Bourgogne, CNRS	examinateur
Étienne GHYS	École normale supérieure de Lyon, CNRS	examinateur
Erwan LANNEAU	Université Grenoble Alpes	examinateur
Christopher LEININGER	University of Illinois at Urbana-Champaign	rapporteur
Christine LESCOP	Université Grenoble Alpes	présidente

après avis de :

François BÉGUIN	Université Paris 13	rapporteur
Sergio FENLEY	Florida State University	rapporteur
Christopher LEININGER	University of Illinois at Urbana-Champaign	rapporteur



à papa, et à ses petites-filles



Résumé

L'étude des champs de vecteurs en dimension 3 et des flots qu'ils engendrent est une branche des systèmes dynamiques qui utilise de nombreux outils issus de la topologie de petite dimension. Dans mes travaux, et donc dans ce mémoire, je me concentre en particulier sur l'usage des surfaces pour l'étude de tels flots.

Le problème principal est la meilleure compréhension possible des *sections de Birkhoff* —des surfaces coupant toutes les orbites du flot et dont le bord est constitué d'un nombre fini d'orbites périodiques— avec pour objectif une classification complète. Cet objectif n'est pas atteint en général, mais on présente différents résultats dans cette direction.

Les sections de Birkhoff sont aussi utilisées comme outils. On présente deux applications, d'une part pour la *presque équivalence* entre flots d'Anosov, et d'autre part pour la construction d'exemples d'homéomorphismes de surface de type pseudo-Anosov.

Enfin on donne une autre utilisation des surfaces pour la construction d'invariants de champs de vecteurs avec la construction de deux invariants inspirés de la théorie des nœuds : le *tronc* pour les champs préservant le volume, et le *genre* pour les champs préservant le volume et qui sont dextrogyres.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Flots et sections globales	9
2.1	Exemples de flots	9
2.2	Définition et exemples de sections globales	12
2.3	Critère de Schwartzman	13
3	Flots et sections de Birkhoff [Deh15, Deh15a, CD16, DS19, DR19]	19
3.1	Définitions	19
3.2	Sections de petit genre pour les flots géodésiques	20
3.3	Critère de Schwartzman-Ghys	23
3.4	Classification des sections de Birkhoff pour les flots géodésiques	28
4	Applications des sections de Birkhoff [Deh13, DS19, DL19]	33
4.1	Presque-équivalence des flots d'Anosov transitifs	33
4.2	Constructions d'homéomorphismes pseudo-Anosov	36
5	Flots lévogyres [Deh15a, DP18, Deh17]	39
5.1	Définition et théorème de Ghys	39
5.2	Quels flots géodésiques sont lévogyres ?	40
6	Un invariant asymptotique et demi : le tronc et le genre [DR17, DR19]	45
6.1	Invariants asymptotiques	45
6.2	Le tronc d'un champ de vecteurs	46
6.3	Le genre d'un champ de vecteurs dextrogyre	48
7	Perspectives	49
7.1	Sur les sections de Birkhoff pour les flots d'Anosov algébriques	49
7.2	Sur les sections de Birkhoff pour les flots d'Anosov	50
7.3	Sur les sections de Birkhoff générales	51
7.4	Sur les surfaces de Birkhoff et la différence de Fried	51
7.5	Sur les flots lévogyres	52
7.6	Sur les invariants asymptotiques	52

8	Bibliographie	55
8.1	Articles présentés dans le manuscrit	55
8.2	Autres articles personnels	55
8.3	Autres références	56

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire est consacré aux travaux que j'ai réalisés depuis ma thèse, soutenue en juin 2011, et dédiés à l'utilisation des surfaces réelles pour l'étude topologique des champs de vecteurs en dimension 3. Le but est d'introduire les notions importantes, et de présenter les résultats principaux des articles publiés [Deh13, Deh15, DR17, Deh17, DP18] et des prépublications [CD16, DL19, DS19, DR19]. Les articles [Baa07, BDL18], consacrés aussi aux surfaces mais pas aux champs de vecteurs, ne sont pas présentés ici.

Le problème principal est l'étude, et pourquoi pas la classification, des *sections de Birkhoff* pour un champ de vecteurs non singulier (ou, par abus, pour le flot engendré) sur une variété de dimension 3 compacte. Par définition, il s'agit de surfaces compactes dont l'intérieur est transverse au champ de vecteurs et dont le bord est tangent à celui-ci. De telles surfaces réduisent l'étude de la dynamique du champ à celle de l'application de premier retour.

Historiquement, ces surfaces ont été introduites par Poincaré pour l'étude du problème à trois corps restreint, lequel admet, pour certaines valeurs d'énergie (et conjecturalement pour toutes), des disques ou des anneaux qui sont des sections de Birkhoff. Également utiles pour l'étude des flots géodésiques comme remarqué par Birkhoff, l'étude de l'*ensemble* des sections de Birkhoff pour un champ donné n'en est qu'à ses balbutiements. C'est un thème commun et une motivation pour la plupart des travaux présentés ici.

Si on s'intéresse aux objets plus simples que sont les surfaces de section globale (autrement dit les sections de Birkhoff dont le bord est vide), la compréhension est très bonne, grâce, d'une part, au critère de Schwartzman qui donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence de telles surfaces (voir l'article original [Sch57], et ses revisites [Ful65, Sul76, Fri82]), et, d'autre part, aux travaux de Fried et Thurston sur le genre des sections [Fri79, Thu86]. Ces résultats classiques sont présentés dans le chapitre 2.

Pour les sections de Birkhoff, de nombreuses questions sont encore ouvertes. Par exemple, il existe des flots n'admettant pas de section de Birkhoff (les flots sans orbites périodiques sur les sphères d'homologie), il existe des flots en admettant beaucoup. À ce titre, mentionnons que le résultat principal des articles [DP18, Deh17] est de démontrer que les flots géodésiques sur les orbifolds triangulaires hyperbo-

liques sont lévogyres, et donc admettent autant de sections de Birkhoff qu'on peut l'espérer.

Mais entre les deux il n'est pas toujours facile de décider si un flot admet des sections de Birkhoff, s'il en admet beaucoup, voire de contrôler leur genre. Dans cet ordre d'idée, mentionnons que, si on sait que tout champ de vecteurs est proche d'un champ admettant des orbites périodiques, on ne sait pas si tout champ est proche d'un flot admettant au moins une section de Birkhoff.

La direction principale de mes travaux va vers les champs dont on sait qu'ils admettent beaucoup d'orbites périodiques, et beaucoup de sections de Birkhoff. Le principal sujet est l'étude des flots Anosov (ou plus généralement pseudo-Anosov) transitifs, dont on sait que l'ensemble des orbites périodiques est dense, et dont Fried et Brunella ont démontré qu'ils admettent des sections de Birkhoff. La question suivante est une motivation importante

Question. (Fried 1983). Tout flot d'Anosov transitif admet-il une section de Birkhoff de genre au plus 1 ?

Si Fried pose cette question, c'est parce que pour le plus simple des flots d'Anosov, à savoir le flot géodésique sur une surface hyperbolique, il a démontré à l'aide d'une construction remontant à Birkhoff que la réponse est positive. Cette question est ouverte en général, et les résultats principaux de [Deh15, DS19], présentés dans le chapitre 3, sont que la réponse est positive pour tous les flots géodésiques sur des surfaces orbifoldiques hyperboliques.

Une fois que l'on sait qu'un flot admet une section de genre 1 (une sphère étant exclue pour un flot d'Anosov à feuilletages orientables), on peut se demander s'il en admet plusieurs, voire une infinité. Le résultat principal de [DS19], *a priori* surprenant, est que pour les flots géodésiques, et en fait pour tout flot d'Anosov admettant une section de Birkhoff torique, il y a bien une infinité de sections de genre 1. (Ce résultat avait d'abord été démontré dans [Deh13] en autorisant en plus des revêtements finis.)

Les résultats susmentionnés montrent qu'en fait, l'ensemble des sections de Birkhoff pour les flots d'Anosov transitifs est en général très gros. Il est alors naturel de chercher à y mettre de l'ordre. C'est ce qu'on commence à faire dans l'article [CD16] où on classe les classes d'isotopie de sections de Birkhoff à *bord antithétique*, une condition restrictive mais assez naturelle, pour les flots géodésiques sur les surfaces orbifoldiques hyperboliques. Dans ce cadre un peu particulier la classification se fait grâce à un objet élémentaire qui était jusque là passé sous les radars : les *normes d'intersection* associées aux multi-courbes sur les surfaces.

Autour de ce thème central, j'ai démontré quelques autres résultats.

D'abord, en utilisant les sections de Birkhoff à d'autres fins. Ainsi, dans le preprint [DL19], on s'intéresse aux applications de premier retour induite sur les sections de Birkhoff, et on caractérise les homéomorphismes pseudo-Anosov obtenus à l'aide de la construction de Birkhoff-A'Campo-Fried-Ishikawa.

D'autre part dans les articles [Deh13, DS19], on s'intéresse à la presque-équivalence entre flots. Une question de Ghys est de savoir si pour toute paire de flots d'Anosov transitifs, on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini de chirurgies de

Dehn-Goodman-Fried (une sorte de théorème de Lickorish-Wallace dans le contexte des flots Anosov). La question est ouverte en général, mais on montre à l'aide d'un résultat de Minakawa [Min13] que la réponse est positive pour les flots d'Anosov dits algébriques.

L'article [DR17] et le preprint [DR19] s'intéressent à un problème d'une toute autre nature : la construction d'invariants pour les champs de vecteurs à homéomorphisme près. Ce que nous faisons, c'est dans le premier article d'utiliser un invariant de nœuds dont la définition repose sur la notion de surface transverse, le *tronc*, pour construire un invariant semblable pour les champs de vecteurs, et dans le second d'utiliser des résultats sur les surfaces transverses pour construire un invariant des champs de vecteurs dextrogyres, le *genre*.

Le mémoire se termine par un chapitre sur des perspectives et projets pour les années futures.

Chapitre 2

Flots et sections globales

Ce chapitre contient des rappels sur les flots et sur la théorie de Schwartzman-Fuller-Sullivan-Fried pour les flots et champs de vecteurs [Sch57, Ful65, Sul76, Fri82]. Elle contient des rappels, mais aucun résultat personnel n'y est présenté.

La notion de *section locale* pour un champ de vecteurs est couramment utilisée pour l'étude des systèmes dynamiques. Il s'agit de considérer des surfaces ouvertes (souvent des disques) qui coupent toutes les orbites dans un voisinage d'une orbite donnée. L'application de premier retour sur cette surface, souvent appelée *application de Poincaré* et qui n'est souvent que partiellement définie, fournit alors des informations utiles.

Ici on étudie la notion plus restrictive de *section globale*, qui requiert que la surface considérée soit fermée et coupe toutes les orbites du flot. Afin d'adapter dans le chapitre suivant les résultats aux sections de Birkhoff, on travaille dans une variété M de dimension 3, orientée, compacte, dont le bord est une union (éventuellement vide) de tores de dimension 2. Ce contexte est légèrement plus général que le concept classique de section globale, mais les résultats s'y étendent sans peine.

On suppose M munie d'un champ de vecteurs X , tangent au bord ∂M , de classe au moins C^1 (dans ce mémoire on s'intéresse peu aux questions de régularité, celle-ci est toujours supposée suffisante). On note $\phi_X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ le flot induit par X .

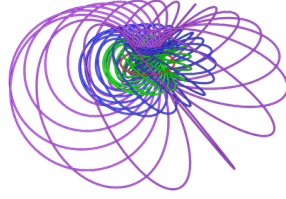
2.1 Exemples de flots

On s'intéresse exclusivement à des champs de vecteurs en dimension 3. Les exemples jouent un rôle prépondérant, aussi va-t-on en présenter quelques-uns : le *flot de Hopf*, les *flots géodésiques* et les *flots pseudo-Anosov*.

2.1.a Le flot de Hopf

Si on voit la sphère \mathbb{S}^3 comme plongée dans \mathbb{C}^2 , alors tout point est de la forme (z_1, z_2) avec $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Le **flot de Hopf** est alors défini par $\phi_{\text{Hopf}}^t(z_1, z_2) := (e^{it}z_1, e^{it}z_2)$. En dérivant en $t = 0$, on voit que le champ qui l'engendre est donné par $X_{\text{Hopf}}(z_1, z_2) := (iz_1, iz_2)$.

Toutes les orbites de ϕ_{Hopf} sont périodiques de période 2π . Ce sont des grands cercles orientés dans \mathbb{S}^3 . L'enlacement entre deux tels grands cercles est $+1$.



2.1.b Les flots de Seifert

Une variante du flot de Hopf est obtenu avec le **flot de Seifert** de paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il est défini par $\phi_{\alpha, \beta}^t(z_1, z_2) := (e^{i\alpha t} z_1, e^{i\beta t} z_2)$. Le champ qui l'engendre est donné par $X_{\alpha, \beta}(z_1, z_2) := (i\alpha z_1, i\beta z_2)$. Les deux cercles d'équation $z_2 = 0$ et $z_1 = 0$ sont encore des orbites périodiques, de périodes respectives $2\pi/\alpha$ et $2\pi/\beta$. Les autres orbites sont périodiques si, et seulement, le rapport α/β est rationnel, et dans ce cas ce sont des nœuds toriques de type (p, q) , avec p, q entiers premiers entre eux et tels que $p/q = \alpha/\beta$. La période de ces orbites est alors $2\pi/\text{pgcd}(\alpha, \beta)$.

2.1.c Les flots géodésiques

Si Σ est une surface de Riemann, alors on définit $T^1\Sigma$ comme le fibré unitaire tangent de Σ , c'est-à-dire le sous-ensemble de $T\Sigma$ formé des vecteurs de norme 1. C'est un fibré en cercle au-dessus de Σ , et donc une variété de dimension 3.

Si γ est une géodésique orientée sur Σ paramétrée à vitesse 1, on peut considérer son relevé, qu'on note $\vec{\gamma}$, qui est l'ensemble des vecteurs tangents de la forme $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$. On définit le flot géodésique ϕ_{geod} comme le flot dont les orbites sont les $\vec{\gamma}$, soit $\phi_{\text{geod}}^t(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) := (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$.

On peut généraliser un peu. Une **surface orbifoldique** \mathcal{O} est une surface qui est localement définie comme le quotient d'un ouvert simplement connexe d'une surface de Riemann par un groupe fini d'isométries. Nous ne nous intéressons qu'aux groupes préservant l'orientation, de sorte que les groupes finis d'isométries sont de la forme $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}^1$. Dans ce cas, les points où le groupe est non trivial sont isolés. On appelle un tel point **conique** et l'entier k correspondant **ordre** du point conique.

La courbure d'une surface orbifoldique est définie en se plaçant dans un revêtement local. Une telle surface n'admet pas toujours de revêtement universel, dans ce cas on parle de mauvais orbifold, sinon on parle de bon orbifold.

La classification des bons et mauvais orbifolds en dimension 2 et de leurs revêtements universels a été faite par Thurston ; la plupart des surfaces orbifoldiques sont bonnes [Thu80]. Pour l'énoncer, on définit la caractéristique d'Euler orbifoldique : si $\mathcal{O}_{g; k_1, \dots, k_s}$ est une surface orbifoldique de genre g avec points coniques d'ordre k_1, \dots, k_s , on pose $\chi(\mathcal{O}_{g; k_1, \dots, k_s}) := 2 - 2g - \sum_{i=1}^s (1 - \frac{1}{k_i})$.

2.1.1 Proposition (Thurston). *Soit $\mathcal{O}_{g; k_1, \dots, k_s}$ une surface orbifoldique orientable.*

1. Autoriser des groupes renversant l'orientation est intéressant, mais mène à des exemples qui ne sont pas pseudo-Anosov au sens classique, ce qui est un problème pour nous.

- Si $g = 0$ et $s = 1$, ou si $g = 0$, $s = 2$ et $k_1 \neq k_2$, alors $\mathcal{O}_{g;k_1,\dots,k_s}$ est une mauvaise surface orbifoldique.
- Sinon $\mathcal{O}_{g;k_1,\dots,k_s}$ est une bonne surface orbifoldique et elle est de type sphérique, euclidienne ou hyperbolique selon que sa caractéristique d'Euler orbifoldique est positive, nulle ou négative.

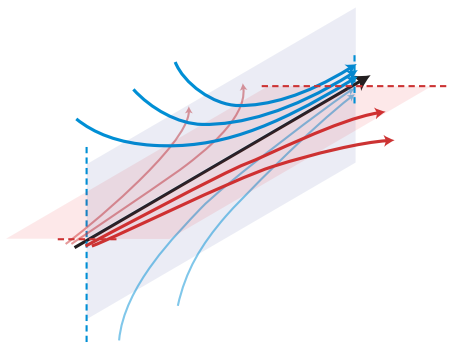
Quand on a affaire à une bonne surface orbifoldique, on peut directement considérer le flot géodésique sur le revêtement universel, et passer au quotient. En particulier si \mathcal{O} est à courbure -1 constante, alors le flot géodésique est donné par le quotient de $(\mathbb{T}^1\mathbb{H}^2, \phi_{\text{geod}})$ par un groupe fuchsien.

2.1.d Les flots de suspension

Si S est une surface et $f : S \rightarrow S$ un homéomorphisme, alors on peut considérer la **variété de suspension** M_f définie comme $S \times [0, 1] / (x, 1) \sim (f(x), 0)$. Elle est naturellement munie du **flot de suspension**, noté ϕ_{sus} , qui est le flot engendré par le champ $\frac{\partial}{\partial z}$ tangent à la seconde variable.

2.1.e Les flots pseudo-Anosov

Un flot ϕ^t est dit **topologiquement Anosov** s'il admet deux feuilletages invariants transverses, l'un contractant et l'autre dilatant (c'est-à-dire contractant si on renverse le temps), appelés *feuilletages stable* et *instable*. Puisque le feuilletage est invariant, les feuilles sont des réunions d'orbites. Le terme *topologiquement* vient du fait que la propriété donnée est topologique et ne dépend que du feuilletage orienté donné par les orbites de ϕ et non du paramètre temporel.



Les flots géodésiques sur les fibrés unitaires de surfaces orbifoldiques hyperboliques sont des exemples importants de flots d'Anosov. Les feuilletages invariants sont donnés par les directions asymptotiques : deux points sont sur la même feuille stable s'ils admettent des relevés dans le fibré unitaire tangent du revêtement universel $\mathbb{T}^1\mathbb{H}^2$ qui pointent vers le même point à l'infini. Les suspensions d'automorphismes linéaires hyperboliques de \mathbb{T}^2 également. Ces deux exemples forment la classe des **flots d'Anosov algébriques**.

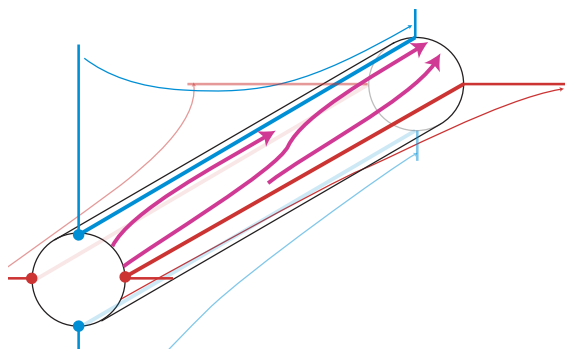
Si on donne cette définition topologique, c'est parce qu'elle se généralise : un flot ϕ^t est dit **pseudo-Anosov** s'il admet deux feuilletages singuliers invariants

transverses, l'un contractant et l'autre dilatant. Par *singulier*, on autorise un nombre fini d'orbites de ϕ^t à appartenir à la frontière de plus de deux feuilles. Les orbites singulières sont les mêmes pour les deux feuilletages, et le nombre de feuilles auxquelles une telle orbite appartient est appelé **indice** de l'orbite. Ainsi, une orbite régulière est d'indice 2.

Les suspensions d'homéomorphismes pseudo-Anosov de surfaces sont des exemples de flots pseudo-Anosov.

2.1.f Éclatement d'une orbite périodique

Si ϕ^t est un flot sur une variété M et γ une orbite périodique de ϕ^t , on peut considérer l'**éclatement** (ou compactification normale) M_γ de M le long de γ : c'est la variété $M \setminus \gamma \cup S(N\gamma)$ où $S(N\gamma)$ est le fibré sphérique normal à γ dans M . Celui-ci est l'espace des rayons du fibré normal $TM/T\gamma$. Autrement dit chaque point p de γ est remplacé par le cercle de ses directions normales. Si le champ X engendrant ϕ^t est de classe C^k , on peut étendre X en un champ X_γ de classe C^{k-1} sur M_γ . Pour cela, il est plus commode de décrire le flot $(\phi_\gamma)^t$ induit : si p est un point de $M \setminus \gamma$ on pose $(\phi_\gamma)^t(p) := \phi^t(p)$, et si (p, n) est un point de $S(N\gamma)$, on pose $(\phi_\gamma)^t(p, n) := (\phi^t(p), D\phi^t(p)(n))$. Le bord $S(N\gamma)$ de M_γ est alors un tore qu'on peut identifier à $\gamma \times \mathbb{S}^1$ et qui est invariant par X_γ .



Si ϕ^t est un flot pseudo-Anosov et γ une orbite périodique d'indice k , alors le flot X_γ a $2k$ orbites périodiques sur $\gamma \times \mathbb{S}^1$, dont k attractives et k répulsives.

2.2 Définition et exemples de sections globales

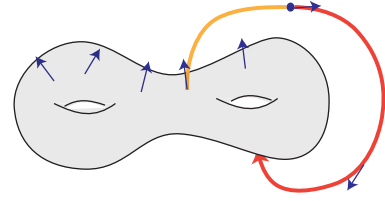
Voici la notion centrale, elle n'est pas spécifique à la dimension 3, mais c'est là qu'elle nous intéresse. Pour une définition en dimension n quelconque, il suffit de remplacer *surface* par *hypersurface de dimension $n-1$* .

2.2.1 Définition. Une **surface transverse** pour (M, X) est une surface compacte orientée à bord $(S, \partial S)$ plongée dans $(M, \partial M)$ telle que

1. en tout point p de S , le champ X est positivement transverse à S (c'est-à-dire $\langle X(p) \rangle \oplus T_p S = T_p M$),
2. en tout point p de ∂S , le champ X est positivement transverse à ∂S dans ∂M (c'est-à-dire $\langle X(p) \rangle \oplus T_p \partial S = T_p \partial M$).

On dit que $(S, \partial S)$ est une **section globale** pour (M, X) si de plus

3. il existe un $T > 0$ tel que, pour tout point p de M , il existe $t \in [0, T]$ tel que $\phi_X^t(p)$ est dans S (c'est-à-dire $\phi_X^{[0, T]}(S) = M$).



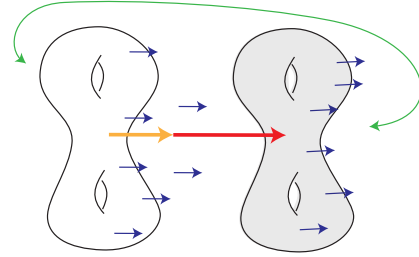
2.2.2 Exemple. Si X est un champ constant égal à (x_1, x_2, x_3) sur \mathbb{T}^3 , alors tout tore de la forme $e_i = \text{cste}$ est une section globale pour (\mathbb{T}^3, X) si x_i est non nul.

2.2.3 Exemple. Plus généralement, si X est un champ de vecteurs sur \mathbb{T}^3 tel que la i -ème coordonnée est toujours positive, alors tout tore de la forme $e_i = \text{cste}$ est une section globale pour (\mathbb{T}^3, X) .

2.2.4 Exemple. Prenons un tore plein de la forme $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ muni d'un champ dont la deuxième coordonnée est toujours positive. Alors tout disque de la forme $\mathbb{D}^2 \times \{*\}$ est une section globale. Il s'agit ici d'une section avec du bord, puisque la variété ambiante $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ en a aussi.

Remarquons que si $(S, \partial S)$ est une section globale pour (M, X) , alors ϕ_X induit une **application de premier retour** sur $(S, \partial S)$, notée ici $f_{X,S}$.

Quitte à multiplier X par une fonction scalaire λ , on peut supposer le temps de premier retour sur $(S, \partial S)$ constant égal à 1. Dans ce cas, on a un homéomorphisme entre $(M, \lambda X)$ et la suspension du difféomorphisme $f_{X,S}$ qui conjugue les champs de vecteurs :



$$(M, \lambda X) \simeq (S \times [0, 1] /_{(p,1) \sim (f_{X,S}(p), 0)}, \frac{\partial}{\partial z}).$$

2.3 Critère de Schwartzman

On donne maintenant un critère nécessaire et suffisant pour l'existence de sections globales. Pour le motiver, on commence par une remarque sur les orbites périodiques et leur intersection avec la section globale. Ensuite on donne deux définitions des cycles asymptotiques, dûes à Schwartzman et Sullivan respectivement. Enfin on donne le critère.

2.3.a Intersection homologique

Si $(S, \partial S)$ est une section globale pour (M, X) , alors pour tout orbite périodique γ de X , les points d'intersection entre S et γ sont transverses, et même positivement transverses, par la définition des sections globales. Par conséquent, en considérant les classes $[\gamma]$ et $[S, \partial S]$ dans $H_1(M; \mathbb{R})$ et $H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ respectivement et l'appariement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre ces deux espaces donné par l'intersection, on a

$$\langle [\gamma], [S, \partial S] \rangle > 0.$$

Par conséquent, si on note $\mathcal{P}er_X$ l'ensemble des orbites périodiques de X et $[\mathcal{P}er_X] \subset H_1(M; \mathbb{R})$ l'ensemble de leurs classes d'homologie, alors $[\mathcal{P}er_X]$ est inclus dans le demi-espace ouvert défini par $\langle \cdot, [S, \partial S] \rangle > 0$.

Ainsi une condition nécessaire à l'existence d'une section globale est l'existence d'un hyperplan rationel tel que $[\mathcal{P}er_X]$ est situé d'un seul côté de cet hyperplan.

On peut se demander si la condition précédente est suffisante. Elle ne l'est pas. En effet, il existe des flots sans orbite périodique, par exemple un flot linéaire de pente irrationnelle sur un tore, ou un contre-exemple à la question de Seifert comme le flot de Paul Schweitzer ou ceux de Kristina et Greg Kuperberg [Sch74, Kup94, KK96]. Dans ces exemples, l'ensemble $[\mathcal{P}er_X]$ est vide, mais il y a des sections globales pour les flots linéaires sur les tores et il n'y en a pas pour les contre-exemples à la question de Seifert.

Pour arriver à une condition suffisante, il faut enrichir l'ensemble $[\mathcal{P}er_X]$. C'est ce qu'on va faire avec les cycles asymptotiques.

2.3.b Orbites quasi-périodiques et cycles asymptotiques à la Schwartzman

De même qu'on peut associer une classe d'homologie à toute orbite périodique, on peut associer une (ou plusieurs) classe(s) d'homologie à toute mesure invariante. Voici la construction initiale de Sol Schwartzman [Sch57].

Soit p un point de M et t un temps positif. Les points $\phi_X^t(p)$ et p peuvent être reliés par un arc qu'on note $\alpha(p, t)$. Supposons M munie d'une métrique Riemannienne, on peut alors choisir $\alpha(p, t)$ de longueur bornée par le diamètre de M . L'arc $\alpha(p, t)$ n'est pas défini de façon unique.

2.3.1 Définition. Soit M compacte et X un champ de vecteurs. Soit p un point de M et $t > 0$. On appelle **orbite quasi-périodique** la courbe $k_X(p, t)$ obtenue en concaténant l'arc d'orbite $\phi_X^{[0, t]}$ avec un arc $\alpha(p, t)$ décrit ci-dessus.

L'arc $\alpha(p, t)$ n'étant pas unique, la courbe $k_X(p, t)$ ne dépend pas uniquement de p et t . Néanmoins, plusieurs constructions (voir aussi le chapitre 6) ne dépendent pas des choix. La construction de cycles asymptotiques est la plus simple d'entre elles.

2.3.2 Définition. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points quelconques de M et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tendant vers $+\infty$. Alors tout point d'accumulation de la suite $(\frac{1}{t_n}[k_X(p_n, t_n)])_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé **cycle asymptotique élémentaire de Schwartzman**. Le cône convexe engendré par les cycles asymptotiques élémentaire est appelé **cône de Schwartzman**, noté Schw_X , et ses éléments **cycles asymptotiques de Schwartzman**.

2.3.c Mesures invariantes et cycles asymptotiques à la Sullivan

On donne une autre définition, un peu plus abstraite, mais ne s'appuyant pas sur les valeurs d'adhérence et ne nécessitant pas de prendre une enveloppe convexe qui peut sembler arbitraire.

2.3.3 Définition. Une mesure de Borel positive μ sur M est dite **X -invariante** si, pour tout Borélien A , on a $\mu(\phi_X^t(A)) = \mu(A)$. On note \mathcal{Mes}_X l'ensemble des mesures de Borel positives X -invariantes.

2.3.4 Exemple. Toute orbite périodique γ de X donne une mesure X -invariante, notée δ_γ , définie par $\delta_\gamma(A) := \text{Leb}\{t \in [0, \text{per}(\gamma)] \mid \phi_X^t(p_0) \in A\}$, où p_0 est un point quelconque de γ . Le poids total de δ_γ est la période de γ .

2.3.5 Exemple. Si M est munie d'une structure riemannienne et que X est à divergence nulle, alors le volume riemannien est une mesure X -invariante.

On voit immédiatement que l'ensemble \mathcal{Mes}_X des mesures invariantes forme un cône convexe. Le théorème de Krylov-Bogoliubov affirme que, pourvu que M soit compacte, il existe une mesure de probabilité X -invariante. Ainsi \mathcal{Mes}_X est toujours non vide.

De même qu'on peut associer une classe d'homologie à toute orbite périodique, on peut associer une classe d'homologie à toute mesure invariante. Le point de vue initial de Schwartzman était d'approcher une mesure invariante par une suite d'orbites *presque* périodiques. On donne maintenant la construction plus concise *via* les *cycles feuilletés* de Sullivan.

Soit μ une mesure X -invariante. On définit $c_\mu : \Omega^1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$c_\mu(f) := \int_M f(X(p)) d\mu(p),$$

c'est une forme linéaire sur l'ensemble des 1-formes sur M , c'est-à-dire un élément du dual topologique de $\Omega^1(M; \mathbb{R})$. On vérifie que si f est une 1-forme exacte, alors c_μ s'annule (c'est ici que le caractère X -invariant est utilisé). Par conséquent c_μ descend en une forme linéaire, notée $[c_\mu]$, sur $H^1(M; \mathbb{R})$, et s'identifie donc canoniquement à un élément de $H_1(M; \mathbb{R})$.

2.3.6 Définition. Soit $\mu \in \mathcal{Mes}_X$, le **cycle feuilleté associé** est l'élément $[c_\mu]$ de $H_1(M; \mathbb{R})$ défini ci-dessus.

En particulier, puisque c'est l'image de l'ensemble des mesures invariantes par une application linéaire, l'ensemble des cycles feuilletés d'un flot forme un cône convexe. On retrouve en fait l'ensemble des cycles asymptotiques de Schwartzman :

2.3.7 Théorème (Sullivan 1976). *L'ensemble $\{[c_\mu] \mid \mu \in \mathcal{Mes}_X\}$ coïncide avec Schw_X .*

2.3.8 Exemple. Pour γ une orbite périodique de X et f une 1-forme fermée, on a $[c_{\delta_\gamma}](f) = \int_M f(X(p)) d\delta_\gamma(p) = \int_0^{\text{per}(\gamma)} f(X(\phi_X^t(p_0))) dt = \int_0^{\text{per}(\gamma)} f\left(\frac{d\phi_X^t(p_0)}{dt}\right) dt = f([\gamma]) = [\gamma]([f])$, *via* l'identification canonique de $(H^1)^*$ avec H_1 . Le cycle asymptotique $[c_{\delta_\gamma}]$ coïncide donc avec $[\gamma]$.

2.3.9 Exemple. Si μ est une mesure de probabilité X -invariante et ergodique, alors le théorème de récurrence de Poincaré implique que μ -presque tout point est récurrent. Soit p_0 un tel point, et notons $p_t := \phi_X^t(p_0)$, alors il existe une suite de temps t_n tels que p_{t_n} tend vers p_0 . La suite $(\frac{1}{t_n}[k_X(p_0, t_n)])_{n \in \mathbb{N}}$ tend alors vers $[c_\mu]$. Le cycle $[c_\mu]$ est donc un cycle élémentaire au sens de la définition 2.3.2.

2.3.d Le critère

On peut maintenant formuler le critère, dû à Schwartzman dans les cas des tores, puis généralisé et redémontré par Fuller, puis Sullivan, puis Fried. On l'énonce en dimension 3, mais la preuve est valide en dimension quelconque.

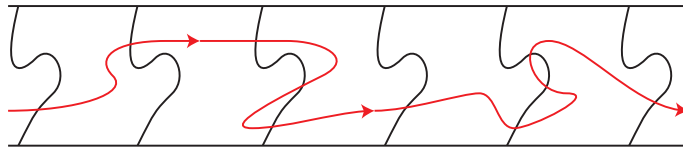
2.3.10 Théorème (Schwartzman 1957). *Soit M une variété compacte à bord torique et X un champ de vecteurs sur M . Alors une classe $\sigma \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ contient une section globale pour ϕ_X si, et seulement si, le cône \mathcal{Schw}_X est inclus dans le demi-espace d'équation $\langle \cdot, \sigma \rangle > 0$.*

2.3.11 Exemple. Si $X = (x_1, \dots, x_n)$ est un champ constant sur \mathbb{T}^n , alors \mathcal{Schw}_X est simplement la demi-droite $\mathbb{R}_+ \cdot (x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^n$. Tout hyperplan transverse à cette droite est bien une section globale.

2.3.12 Exemple. Un flot sur \mathbb{S}^3 , ou plus généralement sur une sphère d'homologie rationnelle, n'admet aucune section globale. En effet $H_1(M; \mathbb{R})$ est dans ce cas réduit à $\{0\}$.

2.3.13 Exemple. Le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à une surface n'admet aucune section globale. En effet, si $\vec{\gamma}$ est une orbite quelconque correspondant au relevé d'une géodésique orientée γ , alors la géodésique γ parcourue dans le sens opposé donne une orbite $\overleftarrow{\gamma}$ qui est opposée, au sens où, pour tout cycle c obtenu comme point d'accumulation de $\vec{\gamma}$, le cycle $-c$ peut être obtenu comme point d'accumulation de $\overleftarrow{\gamma}$. Ainsi le cône de Schwartzman contient 0, et donc le flot géodésique n'admet aucune section globale.

Le sens difficile de la preuve est le sens direct : trouver une surface de section globale dans la classe σ sachant qu'elle intersecte positivement tous les cycles asymptotiques. Plusieurs preuves existent [Sch57, Ful65, Sul76, Fri82]. Sullivan utilise le théorème de Hahn-Banach sur l'espace des formes linéaires. La preuve de Fuller repose sur l'idée de moyenne : partant d'une 1-forme f duale de σ , par compacité, l'évaluation de la forme $f_t := \frac{2}{t} \int_{-t}^t (\phi^t)_*(f) dt$ est strictement positive sur X pour t assez grand. La fonction $p \mapsto \int_{p_0}^p f_t \text{ mod } 1$ donne alors une fonction de M vers \mathbb{S}^1 dont la différentielle est f_t . Un niveau quelconque de f_t est alors une surface de section globale pour X dont la classe d'homologie est σ .



2.3.e Sections globales pour les flots pseudo-Anosov

Lorsque M n'a pas de bord et que X est un flot d'Anosov, Fried a remarqué que l'ensemble \mathcal{Schw}_X a une forme particulière [Fri82]. En fait, l'argument de Fried marche directement pour tous les flots pseudo-Anosov, également sur les variétés à bord.

2.3.14 Théorème (Fried 1982). *Soit $(M, \partial M)$ une variété de dimension 3 et X un flot pseudo-Anosov sur $(M, \partial M)$, alors on a $\text{Schw}_X = \text{Conv}(\mathbb{R} \cdot \mathcal{P}_{\text{er}_X})$. De plus, Schw_X n'a qu'un nombre fini de rayons extrémaux.*

Autrement dit Schw_X est un cône polyédral dont les rayons extrémaux sont donnés par certaines orbites périodiques de X .

La clé est l'existence de partitions de Markov finies pour les flots pseudo-Anosov, démontrée par Ratner pour les flots d'Anosov et dont la construction s'étend aux flots pseudo-Anosov [Rat73, FLP79, Bru94a]. Fried montre que les orbites extrémales sont alors un sous-ensemble des orbites coupant au plus une fois chaque rectangle de la partition [Fri82]. Or il y a au plus $k!$ telles orbites périodiques, où k est le nombre de rectangles de la partition.

Puisque la construction de partitions de Markov pour un flot pseudo-Anosov donnée par Ratner est algorithmique, la preuve de Fried donne un algorithme résolvant la question de l'existence de section globale pour un flot d'Anosov : il suffit de déterminer les orbites extrémales, puis de voir si leurs classes d'homologie vivent dans un demi-espace ouvert.

2.3.f Lien avec la norme de Thurston

La théorie de Schwartzman décrit les classes d'homologie —et en fait d'isotopie— des sections globales d'un flot. En dimension 3, on peut obtenir un peu plus, et contrôler de façon simple le *genre* des sections ainsi décrites.

Commençons par supposer la variété ambiante M compacte sans bord. Pour X non singulier et ζ_X un champ en position générale par rapport à X , l'ensemble des points où ζ_X est tangent à X est une sous-variété $L_{\zeta, X}$ de dimension 1, naturellement orientée et munie de multiplicités correspondant à l'indice de ζ_X autour de $L_{\zeta, X}$ (voir Figure 2.A). Elle dépend de ζ_X , mais sa classe d'homologie ne dépend que de X , c'est le Poincaré-dual de la classe d'Euler, notée $e(X^\perp)$, du fibré normal X^\perp à X [BT82].

Si S est une surface transverse à X , on peut projeter ζ_X sur S parallèlement à X , on obtient alors un champ de vecteurs, noté $\zeta_{X, S}$ sur S . Ce champ est singulier exactement aux points où S coupe $L_{\zeta, X}$. Mieux, l'indice de $\zeta_{X, S}$ en un tel point est plus ou moins la multiplicité de $L_{\zeta, X}$. Fried (généralisé par Thurston [Thu86]) a démontré qu'en fait tous les signes valent $+1$ [Fri79], d'où

2.3.15 Théorème (Fried 1979). *Soit M une variété de dimension 3 et X un champ non singulier sur M . Soit S une surface transverse à X . Alors on a*

$$\chi(S) = e(X^\perp)([S]).$$

La preuve de Fried est en fait très directe : puisque S est transverse à X , le fibré restreint $X^\perp|_S$ est isomorphe au fibré tangent TS . On a alors $e(X^\perp)([S]) = e(TS)([S]) = \chi(S)$.

Autrement dit la caractéristique d'Euler de S se lit directement sur sa classe d'homologie, et elle est donnée par l'évaluation de la classe d'Euler du fibré normal à X . En particulier, la caractéristique d'Euler des surfaces de section est une forme linéaire sur le cône de leurs classes d'homologie.

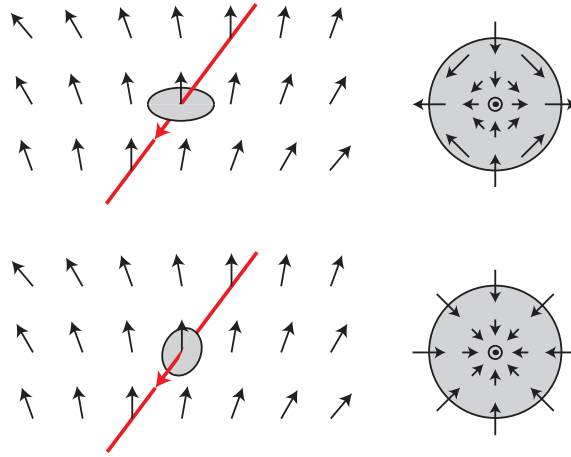


FIGURE 2.A – Orientation de l’entrelacs $L_{\zeta, X}$, dual de $e(X^\perp)$. Sur cette figure, le champ X est localement vertical. Un champ ζ en position générale par rapport à X est représenté. Il est tangent à X (*i.e.*, vertical) sur une sous-variété unidimensionnelle $L_{\zeta, X} := \{X \parallel \zeta_X\}$. Soit D un disque transverse à X et à $L_{\zeta, X}$. En projetant ζ sur D selon X on obtient un champ de vecteurs avec une singularité au centre de D . L’indice de ce champ de vecteur donne une multiplicité à D , et avec l’orientation de D induite par X , on obtient une orientation et une multiplicité pour $L_{\zeta, X}$. On vérifie que changer D peut changer l’indice en son opposé (en bas), mais comme cela change aussi l’orientation induite de $L_{\zeta, X}$, le produit des deux ne change pas.

Dans le cas où X est un champ pseudo-Anosov, on peut choisir pour ζ_X un champ tangent au feuilletage stable (en fait on ne peut faire ce choix que si le feuilletage est orientable, mais quitte à passer au revêtement d’orientation du feuilletage, on peut supposer dans tous les cas qu’on a fait ce choix). Dans ce cas, ζ_X est tangent à X exactement le long des singularités du feuilletage stable, c’est-à-dire le long des orbites singulières de X . On voit que le long d’une telle orbite γ l’indice de ζ_X est $1 - k_\gamma/2$ (puisque une orbite régulière est d’indice 2, on voit qu’une telle orbite ne contribue pas à la classe d’Euler, comme espéré), et donc on a $L_{\zeta, X} = \sum_{\gamma \text{ sing.}} \frac{2-k_\gamma}{2} [\gamma]$. Si S est une surface transverse, on obtient la formule

$$\chi(S) = \sum_{\gamma \text{ sing.}} \frac{2-k_\gamma}{2} \langle [S], [\gamma] \rangle.$$

Par exemple, si X est Anosov, $L_{\zeta, X}$ est vide, et les sections globales ne peuvent donc être que des tores.

Chapitre 3

Flots et sections de Birkhoff [Deh15, Deh15a, CD16, DS19, DR19]

Dans ce chapitre on passe à une notion plus spécifique, mais aussi plus souple au sens où elle existe plus souvent.

3.1 Définitions

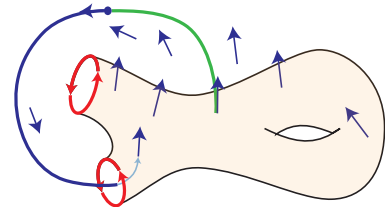
Maintenant on suppose la variété tridimensionnelle M compacte sans bord. On pourrait étendre au cas où M a du bord, mais, contrairement au chapitre précédent, c'est inutile pour les applications que nous avons en vue.

3.1.1 Définition. Une **surface de Birkhoff** pour (M, X) est une surface compacte orientée à bord immergée $i : (S, \partial S) \looparrowright M$ telle que

1. l'intérieur $i(\text{int}(S))$ est plongé dans M
2. en tout point p de $i(\text{int}(S))$, le champ X est positivement transverse à $i(\text{int}(S))$ (c'est-à-dire $\langle X(p) \rangle \oplus T_p S = T_p M$),
3. en tout point p de $i(\partial S)$, le champ X est tangent à $i(\partial S)$,

On dit que $(S, \partial S)$ est une **section de Birkhoff** pour (M, X) si de plus

3. il existe $T > 0$ tel que, pour tout point p de M ,
il existe $t \in [0, T]$ tel que $\phi_X^t(p)$ est dans S
(c'est-à-dire $\phi_X^{[0, T]}(i(S)) = M$).



Une surface transverse (*resp.* une section globale) est évidemment une surface de Birkhoff (*resp.* une section de Birkhoff). L'intérêt cette définition est qu'elle autorise *beaucoup* plus d'exemples.

En général on oublie l'application i et on parle directement de l'image de la surface dans M . On la mentionne ici pour souligner le comportement au bord, comme suit.

Le bord $i(\partial S)$ étant tangent au flot, et comme ce bord est une collection finie de courbes, c'est une collection finie d'orbites périodiques. On n'a pas requis que le

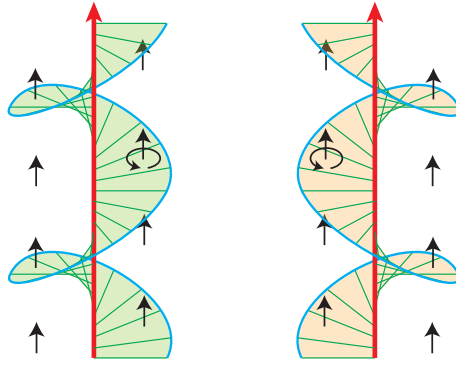


FIGURE 3.A – Deux sections de Birkhoff pour le flot vertical, au voisinage de composantes de bord. À gauche la multiplicité est -1 , et à droite $+1$.

bord ∂S soit plongé, car on autorise le fait que S s'enroule plusieurs fois sur une composante de bord. Notons néanmoins que chaque composante de bord étant une orbite de ϕ_X , elle est orientée par X . D'autre part, S étant orientée, elle induit une orientation sur chaque composante de bord.

3.1.2 Définition. Soit $i : (S, \partial S) \rightarrow M$ une section de Birkhoff pour (M, X) et $\{\gamma_j\}$ l'ensemble des orbites périodiques de ϕ_X qui sont dans le bord de S . Pour chaque j , la **multiplicité** de γ_j est l'entier $n_j \in \mathbb{Z}$ tel que $i(\partial S) = \cup_j n_j \gamma_j$, où γ_j a l'orientation induite par le flot, et ∂S l'orientation induite par celle de S .

Si on éclate l'orbite γ_j , le méridien de l'orbite éclatée est naturellement coorienté par X . Alors la multiplicité est l'intersection algébrique entre ce méridien et le bord de la section de Birkhoff.

Tout comme pour les sections globales, le flot induit une application de premier retour sur les sections de Birkhoff, qu'on note aussi $f_{X,S}$.

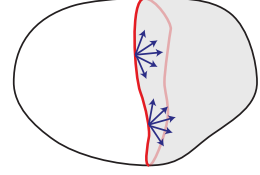
3.1.3 Exemple. Les orbites périodiques du flot de Hopf bordent toutes des disques. Chacun de ces disques est une section de Birkhoff pour $(\mathbb{S}^3, X_{\text{Hopf}})$. L'application de premier retour est l'identité.

3.1.4 Exemple. On peut généraliser l'exemple précédent pour un flot de Seifert de paramètres (α, β) . Un tel flot a toujours deux orbites périodiques : les grands cercles d'équation $z_2 = 0$ et $z_1 = 0$, de période respective $1/\alpha$ et $1/\beta$. Les autres orbites sont périodiques si α/β est rationnel. Dans tous les cas, les deux cercles $z_2 = 0$ et $z_1 = 0$ bordent des disques d'équation $z_2 \in \mathbb{R}_+$ et $z_1 \in \mathbb{R}_+$, qui sont deux sections de Birkhoff pour $(\mathbb{S}^3, X_{\alpha,\beta})$. Les applications de premier retour sont alors des rotations du disque d'angles α/β et β/α respectivement.

3.2 Sections de petit genre pour les flots géodésiques

Voici un des premiers exemples historiques de section de Birkhoff [Bir17, Fri83] :

3.2.1 Exemple. Soit γ une géodésique périodique simple (*i.e.*, sans point double) sur une sphère Σ . Alors γ sépare localement Σ en deux parties, qu'on va appeler noire et blanche. L'ensemble S_γ^\bullet des vecteurs tangents basés sur γ et pointant vers la partie noire est une surface de Birkhoff. Topologiquement c'est un anneau. Si γ coupe toutes les géodésiques de Σ , alors S_γ^\bullet est une section de Birkhoff pour $(T^1\Sigma, \phi_{\text{geod}})$. C'est par exemple le cas si Σ est une sphère à courbure positive et que γ est une géodésique simple dessus.



3.2.a La construction de Birkhoff-Fried

Si Σ est une surface de genre au moins 1, il n'y a pas de géodésique simple coupant toutes les autres géodésiques, de sorte que l'exemple 3.2.1 ne s'étend pas directement. Birkhoff, redécouvert et adapté par Fried, propose de considérer des géodésiques non simples, et d'adapter la construction autour des points doubles [Bir17, Fri83]. Cette construction a été indépendamment découverte par A'Campo et généralisée par Ishikawa [A'C75, A'C98, Ish04] dont nous adoptons le terme partage. Notre présentation suit plutôt Brunella [Bru94b], en vue du chapitre suivant.

Étant donnée une surface de Riemann Σ , on appelle **partage** une collection Γ de courbes sur Σ telle que Γ est en position générale (c'est-à-dire que les seules singularités sont des points doubles transverses) et le complémentaire $\Sigma \setminus \Gamma$ est coloriable —et colorié— en noir et blanc. Cette seconde condition est équivalente au fait que $[\Gamma]$ soit nulle dans $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. L'ensemble des vecteurs unitaires tangents à un partage Γ forme un entrelacs, appelé **entrelacs de partage** et noté $\vec{\Gamma}$, dans $T^1\Sigma$. Il a deux composantes pour chaque courbe de Γ , puisqu'au-dessus de chaque point Γ il y a deux vecteurs tangents à Γ qui sont opposés.

Un partage est dit **géodésique** si toutes les courbes qui le composent sont des géodésiques.

3.2.2 Définition. Soit Σ une surface de Riemann et Γ un partage géodésique. La **surface de partage** associée, notée S_γ^\bullet , est l'ensemble des vecteurs tangents basés en γ et pointant vers les faces noires, plus l'ensemble de tous les vecteurs basés aux points d'auto-intersection de Γ .

La surface S_γ^\bullet est une surface topologique. Elle n'est pas lisse dans les fibres des points doubles de Γ , mais on peut la lisser sans peine.

Si on voit Γ comme un graphe plongé dont les sommets sont les points d'auto-intersection et les arêtes les arcs de Γ reliant ces sommets, alors la surface S_γ^\bullet est constituée d'autant de rectangles que Γ a d'arêtes. Si Γ a v sommets, alors il y a $2v$ arêtes. Chacun de ces rectangles contribue pour -1 à la caractéristique d'Euler, de sorte qu'on a $\chi(S_\gamma^\bullet) = -2v$.

3.2.3 Théorème (Birkhoff 1917, Fried 1983). *Pour Σ une surface de Riemann et Γ un partage géodésique sur Σ , la surface de partage S_γ^\bullet est une surface de Birkhoff pour $(T^1\Sigma, \phi_{\text{geod}})$. Son bord, compté avec multiplicité, est $-\vec{\Gamma}$.*

Si Σ est à courbure constante et si $\Sigma \setminus \Gamma$ n'est constituée que de disques topologiques, alors S_γ^\bullet est une section de Birkhoff pour $(T^1\Sigma, \phi_{\text{geod}})$.

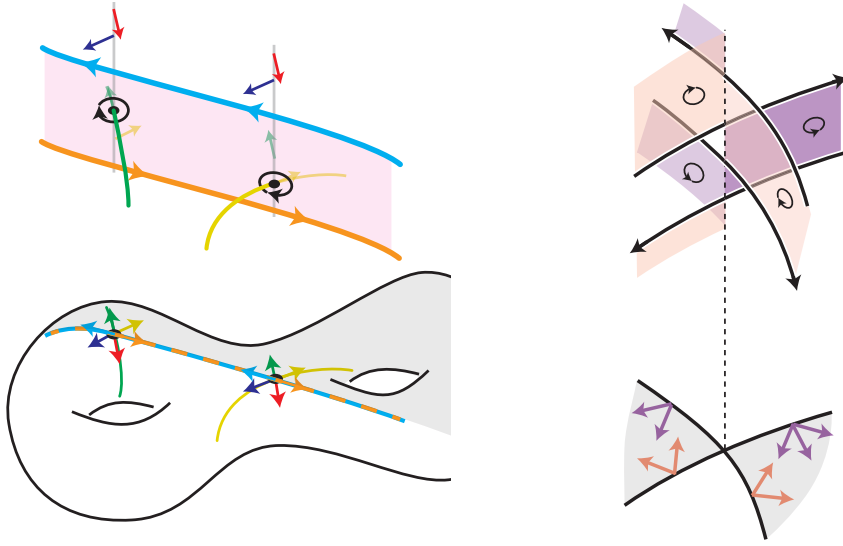
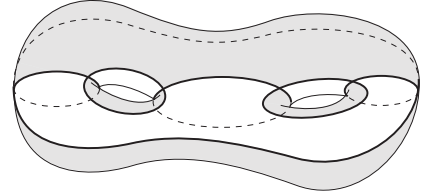


FIGURE 3.B – Une surface de partage S_γ^\bullet . À gauche au-dessus d’une arête de Γ . L’intérieur de S_γ^\bullet est transverse au flot géodésique, qui induit alors une orientation de S_γ^\bullet . Celle-ci est opposée à l’orientation du bord donnée directement par ϕ_{geod} , de sorte que le bord a multiplicité -1 . À droite au-dessus d’un point d’auto-intersection de Γ . La surface n’y est pas lisse, car les rectangles n’y sont pas tangents, mais on peut lisser localement.

3.2.4 Exemple. Sur une surface hyperbolique Σ_g de genre $g \geq 2$, on considère la collection Γ de $4g-2$ géodésiques dessinée ci-contre. Alors $\Sigma_g \setminus \Gamma$ est constituée de quatre $4g-2$ -gones. La surface S_γ^\bullet associée est donc une section de Birkhoff pour $(T^1\Sigma_g, \phi_{\text{geod}})$. Comme Γ a $4g-2$ points doubles, on a $\chi(S_\gamma^\bullet) = 4-8g$. Or S_γ^\bullet a $8g-4$ composantes de bords, deux par composante de Γ , donc S_γ^\bullet est un tore à bord.



3.2.b Des sections de genre 1 pour les orbifolds triangulaires [Deh15]

Parmi les sections de Birkhoff il est naturel de chercher les plus simples possibles. En ce sens, le genre est une bonne mesure de complexité. Le résultat élémentaire suivant n’a pas été publié, mais il motive plusieurs constructions.

3.2.5 Proposition. *Si ϕ est un flot pseudo-Anosov dont les feuilletages invariants sont orientables, alors ϕ n’admet aucune section de Birkhoff de genre 0.*

Démonstration. Si S est une section de Birkhoff pour ϕ et si \mathcal{F}^s désigne son feuilletage stable, alors $\mathcal{F}^s \cap S$ est un feuilletage orientable sur S . Comme il est orientable, la somme sur chaque composante de bord des indices de toutes ses singularités est entière (et non demi-entière comme ce pourrait être le cas avec un feuilletage non orientable). Comme toutes les singularités sont situées sur le bord de S et d’indice $-\frac{1}{2}$, chaque composante de bord porte au moins deux singularités. Par conséquent $\chi(S)$ est inférieur ou égal à $-|\partial S|$, et donc $g(S) \geq 1$. \square

Remarquons que si les feuilletages ne sont pas orientables, alors il peut exister des sections de genre 0, c'est par exemple le cas pour le flot de Bonatti-Langevin et la section de Birkhoff de Kamatani, Kadama et Noda qui est une sphère à quatre composantes de bord [BL94, KKN06].

Si on veut des sections les plus simples possibles pour un flot d'Anosov à feuilletage stable orientable, on doit donc chercher des sections de genre 1. L'exemple de Birkhoff-Fried 3.2.4 montre qu'il existe des sections de genre 1 pour le flot géodésique sur une surface. À ce jour, la question suivante est encore ouverte.

3.2.6 Question (Fried 1983). Tout flot d'Anosov transitif admet-il une section de Birkhoff de genre 1 ?

Dans [Deh15] on a étendu la classe des exemples pour laquelle la question admet une réponse positive.

3.2.7 Théorème (Dehornoy 2015). *Soit \mathcal{O} une surface orbifoldique hyperbolique qui est une sphère à trois ou quatre points coniques, alors le flot géodésique sur $T^1\mathcal{O}$ admet une section de Birkhoff de genre 1.*

La construction est en partie décrite sur la figure 3.C. Elle se sépare en trois cas, selon que \mathcal{O} est de type $\mathcal{O}_{0;2,q,r}$, $\mathcal{O}_{0;p,q,r}$ avec $p \geq 3$, ou $\mathcal{O}_{0;p,q,r,s}$. Dans le premier cas, la section de Birkhoff est une surface de partage au sens de 3.2.2. Dans les second et troisième cas, on choisit d'abord une ou deux géodésiques orientées sur \mathcal{O} qui vont constituer le bord de la section. Ensuite, on choisit un feuilletage orienté de certaines régions du complémentaire. La section de Birkhoff est alors l'ensemble des vecteurs tangents à ce feuilletage.

D'autres exemples sont apparus à peu près au même moment : Hashiguchi et Minakawa ont décrit une section de genre 1 pour les flots géodésiques sur certains orbifolds à trois pointes, mais pas tous [HM17].

Récemment, avec Mario Shannon, nous avons étendu la liste des orbifolds pour couvrir le cas de toutes les surfaces orbifolds hyperboliques [DS19].

3.2.8 Théorème (Dehornoy-Shannon 2019). *Soit \mathcal{O} une surface orbifold hyperbolique. Alors le flot géodésique sur $T^1\mathcal{O}$ admet une section de Birkhoff de genre 1.*

La construction mélange d'une part les surfaces de partage et les idées de *papillon* du cas (p, q, r) du théorème 3.2.7. Elle est synthétisée sur la figure 3.D.

3.3 Critère de Schwartzman-Ghys

Le critère de Schwartzman peut s'appliquer pour l'existence de sections de Birkhoff. Si la variété ambiante est une sphère d'homologie, il prend une forme particulièrement simple. Il y a néanmoins une subtilité due au fait qu'il n'est pas trivial de définir l'enlacement entre mesures invariantes. Ce critère est important dans le chapitre suivant. Nous l'incluons également, car nous y rajoutons un énoncé sur le contrôle du genre des sections Birkhoff, présenté dans [DR19]. Cet énoncé sur le genre s'est révélé très utile pour la chasse aux sections de petit genre.

On commence par un lemme élémentaire mais important. Notons qu'il n'est vrai que dans une sphère d'homologie rationnelle. C'est la dualité d'Alexander.

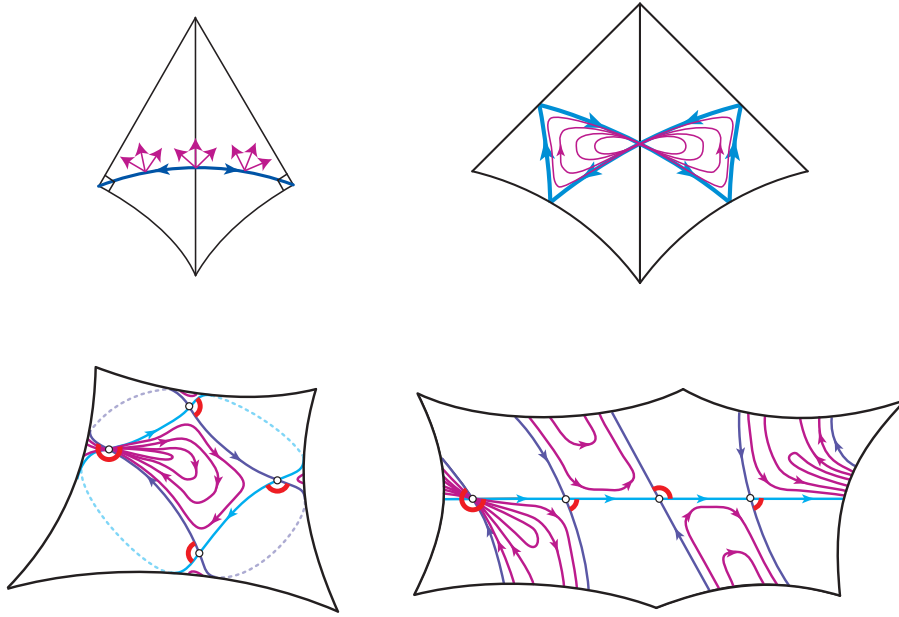


FIGURE 3.C – Des sections de Birkhoff de genre 1 pour les flots géodésiques sur $\mathcal{O}_{0;2,q,r}$ (en haut à gauche), $\mathcal{O}_{0;p,q,r}$ avec $p \geq 3$ (en haut à droite), ou $\mathcal{O}_{0;p,q,r,s}$ (en bas).

3.3.1 Lemme. *Soit M une sphère d'homologie rationnelle. Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_d$ un entrelacs dans M . Alors on a $H_1(M \setminus L; \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{i=1}^d \langle [m_i] \rangle$, où m_i est une courbe méridienne de K_i .*

3.3.a Enlacement et champs de vecteurs

Dans une sphère d'homologie rationnelle, on peut définir l'enlacement entre deux entrelacs distincts L_1, L_2 par la formule

$$\text{Enl}(L_1, L_2) := \langle L_1, S_2 \rangle,$$

où S_2 est une surface (ou même une 2-chaîne) rationnelle telle que $\partial S_2 = L_2$. Comme L_1 est homologiquement nulle, cette définition ne dépend pas du choix de S_2 . Ainsi l'enlacement entre deux collections finies d'orbites périodiques d'un champ X est bien défini, c'est un nombre rationnel (et même entier si on est dans une sphère d'homologie entière).

Comment étendre cela aux mesures invariantes quelconques ? Il n'y a pas de façon de définir l'enlacement entre mesures quelconques qui soit satisfaisante, mais entre deux mesures invariantes, c'est possible. Si les mesures invariantes correspondent à des orbites périodiques distinctes, on retrouvera la définition précédente (qui, en particulier, ne dépend pas de X). Mais si les mesures sont diffuses ou chargent des ensembles communs, la définition va dépendre de X .

Comme mentionné ci-dessus, il n'y a malheureusement pas de définition uniforme (c'est d'ailleurs un objectif). On raisonne comme suit : on commence par se

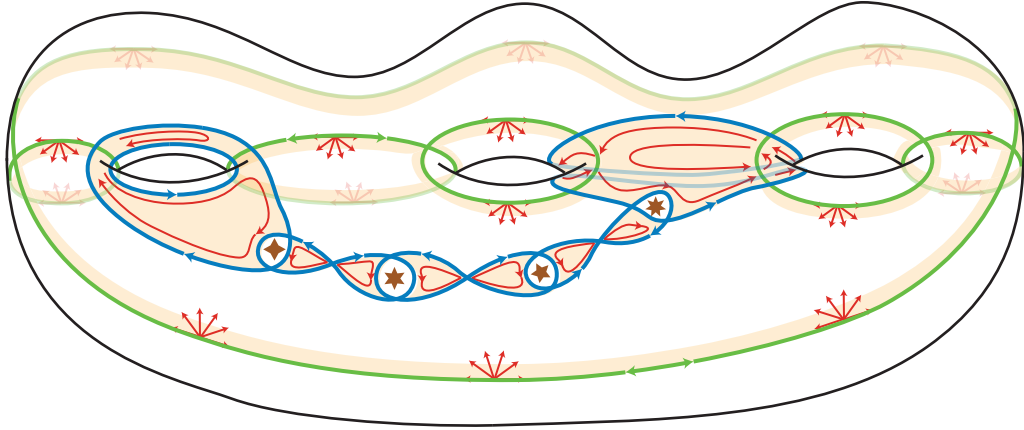


FIGURE 3.D – Une section de Birkhoff de genre 1 pour le flot géodésique sur une surface orbifoldique hyperbolique quelconque. Ici on suppose qu’aucun point conique (représentés par des étoiles) n’est d’ordre 2. Si c’était le cas, il faudrait modifier la construction au voisinage de ces points, c’est sans difficulté.

restreindre aux mesures ergodiques, le théorème de décomposition de Rokhlin permettra ensuite d’étendre par bilinéarité aux mesures quelconques. Ensuite si une mesure ergodique est concentrée sur une orbite périodique, la dualité d’Alexander implique que son complémentaire a une homologie unidimensionnelle. On travaille alors sur la variété éclatée (qui a un bord torique), le flot s’y étend, et toute mesure invariante μ donne un cycle de Schwartzman asymptotique $[c_\mu] \in H_1(M \setminus \gamma; \mathbb{R})$, qui est un multiple $k[m_\gamma]$ de la classe d’homologie du méridien m_γ . On définit $\text{Enl}^X(\mu, \delta_\gamma)$ comme ce coefficient k .

Remarquons que si μ était en fait la mesure de Dirac linéaire μ_γ concentrée sur γ , l’extension de μ au bord n’est pas évidente. En fait une telle extension n’est pas toujours unique, mais elle existe, et deux extensions différentes définissent le même cycle asymptotique (cela découle de l’existence et unicité du nombre de translation pour les homéos de \mathbb{R} commutant avec les translations entières). Ainsi $\text{Enl}^X(\delta_\gamma, \delta_\gamma)$ est un auto-enlacement qui mesure comment le champ X s’enroule autour de γ .

Reste le cas où on veut mesurer l’enlacement entre deux mesures diffuses (c’est-à-dire ne chargeant aucune orbite périodique) μ_1 et μ_2 . Ce cas n’est pas strictement nécessaire pour la suite, mais il marche grâce au théorème suivant [Arn86, Vog02].

3.3.2 Théorème (Arnold 1986, Vogel 2002). *Soit μ_1, μ_2 deux mesures ergodiques. Alors pour $\mu_1 \otimes \mu_2$ -presque toute paire $(p_1, p_2) \in M \times M$, la limite*

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 t_2} \text{Enl}(k_X(p_1, t_1), k_X(p_2, t_2))$$

existe et ne dépend pas de p_1, p_2 .

La définition $\text{Enl}^X(\mu_1, \mu_2) := \lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 t_2} \text{Enl}(k_X(p_1, t_1), k_X(p_2, t_2))$ pour p_1, p_2 génériques est alors naturelle.

3.3.b Le critère

En combinant le théorème de Schwartzman avec la dualité d'Alexander et la définition ci-dessus de l'enlacement (dans le cas où l'une au moins des mesures est concentrée sur des orbites périodiques), Ghys arrive au critère suivant [Ghy09] :

3.3.3 Théorème (Schwartzman-Ghys). *Soit M une sphère d'homologie entière et X un champ de vecteurs sur M . Une collection $\cup n_i \gamma_i$ d'orbites périodiques de X avec multiplicités entières borde une section de Birkhoff pour (M, X) si, et seulement si, pour toute mesure X -invariante μ , on a*

$$\sum_{i=1}^d n_i \text{Enl}^X(\mu, \delta_{\gamma_i}) > 0.$$

3.3.4 Exemple. Tout entrelacs de Hopf borde une section de Birkhoff pour le flot de Hopf. En effet, puisque toutes les orbites périodiques s'enlacent positivement, et que toute mesure invariante est combinaison linéaire de mesures de Dirac, on en déduit que tout entrelacs de Hopf (où toutes les composantes ont multiplicité +1) s'enlace positivement avec toute mesure invariante.

3.3.c Application aux flots d'Anosov sur les sphères d'homologie

Le théorème de Fried sur les flots pseudo-Anosov s'applique au complémentaire d'un nombre fini d'orbites périodiques dans un flot pseudo-Anosov. Ainsi pour toute collection $\Gamma = \cup_{i=1}^d \gamma_i$, il existe un nombre fini d'orbites ξ_1, \dots, ξ_k de X tel que, pour tout d -uplet n_1, \dots, n_d , la collection $\cup n_i \gamma_i$ borde une section de Birkhoff si et seulement si on a $\sum_{i=1}^d n_i \text{Enl}^X(\xi_j, \gamma_i) > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.

Autrement dit les $[\xi_j]$ définissent les rayons extrémaux dans $H_1(M \setminus \Gamma; \mathbb{R})$. Nous ne savons pas en général comment calculer les ξ_j en fonction de Γ .

3.3.d Contrôle du genre

À l'aide des remarques de la partie 2.3.f, on peut ajouter au critère 3.3.3 un contrôle du genre de la section de Birkhoff obtenue, c'est ce qu'on fait avec Ana Rechtman [DR19].

Si M une sphère d'homologie entière et X un champ non singulier sur M , comme la classe d'Euler de X est nulle il existe une trivialisaton du fibré normal à X , et donc un champ partout normal à X . Notons ζ_X un tel champ, comme en 2.3.f.

Si Γ est une collection d'orbites périodiques de X avec multiplicités, et si on s'intéresse aux surfaces de bord Γ , alors on travaille dans la variété éclatée M_Γ . Alors le champ ζ n'est pas tangent au bord de M_Γ . Pour cela il faut *redresser* ζ au bord de M_Γ (voir la figure 3.E). Le champ $\zeta_{X,\Gamma}$ ainsi redressé est maintenant tangent à X le long des composantes de bord. Plus précisément pour chaque composante de bord, $\zeta_{X,\Gamma}$ est tangent à X le long de deux courbes longitudes qui suivent le champ ζ non redressé. Alors pour S une surface transverse à X dans M_Γ , on peut encore considérer le champ $\zeta_{X,\Gamma}$ projeté sur S dont les singularités sont uniquement le long du bord de S .

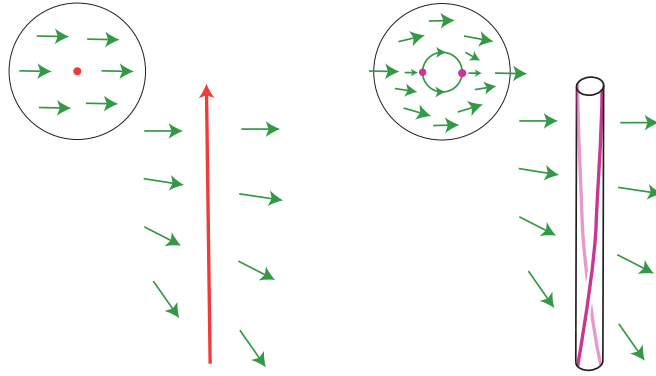


FIGURE 3.E – À gauche, le champ de vecteurs ζ_X (vert) sur M . Comme il est transverse à X , il est transverse à l'entrelacs Γ (rouge) formé d'orbites périodiques de X . Vu du dessus Γ est un point et ζ_X un champ de vecteur non singulier. À droite, la modification de ζ_X en $\zeta_{X,\Gamma}$. Vu du dessus, il faut ralentir ζ_X de sorte que sa vitesse transversale soit nulle sur Γ . L'ensemble $L_{\zeta_X,\Gamma}$ (rose) est alors formé de deux longitudes par composante de Γ .

Les résultats de Fried s'appliquent ici pour montrer que toutes les singularités contribuent dans le même sens, et donc $\chi(S) = e(X_\Gamma)([S])$. Il reste à évaluer cette quantité sur chaque composante de bord. Le résultat est donné par

3.3.5 Théorème (Dehornoy-Rechtman 2019). *Soit M une sphère d'homologie entière et X un flot sur M . Soit ζ_X un champ partout normal à X . Soit $\Gamma = \cup n_i \gamma_i$ un entrelacs composé d'orbites périodiques de X , avec multiplicités entières. Si Γ borde une section de Birkhoff S pour X , sa caractéristique d'Euler est donnée par*

$$\chi(S) = - \sum_{1 \leq i < j \leq d} (n_i + n_j) \text{Enl}(\gamma_i, \gamma_j) - \sum_{1 \leq i \leq d} n_i \text{Enl}^{\zeta_X}(\gamma_i, \gamma_i).$$

Dans l'énoncé précédent il faut préciser que $\text{Enl}^\zeta(K, K)$ désigne l'auto-enlacement d'un nœud K par rapport à un framing ζ , c'est-à-dire à une trivialisaton du fibré normal. C'est d'ailleurs ce terme qui est le plus difficile à comprendre dans la formule précédente.

3.3.6 Exemple. Considérons X_{Hopf} le champ de Hopf sur $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Pour $\zeta_{X_{\text{Hopf}}}$ on peut prendre le champ jX_{Hopf} pour j le quaternion j dans \mathbb{S}^3 vue comme sphère quaternionique unité. On alors alors $\text{Enl}^{\zeta_{X_{\text{Hopf}}}}(\gamma_i, \gamma_j) = +1$ pour $i \neq j$, mais $\text{Enl}^{\zeta_{X_{\text{Hopf}}}}(\gamma_i, \gamma_i) = -1$.

Une collection $\cup_i n_i \gamma_i$ borde une section de Birkhoff si, et seulement si, on a $\sum_i n_i > 0$. Dans ce cas, on a $\chi(S) = - \sum_{i < j} (n_i + n_j) - \sum_i n_i$. En particulier si on a $n_i = 1$ pour tout i entre 1 et d , on trouve $\chi(S) = -d(d-1) + d = -d(d-2)$. Or S a d composantes de bord, d'où $g(S) = 1 + d(d-3)/2$, ce qui correspond bien au genre d'un entrelacs de Hopf à d composantes.

3.3.7 Exemple. Pour un flot quelconque si on cherche une section de genre 1 avec une seule composante de bord, on doit donc avoir $\text{Enl}^{\zeta_X}(\gamma, \gamma) = -1$. Si le flot X

est lévogyre (voir le Chapitre 5) comme par exemple les flots géodésiques sur les orbifolds triangulaires, alors on a $\text{Enl}^{\zeta^x}(\gamma, \gamma) < 0$, et plus γ est longue, plus cet auto-enlacement a tendance à diminuer. Ainsi, il n’y a qu’un nombre fini de candidats possibles pour γ . C’est ainsi que des calculs informatiques nous ont montré que pour $(\mathbb{T}^1 \mathcal{O}_{p,q,r}, \phi_{\text{geod}})$, les seules sections de genre 1 à une composante de bord sont les sections données par le théorème 3.2.7. Pour autant, si on ne borne pas le nombre de composantes de bord, alors il n’y a pas de restriction sur le nombre de sections de Birkhoff de genre 1, et on va voir dans le Chapitre 4 que dans le cas des flots d’Anosov algébriques, il y en a une infinité.

3.4 Classification des sections de Birkhoff pour les flots géodésiques

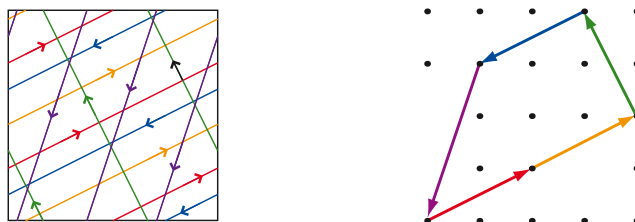
On a présenté des exemples de sections de genre minimal pour certains flots. Maintenant on présente des exemples où on est capable de décrire l’ensemble des sections de Birkhoff.

Qu’on puisse le faire n’est pas très étonnant : si on fixe le bord, alors l’ensemble des sections ayant ce bord correspond à l’ensemble des sections d’un flot, la théorie de Schwartzman nous dit qu’il s’agit d’un cône convexe, et Fried dit que dans le cas de flot pseudo-Anosov ce cône convexe est polyédral. Si on fixe les multiplicités du bord, alors on considère l’intersection de ce cône avec un sous-espace affine, on a donc affaire à un polytope convexe. Ce qui est intéressant dans les deux théorèmes ci-dessous, c’est qu’on a une description explicite du polytope en question.

Cela dit, les énoncés ne sont pas aussi généraux qu’on pourrait l’espérer, puisqu’on se restreint à des sections dont la multiplicité sur le bord est constante égale à -1 .

3.4.a Section de Birkhoff sur le tore plat [Deh15a]

Le résultat le plus élémentaire est tiré de ma thèse [Deh15a]. Soit $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ une collection de géodésiques orientées sur \mathbb{T}^2 , supposées rangées par pente croissante, dont la classe d’homologie est nulle. On note (p_i, q_i) la classe d’homologie de γ_i dans une base orientée de $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$. On considère alors P_Γ un polygone convexe dans \mathbb{R}^2 dont les côtés sont, dans l’ordre trigonométrique, les vecteurs (p_i, q_i) . Le fait qu’on revienne au point initial après avoir ajouté tous les vecteurs provient de la nullité homologique. Ce polygone est bien défini à translation entière près.



3.4.1 Théorème (Dehornoy 2015). *Soit Γ une collection de géodésiques orientées sur \mathbb{T}^2 et $\vec{\Gamma}$ la collection d'orbites du flot géodésique sur $\mathbb{T}^1\mathbb{T}^2$ correspondante. Alors l'ensemble des sections de Birkhoff pour $(\mathbb{T}^1\mathbb{T}^2, \phi_{\text{geod}})$ de bord $-\vec{\Gamma}$, à isotopie fixant le bord près, est en bijection avec l'ensemble des points entiers à l'intérieur de P_Γ . De plus la caractéristique d'Euler et le genre d'une telle section sont donnés respectivement par le double de l'aire de P_Γ et par le nombre de points entiers à l'intérieur de P_Γ .*

3.4.b Sections de Birkhoff à bord antithétique sur une surface hyperbolique [CD16]

Le théorème 3.4.1 n'est pas encore généralisé à une surface hyperbolique arbitraire, car l'analogue de P_Γ n'a pas été exhibé dans ce cas. La théorie de Schwartzman-Fried dit pourtant qu'un tel P_Γ existe toujours, mais il n'est pas clair qu'il admette une description combinatoire simple.

Si on se restreint au cas où Γ est constituée de géodésiques non orientées, et donc qu'on s'intéresse aux sections de Birkhoff dont le bord est **antithétique** — c'est-à-dire invariant par l'involution $(p, v) \mapsto (p, -v)$ de $\mathbb{T}^1\Sigma$ — alors un analogue de P_Γ a été exhibé avec Marcos Cossarini [CD16]. Pour cela, on étudie un analogue bidimensionnel de la norme de Thurston, introduit dans une remarque par Turaev [Tur02].

Soit Σ une surface quelconque et Γ une multi-courbe en position générale. Alors on définit la fonction $x_\Gamma : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ par

$$x_\Gamma(a) := \min_{\alpha \in a, \alpha \cap \Gamma} \text{card}\{\alpha \cap \Gamma\}.$$

La fonction x_Γ vérifie les deux propriétés $x_\Gamma(n.a) = |n|x_\Gamma(a)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x_\Gamma(a + b) \leq x_\Gamma(a) + x_\Gamma(b)$. La première égalité permet de l'étendre en une fonction $x_\Gamma : H_1(\Sigma; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}_+$, et la seconde inégalité implique que x_Γ est convexe, donc continue, et par conséquent on peut l'étendre en une semi-norme $x_\Gamma : H_1(\Sigma; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Cette extension est appelée **semi-norme d'intersection** associée à Γ .

Si la collection Γ est remplissante, c'est-à-dire que son complémentaire $\Sigma \setminus \Gamma$ n'est constitué que de disques topologiques, alors x_Γ est en fait une norme. Comme x_Γ prend des valeurs entières sur le réseau $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$, un résultat de Thurston implique que sa boule-unité, notée B_Γ , est un polyèdre dont les faces sont définies par des équations entières. De façon équivalente, sa boule-unité duale, notée B_Γ^* , est un polytope dont les sommets sont des points du réseau $H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$.

Le premier résultat de [CD16] est d'interpréter ces sommets de B_Γ^* , et en fait plus généralement les points entiers à l'intérieur de la boule-fermée \bar{B}_Γ^* . Pour cela, on considère de nouveau Γ comme un graphe plongé sur Σ , dont les sommets sont les points d'auto-intersection, on définit une **coorientation eulérienne** de Γ comme un choix d'orientation transverse pour chaque arête de Γ , de sorte qu'autour de chaque sommets il y a deux arêtes co-orientées trigonométriquement et deux arêtes orientées horairement. Alors si η désigne une coorientation eulérienne, elle induit par intersection algébrique une classe entière $[\eta] \in H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$.

3.4.2 Théorème (Cossarini-Dehornoy 2016). *Toute coorientation eulérienne η induit une classe $[\eta]$ qui est dans B_Γ^* . De plus, les sommets de B_Γ^* ainsi que toutes les classes entières congrues à $[\Gamma]$ modulo 2 sont donnés par les classes de certaines coorientations eulériennes, d'où $B_\Gamma^* = \text{Conv}(\{[\eta] \mid \eta \text{ coor. eul.}\})$.*

Comme il n'y a qu'un nombre fini de coorientations eulériennes et qu'il est possible de les énumérer, B_Γ^* est un polytope qui peut être algorithmiquement calculé. Ce travail a été réalisé par Paul Cottalorda qui, dans son travail de M2R en 2016, a implanté un algorithme qui donne B_Γ^* à partir d'une description PL de Γ .

Maintenant, suivant la construction de Birkhoff et une variante proposée par Brunella (construction 2 de [Bru94b]), on associe à toute coorientation eulérienne η une surface S_η dans $T^1\Sigma$ de bord $-\vec{\Gamma}$. Pour cela, on considère l'ensemble des vecteurs tangents basés sur Γ et pointant dans la direction indiquée par η . Comme la surface de partage, la surface S_η est constituée d'autant de rectangles que Γ compte d'arêtes. Mais les rectangles diffèrent. Au voisinage des points doubles de Γ , deux situations peuvent se produire, selon la configuration locale de η .

Si le point double est *alternant*, la situation est la même qu'avec la surface de Birkhoff-Fried, et il n'y a qu'à lisser la surface. Si le point double est *transparent*, alors S_η n'est pas une surface car il y a un segment singulier le long duquel quatre rectangles viennent se coller. On peut néanmoins désingulariser ces segments transversalement au flot géodésique, comme sur la figure 3.F

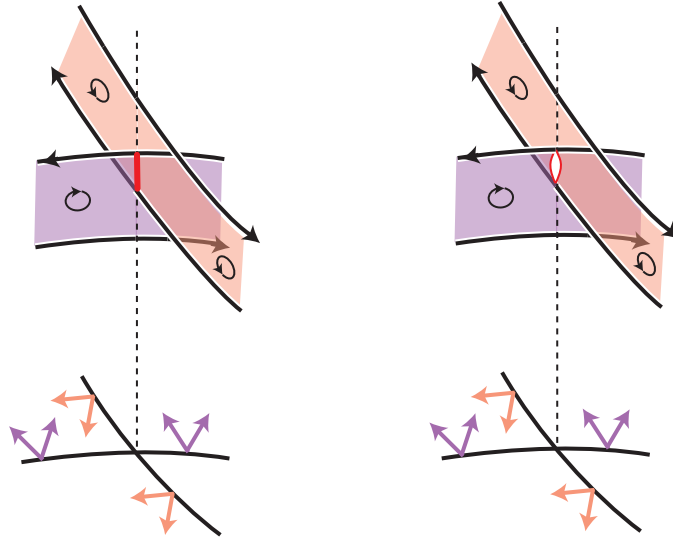


FIGURE 3.F – Désingularisation de la surface associée à une coorientation eulérienne dans la fibre d'un point double transparent.

3.4.3 Théorème (Cossarini-Dehornoy 2016). *Si η_1, η_2 sont deux coorientations de Γ qui sont cohomologues, alors les surfaces S_{η_1} et S_{η_2} sont isotopes à bord fixé. D'autre part toute surface dans $T^1\Sigma$ de bord $-\vec{\Gamma}$ et transverse à ϕ_{geod} est isotope à bord fixé à une surface S_η pour une certaine coorientation eulérienne η . De plus S_η est une section de Birkhoff si, et seulement si, la classe $[\eta]$ est à l'intérieur de B_Γ^* .*

Ainsi les classes d'isotopie de sections de Birkhoff sont énumérées par les points entiers congrus à $[\Gamma]$ modulo 2 dans B_Γ^* . Un exemple est montré sur la figure 3.G.

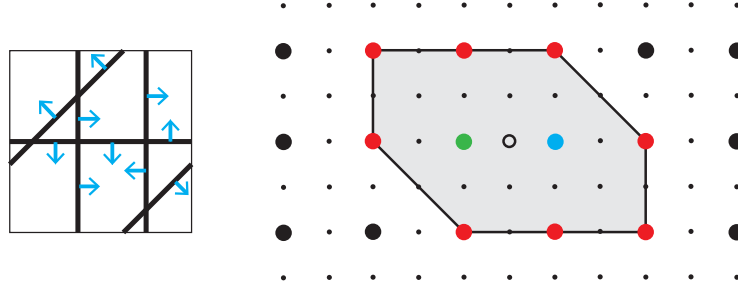


FIGURE 3.G – Illustration des théorèmes 3.4.2 et 3.4.3. À gauche, un partage γ formé de quatre géodésiques sur le tore \mathbb{T}^2 , et une coorientation eulérienne (flèches bleues). Vu comme graphe, γ a 5 sommets et 10 arêtes. À droite, la boule-unité duale $B_{x_\gamma}^* \subset H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ de la norme d'intersection associée. Le cercle vide montre l'origine. Les gros points désignent les classes $H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ congrues à $[\gamma]_2 \pmod{2}$. Parmi celles-ci, 10 (en bleu, vert et rouge) sont dans $B_{x_\gamma}^*$ et correspondent aux classes de cohomologie de toutes les coorientations eulériennes de γ (théorème 3.4.2). Par exemple, la classe correspondant à la coorientation de gauche est le point bleu. Les points bleu et vert sont à l'intérieur de $B_{x_\gamma}^*$, donc ils correspondent à des sections de Birkhoff pour ϕ_{geod} bordées par $-\overleftrightarrow{\gamma}$, tandis que les huit points rouges sont sur le bord de $B_{x_\gamma}^*$, et correspondent par conséquent aux classes d'isotopie de surfaces transverses à ϕ_{geod} , mais ne coupant pas toutes les orbites, et de bord $-\overleftrightarrow{\gamma}$ (théorème 3.4.3).

3.4.c Normes d'intersection et norme de Thurston

Finissons cette partie en évoquant non mes résultats, mais ceux d'Abdoul Karim Sane, qui a soutenu en juillet 2019 une thèse, codirigée avec Jean-Claude Sikorav.

Étant donné un partage Γ sur une surface Σ , on peut considérer la variété de dimension 3 $\mathbb{T}^1\Sigma \setminus \overleftrightarrow{\Gamma}$. Celle-ci fibre sur le cercle avec ϕ_{geod} comme flot de suspension. Alors la face correspondante de la norme de Thurston est une face fibrée, notée F_Γ , et la boule-unité duale de la norme d'intersection associée à Γ est alors l'intersection de F_Γ avec le plan affine $\partial^{-1}(-1, -1, \dots, -1)$. Ainsi toute boule-unité duale d'une norme d'intersection est aussi face fibrée d'une norme de Thurston.

La question à laquelle s'est intéressé Abdoul Karim Sane est de savoir quels polytopes peuvent ainsi être obtenus. Il a montré [San18]

3.4.4 Théorème (Abdoul Karim Sane 2018). *Il existe dans \mathbb{R}^4 des polytopes à sommets entiers et tous congrus mod 2 qui ne sont boule-unité duale d'aucune norme d'intersection.*

Ce résultat est intéressant du point de vue de la norme de Thurston, puisqu'on n'a aucun exemple de polytope symétrique dont on sache qu'il n'est pas boule-unité duale d'une norme de Thurston. Un but serait ensuite de montrer que les polytopes

de Sane sont aussi exclus comme boules unité duales de normes de Thurston, mais cet énoncé résiste encore.

En revanche, Abdoul Karim Sane a prolongé ses recherches par de jolis résultats combinatoires sur l'ensemble des partages sur une surface dont le complémentaire est connexe, modulo une opération de chirurgie naturelle [San19].

Chapitre 4

Applications des sections de Birkhoff [Deh13, DS19, DL19]

4.1 Presque-équivalence des flots d'Anosov transitifs

Le théorème de Lickorish-Wallace affirme que toute variété s'obtient par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de \mathbb{S}^3 .

Dans le contexte des flots d'Anosov, ou plus généralement pseudo-Anosov, la chirurgie de Dehn a un avatar, la chirurgie de **Dehn-Goodman-Fried** [Goo83, Fri83]. Il s'agit de faire une chirurgie de Dehn sur une orbite périodique γ du flot. Le champ X n'a pas de raison de se transporter en un champ continu après une telle opération, mais on peut trouver un champ X' colinéaire à X hors de γ , tel que l'image de γ est encore une orbite périodique de X' , et tel que X' coïncide avec X hors d'un voisinage de γ .

Si X est Anosov, il n'est pas clair que X' le soit puisque le flot est nécessairement reparamétrisé. Néanmoins il est topologiquement Anosov. En revanche si X est pseudo-Anosov, X' l'est aussi puisque le caractère pseudo-Anosov vient de la topologie des feuilletages invariants, lesquels sont préservés par la chirurgie. En fait Shannon démontre dans sa thèse que les chirurgies de Dehn-Fried et de Goodman coïncident, de sorte que si X est Anosov, on peut supposer X' Anosov.

Cette chirurgie de Dehn-Goodman-Fried transforme donc flots d'Anosov en flots d'Anosov, et il est raisonnable de se demander

4.1.1 Question (Ghys). Deux flots d'Anosov transitifs à feuilletages invariants orientables sont-ils toujours reliés par un nombre fini de chirurgies de Dehn-Goodman-Fried ?

Cette question est ouverte dans le cas général, mais on va présenter quelques résultats partiels. Si deux flots sont reliés par un nombre fini de chirurgies de Dehn-Goodman-Fried, on dit qu'ils sont **presque équivalents**.

Le lien avec les sections de Birkhoff est le suivant [Fri83] : si un flot ϕ possède une section de Birkhoff S avec premier retour $f_{S,\phi}$, alors ϕ est presque équivalent à la suspension de $f_{S,\phi}$. Les sections de Birkhoff ramènent donc le problème de la

presque équivalence pour les flots d’Anosov à celui de la presque équivalence pour les suspensions d’homéomorphismes pseudo-Anosov. Dans cette direction, le premier résultat important est

4.1.2 Théorème (Fried 1983). *Tout flot d’Anosov transitif transitif admet une section de Birkhoff.*

En conséquence, tout flot d’Anosov transitif est presque équivalent à la suspension d’un certain homéomorphisme pseudo-Anosov.

La construction de Birkhoff-Fried 3.2.4 montre que le flot géodésique est presque équivalent à la suspension d’un automorphisme Anosov du tore. De façon semblable, une réponse positive à question de Fried 3.2.6 impliquerait que tout flot d’Anosov transitif à feuilletages orientables est presque équivalent à la suspension d’un automorphisme du tore.

J’avais donné une première réponse partielle à la question 4.1.1 de Ghys dans [Deh13] où, en utilisant le théorème 3.2.7 sur les sections de genre 1 pour certains flots géodésiques, j’avais montré que la réponse était positive pour les flots d’Anosov algébriques —c’est-à-dire les suspensions d’automorphismes du tore et les flots géodésiques— si on autorise également les revêtements finis. À l’aide d’un résultat non publié de Minakawa, on répond dans [DS19] par l’affirmative à la question de Ghys pour les flots algébriques, sans recourir aux revêtements.

4.1.3 Théorème (Minakawa, Dehornoy-Shannon 2019). *Soit $(M_1, \phi_1), (M_2, \phi_2)$ deux variétés de type fibré unitaire tangent d’orbifold hyperbolique ou suspension d’automorphisme du tore, munies de flots d’Anosov correspondant respectivement au flot géodésique ou au flot de suspension. Alors (M_1, ϕ_1) et (M_2, ϕ_2) sont presque équivalents.*

L’idée de base est la suivante : si un champ (M, X) admet une section de Birkhoff $(S, \partial S)$ telle que le premier retour le long de S est donné par f , alors (M, X) est presque équivalent à la suspension $(\bar{S} \times [0, 1]/_{(x,1) \sim (\bar{f}(x),0)}, \frac{d}{dz})$, où \bar{S} est la surface obtenue en contractant les composante de bord de S , et $f : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$ l’application induite par f . En particulier, si (M, X) admet une section de Birkhoff de genre 1, alors (M, X) est presque équivalent à la suspension d’un certain difféomorphisme pseudo-Anosov de \mathbb{T}^2 . Si le long de chaque composante de bord de la section, celle-ci coupe deux fois chaque feuilletage invariant, alors le difféomorphisme sera Anosov, et donc algébrique.

De tels exemples de section de genre 1 ont été construits. Notons R la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et L la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Birkhoff-Fried-Ghys-Hashiguchi montrent (exemple 3.2.4) que le flot géodésique sur une surface compacte Σ_g de genre g admet une section de genre 1 avec premier retour $R^{g-1}L^2R^{g-1}L^2$.
- Brunella [Bru94b] montre que sur Σ_g il existe une section de genre 1 avec premier retour $R^{g-1}L^2R^{g-1}L^4$.
- j’ai montré [Deh15] que

- sur $\mathcal{O}_{0;2,3,r}$ il existe une section de genre 1 avec une composante de bord, et premier retour $R^{r-6}L$,
- sur $\mathcal{O}_{0;2,q,r}$ il existe une section de genre 1 avec une composante de bord, et premier retour $R^{q-4}LR^{r-4}L$,
- sur $\mathcal{O}_{0;p,q,r}$ il existe une section de genre 1 avec une composante de bord, et premier retour $R^{p-3}LR^{q-3}LR^{r-3}L$,
- sur $\mathcal{O}_{0;p,q,r,s}$ il existe une section de genre 1 avec deux composantes de bord, et premier retour $R^{p-2}LR^{q-2}LR^{r-2}LR^{s-2}L$.
- Hashiguchi et Minakawa montrent que sur $\mathcal{O}_{0;k_1,\dots,k_i}$ il existe une section de genre 1, sans préciser le premier retour.

Le théorème 3.2.8 avec Mario Shannon [DS19] est donc une généralisation de ces résultats puisqu'il affirme que tout flot géodésique sur une surface orbifold hyperbolique admet une section de genre 1. Le résultat de Minakawa [Min13] avec lequel on l'apparie est le suivant.

4.1.4 Théorème (Minakawa). *Si (M, X) admet une section de Birkhoff torique avec premier retour donné par une matrice A de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de trace ≥ 4 , alors (M, X) admet une autre section de Birkhoff telle que le premier retour est donné par une matrice B de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec $3 \leq \mathrm{tr}(B) < \mathrm{tr}(A)$.*

Ainsi on peut toujours diminuer la trace de l'application de premier retour, jusqu'à arriver à trace 3. Comme il n'y a qu'une classe de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de trace 3, toutes les suspension d'automorphismes du tore à feuilletages orientables sont presque équivalentes.

Le résultat de Minakawa n'a pas été publié, sa preuve figure dans un abstract introuvable [Min13]. Nous l'avons alors réécrite et étendue pour contrôler l'application de premier retour [DS19]. Pour A une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on note \mathbb{T}_A^3 la variété obtenue par suspension de A .

4.1.5 Théorème (Minakawa, Dehornoy-Shannon 2019). *Soit W une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ qui est un produit positif de R et de L , avec au moins un R et au moins un L . Alors le flot $(\mathbb{T}_{RW}^3, \phi_{\mathrm{sus}})$ admet une section de Birkhoff de genre 1 avec au plus 3 composantes de bord, et telle que le premier retour est donné par W .*

Autrement dit, deux suspensions de matrices qui diffèrent par une lettre R (ou L par symétrie) sont presque équivalentes, avec au plus 3 chirurgies à faire pour passer de l'une à l'autre.

L'idée de la preuve est résumée sur la figure 4.A. Il s'agit d'ajouter à la section horizontale une surface de Birkhoff (en fait un pantalon), et de désingulariser l'union des deux surfaces. Un choix astucieux du pantalon fait que cette **somme de Fried** a aussi genre 1, et un calcul permet de montrer que le premier retour est obtenu en multipliant la matrice par L^{-1} .

Notons que pour démontrer la presque-équivalence des flots d'Anosov algébriques (théorème 4.1.3), le théorème initial 4.1.4 de Minakawa suffit. L'intérêt du renforcement 4.1.5 avec Shannon est qu'il donne un premier accès une notion de distance sur l'équivalent du graphe gordien dans ce contexte, qu'on a choisi d'appeler **graphe**

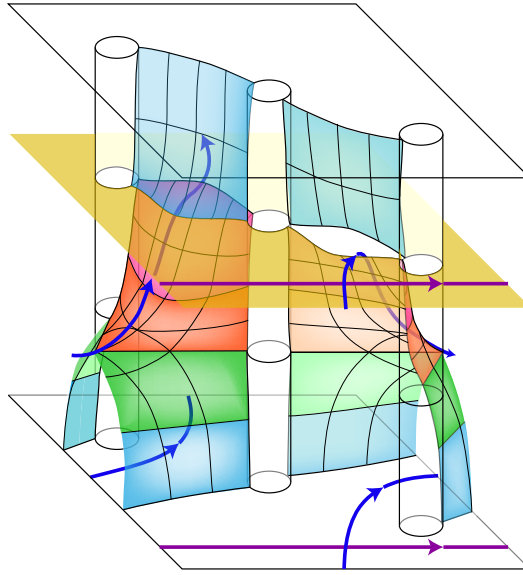


FIGURE 4.A – Ajout d’un pantalon dans la suspension d’un automorphisme de \mathbb{T}^2 . L’intersection entre le pantalon et une surface de section horizontale est constituée de deux arcs. On les désingularise transversalement au flot pour obtenir une nouvelle section de Birkhoff.

de Ghys. Les sommets de ce graphe sont les classes d’équivalence de flots d’Anosov transitifs, et deux tels sommets sont reliés par une arête s’il y a une chirurgie de Dehn-Goodman-Fried le long d’une orbite qui les relie. Le théorème 4.1.5 dit alors que les sommets $(\mathbb{T}_{RW}^3, \phi_{\text{sus}})$ et $(\mathbb{T}_W^3, \phi_{\text{sus}})$ sont à distance au plus trois dans ce graphe.

4.2 Constructions d’homéomorphismes pseudo-Anosov

Les homéomorphismes pseudo-Anosov ont été introduits par Thurston [Thu89]. On sait que tout homéomorphisme de surface est isotope à un homéomorphisme périodique, réductible, ou pseudo-Anosov. Cependant les constructions explicites d’homéomorphismes pseudo-Anosov ne sont pas si nombreuses. Il y a deux fameuses constructions de Thurston et Penner [Thu89, Pen88], qui montrent qu’en effectuant des twists de Dehn le long de certaines multi-courbes et dans un certain ordre, on obtient à coup sûr un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Avec Livio Liechti, nous donnons une nouvelle construction, cousine mais différente des constructions de Thurston et Penner [DL19]. Ces homéomorphismes sont ceux qu’on obtient comme application de premier retour dans l’exemple 3.2.4, c’est-à-dire pour les surfaces de partage. Le caractère pseudo-Anosov est donné par l’origine comme section de Birkhoff du flot géodésique. Celui-ci étant Anosov, les applications de premier retour sont pseudo-Anosov.

Une description explicite de ces applications comme produit de trois multitwists est fournie par A’Campo [A’C75, A’C98]. Ce que nous faisons c’est donner une

description alternative comme produit de deux **antitwists** —une notion que nous introduisons à cette occasion.

Cette description a pour avantage de décrire tous les exemples : tout produit de deux antitwists de signes opposés donne en fait l'application de premier retour pour une certaine surface de partage d'un certain flot géodésique.

Pour présenter les antitwists, il est utile de considérer des surfaces à petits carreaux un peu particulière : une surface à petits carreaux est **Ba'cfi-pavée** si en partant de tout carreau et en suivant les directions nord, est, nord, et est, dans cet ordre, on revient au carreau de départ.

Un **antitwist horizontal** est alors une application d'une surface Ba'cfi pavée qui laisse globalement invariante chaque cylindre horizontal, mais agit sur chacun comme la composée d'une certaine transvection et d'une symétrie horizontale. Il y a des conditions sur la transvection que nous ne détaillons pas. La condition de Ba'cfi-pavage assure la cohérence globale. Un antitwist horizontal est gaucher si chaque segment vertical est envoyé sur un segment penchant vers la gauche. On définit de même antitwist vertical (droitier).

4.2.1 Théorème (Dehornoy-Liechti 2019). *Soit \mathcal{O} une surface orbifold et γ un partage géodésique qui est en position générale sur \mathcal{O} . Soit S_γ^\bullet la surface de partage associée et soit f_γ l'application de premier retour sur S_γ^\bullet induite par le flot géodésique. Alors f_γ est le produit d'un antitwist horizontal gaucher et d'un antitwist vertical droitier.*

Réciproquement, si S est une surface à petits carreaux, et si α et β sont les âmes des cylindres horizontaux et verticaux. Si τ_α est un antitwist gaucher sur α et τ_β un antitwist droitier sur β , alors il existe une surface orbifold \mathcal{O} et un partage γ sur \mathcal{O} tel que le premier retour f_γ sur S_γ^\bullet est donné par $\tau_\beta \circ \tau_\alpha$.

La figure 4.B résume la construction et les propriétés des homéomorphismes Bacfi.

Nous déduisons également quelques propriétés supplémentaires des homéomorphismes ainsi obtenus et en particulier de leur facteur d'expansion.

4.2.2 Théorème. *Soit γ un partage sur une surface hyperbolique dont toutes les régions du complémentaire ont diamètre au plus D . Alors le facteur d'expansion de l'homéomorphisme f_γ est au plus e^{2D} .*

Enfin nous comparons la construction aux constructions classiques de Thurston et Penner.

4.2.3 Théorème. *Il existe un partage γ telle que l'homéomorphisme f_γ associé n'a aucune puissance qui puisse être obtenue par la construction de Penner ou celle de Thurston.*

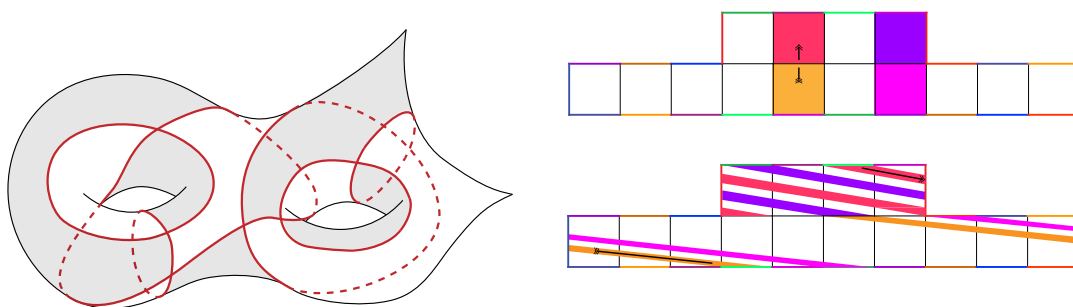


FIGURE 4.B – À gauche, une surface orbifolique \mathcal{O} de genre 2 avec 2 points coniques, et un partage γ sur \mathcal{O} . La surface S_γ^\bullet vit dans le fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{O}$. Elle est constituée des vecteurs tangents basés sur γ et pointant vers les faces noires. En haut à droite un modèle de S_γ^\bullet sous forme de surface à petits carreaux, où chaque petit carreau correspond à une arête entre deux points doubles de γ . Les identifications des côtés sont marquées par des couleurs. Remarquer que voyager dans la direction du vecteur $(2, 2)$ fait toujours revenir au point de départ : c'est la condition Ba'cfi. La surface a deux cylindres horizontaux, lesquels correspondent aux deux faces noires de $\mathcal{O} \setminus \gamma$, et trois cylindres verticaux qui correspondent aux faces blanches. L'effet d'un antitwist horizontal sur un cylindre vertical formé de 4 petits carreaux est montré en bas à droite. Il agit sur chaque petit carré comme la composition d'une transvection et d'une symétrie horizontale. Sur le cylindre horizontal du haut les images des petits carreaux s'enroulent presque deux fois sur le cylindre, cela vient du fait que la face noire correspondante contient un point conique d'ordre 2.

Chapitre 5

Flots

lévogyres [Deh15a, DP18, Deh17]

On passe à une classe particulière de flots qui ont de nombreuses sections de Birkhoff : les flots *dextrogyres* et leurs images miroir, les flots *lévogyres*.

5.1 Définition et théorème de Ghys

5.1.1 Définition. Soit X un champ de vecteurs sur une sphère d'homologie rationnelle M . On dit que X est **dextrogyre** (*resp.* **lévogyre**) si pour toutes mesures μ_1, μ_2 de Borel positives X -invariantes, on a $\text{Enl}^X(\mu_1, \mu_2) > 0$ (*resp.* < 0).

La définition est parfaitement symétrique entre lévogyre et dextrogyre, puisqu'il suffit de changer l'orientation de la variété pour changer un flot lévogyre en un dextrogyre. Néanmoins, beaucoup de variétés sont canoniquement orientées, et comme on va le voir, les flots géodésiques ont tendance à être lévogyres.

La définition précédente est motivée par le résultat suivant [Ghy09], corollaire direct du critère 3.3.3 de Schwartzman-Ghys :

5.1.2 Théorème (Ghys 2009). *Si X est un champ dextrogyre (*resp.* lévogyre) sur une sphère d'homologie rationnelle M , alors pour toute collection Γ d'orbites périodiques de X il existe une section de Birkhoff pour X de bord Γ (*resp.* $-\Gamma$).*

5.1.3 Corollaire. *Si X est un champ dextrogyre ou lévogyre, alors tout entrelacs composé d'un nombre fini d'orbites périodiques est fibré.*

5.1.4 Exemple. L'exemple le plus simple de flot dextrogyre est le flot de Hopf sur \mathbb{S}^3 . En effet toutes les orbites sont périodiques de période 1, forment des nœuds triviaux, et ceux-ci s'enlacent $+1$ fois. Toute mesure invariante est alors combinaison de mesures de Dirac, et l'enlacement entre deux mesures invariantes est simplement le produit de leurs masses totales.

5.1.5 Exemple. Le flot de Lorenz a motivé l'introduction de la notion 5.1.1. Il n'est pas exactement lévogyre, puisqu'il a trois points fixes. Néanmoins toutes les mesures qui ne se concentrent pas sur ces trois points s'enlacent positivement. En particulier

tous les nœuds et entrelacs composés d’orbites périodiques (appelés *nœuds et entrelacs de Lorenz*) sont fibrés. Cette propriété, remarquée et démontrée par Birman et Williams [BW83], trouve une interprétation presque satisfaisante avec le théorème de Ghys ci-dessus. Le “presque” vient du fait que toutes les mesures ne s’enlacent pas strictement positivement (à cause des points fixes).

5.2 Quels flots géodésiques sont lévogyres ?

Le flot de Hopf est un exemple de flot dextrogyre. On va voir que cela suggère naturellement de s’intéresser à d’autres flots.

5.2.a Sur les sphères riemanniennes

La sphère \mathbb{S}^3 est un revêtement double de $T^1\mathbb{S}^2$, le fibré unitaire tangent à la sphère bidimensionnelle. Si celle-ci est équipée de la métrique ronde à courbure constante -1 , alors le flot géodésique induit sur $T^1\mathbb{S}^2$ se relève en l’image-miroir du flot de Hopf. Donc le flot géodésique sur $T^1\mathbb{S}^2$, où \mathbb{S}^2 est muni de la métrique ronde, est lévogyre.

On peut se convaincre que ce n’est pas le seul flot lévogyre. Par exemple si on considère un ellipsoïde, alors le flot géodésique est complètement intégrable, et on peut décrire en particulier ses orbites périodiques : ce sont des nœuds toriques négatifs dans $T^1\mathbb{S}^2$. On vérifie que l’enlacement entre deux tels nœuds est toujours négatif, et en fait que toutes les mesures invariantes s’enlacent négativement.

5.2.b Sur les sphères à pointes

Les fibrés unitaires tangents de surfaces de genre au moins 1 ne sont pas des sphères d’homologie. Néanmoins, en considérant des quotients, on peut obtenir des sphères d’homologie rationnelle. C’est même simple : le fibré unitaire tangent d’une surface orbifoldique est une sphère d’homologie si, et seulement si, la surface orbifoldique est topologiquement une sphère, et donc si la surface orbifoldique est une sphère avec un certain nombre de points coniques, et que sa caractéristique d’Euler orbifoldique est non nulle.

On s’intéresse alors aux surfaces orbifoldiques munies d’une métrique à courbure constante. Si la courbure est positive, on a affaire à un quotient de la sphère ronde, dont le flot géodésique est encore un quotient de l’image-miroir du flot de Hopf, et donc est lévogyre.

Si la courbure est nulle, on a affaire à un quotient d’un tore plat. Dans ce cas le fibré unitaire tangent n’est pas une sphère d’homologie, car la caractéristique d’Euler orbifoldique est nulle. Néanmoins le flot géodésique est dans ce cas horizontal, de sorte que tous les cycles asymptotiques sont nuls. Ainsi l’enlacement entre deux mesures invariantes quelconques est bien défini. Dans le cas du tore plat, on a montré dans [Deh15a] que l’enlacement entre deux mesures portées par des collections finies d’orbites périodiques homologiquement nulles est toujours négatif ou nul. Plus précisément, à toute collection homologiquement nulle $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, on associe un polygone P_Γ dans \mathbb{R}^2 à sommets entiers

5.2.2 Théorème ([Deh15a]). *Soit Γ_1, Γ_2 deux familles finies homologiquement nulles d'orbites périodiques du flot géodésique sur $T^1\mathbb{T}^2$. Alors l'enlacement $\text{Enl}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ vaut $-2\text{VolMix}(P_{\Gamma_1}, P_{\Gamma_2})$.*

Ici VolMix désigne le volume mixte de deux polygones de \mathbb{R}^2 . Autrement dit, si on note $+$ la somme de Minkowski de deux polygones, on a $\text{Enl}(\Gamma_1, \Gamma_2) = -\text{Aire}(P_{\Gamma_1} + P_{\Gamma_2}) + \text{Aire}(P_{\Gamma_1}) + \text{Aire}(P_{\Gamma_2})$. Cet enlacement est donc toujours négatif, sauf si les deux collections sont formées d'orbites toutes parallèles (et dont les orientations sont alors opposées). Quand on passe au quotient, on voit donc que l'enlacement entre collections d'orbites périodiques est strictement négatif dans le cas d'un quotient triangulaire du tore, et négatif ou nul dans le cas d'un quotient rectangulaire.

Reste le cas de la courbure négative constante. Là le fibré unitaire tangent est toujours une sphère d'homologie rationnelle, de la forme $T^1\mathbb{H}^2/G$ pour G un groupe fuchsien. On a montré le résultat suivant [Deh17] :

5.2.3 Théorème (Dehornoy 2017). *Soit $\mathcal{O}_{0;k_1,\dots,k_s}$ une sphère orbifoldique hyperbolique (avec donc $s \geq 3$). Alors le flot géodésique sur $T^1\mathcal{O}_{0;k_1,\dots,k_s}$ est lévogyre si, et seulement si, on a $s = 3$.*

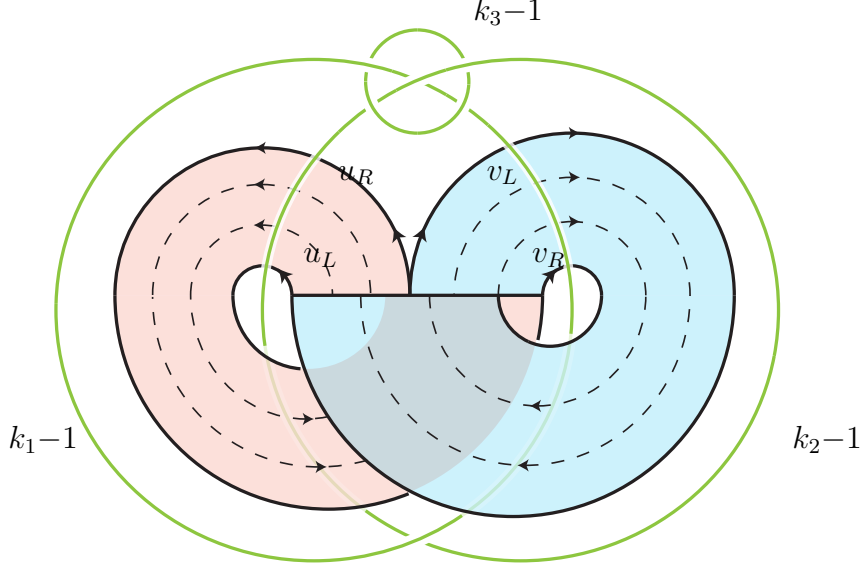
En résumé le flot géodésique sur une orbifold à courbure constante est lévogyre si, et seulement si, l'orbifold n'a que 2 ou 3 points coniques.

On souhaiterait une preuve directe de ce résultat, mais malheureusement, la preuve dépend des trois cas. Dans les cas sphériques et euclidiens, il n'y a qu'un nombre fini des flots à considérer, qui sont des quotients des flots géodésiques sur $T^1\mathbb{S}^2$ et $T^1\mathbb{T}^2$. Dans le premier cas, le flot sur le revêtement fini est lui-même lévogyre. Dans le second cas, on peut appliquer le théorème 5.2.2 pour voir que les enlacements sont strictement négatifs dans un quotient triangulaire.

La preuve dans le cas hyperbolique est bien plus compliquée. Elle consiste à d'abord obtenir un bon codage pour les orbites périodiques du flot géodésique sur les surfaces orbifolds hyperboliques triangulaires. C'est fait à l'aide d'un **patron**, à savoir une surface branchée plongée dans $T^1\mathcal{O}_{0;k_1,k_2,k_3}$, munie d'un semi-flot dont les orbites sont isotopes aux orbites du flot géodésique. Un patron est un avatar d'une partition de Markov finie, et il s'agit d'en choisir un le plus simple possible. Celui que nous construisons avec Tali Pinsky n'a que deux *bandes*, il ressemble donc au patron de Lorenz, et est particulièrement simple [DP18].

D'abord la variété $T^1\mathcal{O}_{k_1,k_2,k_3}$ s'obtient par chirurgies d'indices $k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1$ sur l'entrelacs de Hopf à trois composantes dans \mathbb{S}^3 . Cela permet de faire des dessins dans le complémentaire d'un entrelacs de Hopf dans \mathbb{S}^3 .

5.2.4 Définition. Soit $\mathcal{T}_{k_1,k_2,k_3}$ le patron de type Lorenz, qui est décrit par les codes ci-dessous des orbites extrémales u_L, u_R, v_L, v_R et son plongement dans $T^1\mathcal{O}_{k_1,k_2,k_3}$ et qui est plongé comme indiqué sur la figure :



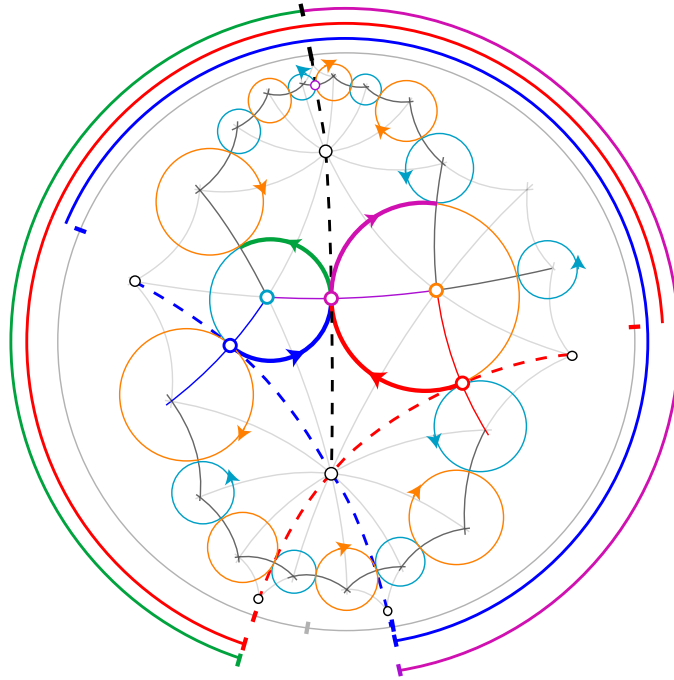
	u_L	v_R
$p, q, r > 2$		
r impair	$((a^{p-1}b)^{\frac{r-3}{2}} a^{p-1} b^2)^\infty$	$((b^{q-1}a)^{\frac{r-3}{2}} b^{q-1} a^2)^\infty$
r pair	$((a^{p-1}b)^{\frac{r-2}{2}} a^{p-2} (ba^{p-1})^{\frac{r-2}{2}} b^2)^\infty$	$((b^{q-1}a)^{\frac{r-2}{2}} b^{q-2} (ab^{q-1})^{\frac{r-2}{2}} a^2)^\infty$
$p = 2, q > 2, r > 4$		
r impair	$((ab)^{\frac{r-3}{2}} ab^2)^\infty$	$b^{q-1} ((ab^{q-1})^{\frac{r-5}{2}} ab^{q-2})^\infty$
r pair	$((ab)^{\frac{r-4}{2}} ab^2)^\infty$	$b^{q-1} ((ab^{q-1})^{\frac{r-4}{2}} ab^{q-2})^\infty$

$$v_L := bu_L,$$

$$u_R := av_R$$

5.2.5 Théorème (Dehornoy-Pinsky 2018). *Soit k_1, k_2, k_3 tels que $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1$. Alors à deux exceptions près, il y a une bijection entre orbites périodiques du flot géodésiques sur $\mathbb{T}^1\mathcal{O}_{k_1, k_2, k_3}$ et orbites périodiques du flot sur le patron $\mathcal{T}_{k_1, k_2, k_3}$, telle que la restriction à tout entrelacs fini est une isotopie.*

La preuve de ce résultat consiste à travailler dans \mathbb{H}^2 de façon G_{k_1, k_2, k_3} -équivariante, et à y déplacer toutes les géodésiques sur un graphe qui ressemble à un système de roues dentées. En relevant ces déformations dans $\mathbb{T}^1\mathcal{O}_{k_1, k_2, k_3}$, on obtient les isotopies. Les deux bandes du patron $\mathcal{T}_{k_1, k_2, k_3}$ correspondent alors aux relevés des deux types de roues dentées.



Les expressions pour les orbites extrémales s'obtiennent en décrivant précisément la suite des virages à droite et à gauche possibles pour les images des géodésiques après déformation.

Pour la preuve du théorème 5.2.3 sur le caractère lévogyre du flot géodésique, il s'agit alors d'estimer les enlacements entre orbites périodiques du patron $\mathcal{T}_{k_1, k_2, k_3}$. C'est un calcul assez délicat qui est fait dans [Deh17]. En particulier il est important d'avoir les formules précises pour les suites extrémales u_L et v_R , car ajouter quelques orbites au patron retire le caractère lévogyre du flot. On n'en dira pas plus, car le calcul est ensuite assez pénible.

Chapitre 6

Un invariant asymptotique et demi : le tronc et le genre [DR17, DR19]

Cette partie est consacrée à une utilisation un peu différente des surfaces pour l'étude des flots, puisqu'on considère des surfaces qui ne coupent pas nécessairement toutes les orbites du flot. On y présente deux invariants asymptotiques. En fait, pas tout à fait : le tronc est bien un invariant asymptotique, mais le genre ne l'est que dans certains cas (les flots dextro- et lévogyres), et alors il est proportionnel à l'hélicité.

6.1 Invariants asymptotiques

Le problème auquel on s'intéresse est celui de construire des invariants de variétés et de champs de vecteurs à homéo- ou difféomorphisme près. Les exemples de tels invariants ne sont pas si nombreux.

Il y a des invariants évidents : en premier le nombre et la nature des points fixes. Certains flots n'en ont pas. On peut alors s'intéresser aux orbites périodiques, à leurs périodes, et à leurs propriétés topologiques. Encore une fois un flot peut ne pas avoir d'orbites périodiques.

Surtout, les points fixes et les orbites périodiques sont des invariants locaux (cela dit, leur nombre, ou leur taux de croissance ne l'est pas), et on cherche plutôt à construire des invariants globaux. En dynamique il est fréquent de s'intéresser aux mesures invariantes, et la plupart des flots portent en eux des mesures plus significatives (mesures physiques ou SRB par exemple). Il est alors naturel de chercher des invariants associés aux mesures invariantes.

L'entropie métrique (aussi appelée mesurée) est le candidat le plus naturel. Remarquons que c'est un invariant de nature ergodique, et elle ne capture pas forcément les propriétés topologiques (au sens de la topologie de petite dimension). L'enjeu est donc de construire des invariants associés à des mesures invariantes quelconques et capturant des propriétés topologiques.

Le premier exemple de tel invariant est l'**hélicité**. Elle a été introduite par Moreau et Woltjer [Mor61, Wol58] pour les mesures qui sont des volumes : pour g une métrique riemannienne auxiliaire, on note $\text{rot}_g(X)$ le rotationnel. Si M est une sphère

d'homologie, alors pour tout X il existe Y tel que $\text{rot}_g(Y) = X$. Un tel Y n'est unique qu'à ajout d'un champ gradient près. Par contre la quantité $\text{Hel}_\mu(X) := \int_M Y \cdot X \, d\mu$ ne dépend pas du choix de Y . Mieux, elle est invariante si on conjugue (X, μ) par un difféomorphisme.

La nature topologique a été exhibée par Moffatt, qui montre que si la mesure est concentrée dans un tube invariant, alors l'hélicité est égale au produit du flux du tube par l'auto-enlacement de celui-ci [Mof69]. Cette observation a été généralisée par Arnold, complétée par Vogel, qui montrent [Arn86, Vog02] que pour un flot quelconque et une mesure invariante quelconque, l'hélicité coïncide avec un *enlacement asymptotique* au sens suivant :

6.1.1 Théorème (Arnold-Vogel). *Soit X un champ de vecteurs et μ une mesure de volume ergodique. Alors pour μ -presque tous points p, q , la limite lorsque $t \rightarrow \infty$ de $\frac{1}{t^2} \text{Enl}(k_X(p, t), k_X(q, t))$ existe et vaut $\text{Hel}_\mu(X)$.*

La définition suivante est alors naturelle

6.1.2 Définition. Soit I un invariant d'entrelacs à n composantes. On dit que I est un **invariant asymptotique d'ordre** (m, m, \dots, m) si pour tout champ de vecteurs X et pour toute mesure invariante ergodique qui est un volume, la limite

$$\lim_{t_1, \dots, t_n \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{mn}} I(k_X(p_1, t_1), \dots, k_X(p_n, t_n))$$

existe pour μ -presque tous p_1, \dots, p_n . La limite est alors notée $I_\mu(X)$.

En ce sens, l'enlacement est un invariant asymptotique d'ordre $(1, 1)$. De plus sa limite coïncide avec l'hélicité.

D'autres invariants ont ensuite été étudiés sous le même angle.

Friedmann-He se sont intéressés au nombre minimal de croisements, mais ce n'est pas exactement un invariant asymptotique au sens précédent. Gambaudo et Ghys montrent que les ω -signatures sont des invariants asymptotiques d'ordre 2 [GG01]. Baader et Marché montrent que tout invariant de Vassiliev d'ordre n est un invariant asymptotique d'ordre $2n$ [BM12].

Les résultats de Gambaudo-Ghys et Marché-Baader ont un aspect décevant puisqu'ils montrent que les invariants obtenus sont en fait tous proportionnels à l'hélicité, de sorte qu'ils ne construisent aucun nouvel invariant de champ de vecteurs.

Cet aspect négatif est partiellement expliqué par les résultats de Kudryavtseva d'une part [Kud] et de Ensisco, Peralta Sala et Torres de Lizaur d'autre part [EPSTdL16]. Ils montrent, sous des hypothèses différentes, que tout invariant de champs de vecteurs qui est assez régulier (C^1 au sens de Fréchet) est nécessairement une fonction de l'hélicité.

Ainsi, tout nouvel invariant ne peut être que peu régulier.

6.2 Le tronc d'un champ de vecteurs

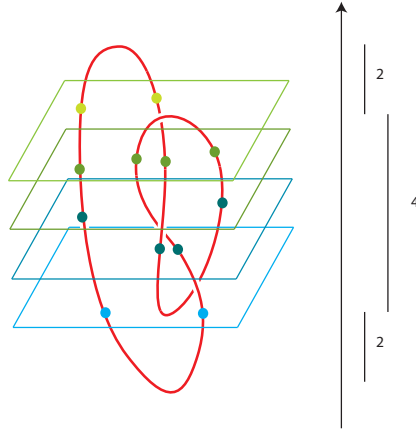
Avec Ana Rechtman, nous exhibons un nouvel invariant qui n'est pas proportionnel à l'hélicité. Le tronc d'un nœud est un cousin d'invariants classiques tels le

nombre de ponts ou l'indice de tresse. Rappelons qu'un nœud est en général défini comme une classe d'isotopie de courbes plongées dans \mathbb{R}^3 . On note h la fonction hauteur de \mathbb{R}^3 , ses niveaux sont donc les plans horizontaux.

6.2.1 Définition. Soit c une courbe dans \mathbb{R}^3 , le tronc de c est le nombre maximal de points d'intersection entre c et un plan horizontal : $\text{tr}(c) := \max_{z \in \mathbb{R}} \text{card}(\{c \cap h^{-1}(z)\})$.

Soit K un nœud, le **tronc** de K est le minimum sur toutes les courbes c dans la classe d'isotopie K des tronc de c , soit

$$\text{Tr}(K) := \min_{c \in K} \text{tr}(c) = \min_{c \in K} \max_{z \in \mathbb{R}} \text{card}(\{c \cap h^{-1}(z)\}).$$



Le résultat principal obtenu avec Ana Rechtman [DR17] est alors

6.2.2 Théorème (Dehornoy-Rechtman 2017). *Le tronc est un invariant asymptotique d'ordre 1, qui varie continûment avec le champ de vecteurs. De plus sa limite n'est pas une fonction de l'hélicité.*

La preuve consiste à en fait directement définir un invariant de champ de vecteurs en copiant 6.2.1. Pour cela on inverse le point de vue, en fixant le plongement, mais en changeant la fonction hauteur. On note alors \mathcal{H} l'ensemble des fonctions hauteur sur \mathbb{S}^3 . Le tronc d'un nœud est alors égal à $\text{Tr}(K) = \min_{h \in \mathcal{H}} \max_{z \in \mathbb{R}} \text{card}(\{c \cap h^{-1}(z)\})$. C'est cette définition qu'on imite pour un champ de vecteurs préservant un volume μ :

$$\text{Tr}_\infty(X, \mu) := \min_{h \in \mathcal{H}} \max_{z \in \mathbb{R}} \text{Flux}(X, \mu, h^{-1}(z)).$$

Ici $\text{Flux}(X, \mu, S)$ désigne le flux total de (X, μ) à travers une surface S (l'analogie de l'intersection géométrique).

Il reste alors à montrer que le tronc d'orbites quasi-périodiques de X tendant faiblement vers μ tend, une fois renormalisé, effectivement vers $\text{Tr}_\infty(X, \mu)$, mais c'est bien le cas.

Quant à voir pourquoi le tronc d'un champ n'est pas proportionnel à l'hélicité, il suffit de calculer quelques exemples. Les flots de Seifert suffisent dans ce cas, car le tronc d'un nœud torique de type $T(p, q)$ vaut $\min(p, q)$, tandis que l'hélicité (c'est-à-dire l'enlacement, ou encore le terme dominant pour les invariants de Vassiliev d'ordre 2) est proportionnelle à pq .

6.3 Le genre d'un champ de vecteurs dextrogyre

Le théorème 3.3.5 sur le contrôle du genre de sections de Birkhoff permet, pour les flots dextrogyres ou lévogyres, de définir un autre invariant asymptotique d'ordre 2 : le genre.

6.3.1 Théorème (Dehornoy-Rechtman 2019). *Soit M une variété de dimension 3 qui est une sphère d'homologie rationnelle, soit X un champ de vecteur non-singulier sur M qui est dextrogyre ou lévogyre, et soit μ une mesure X -invariante qui ne charge aucune orbite périodique. Si $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'orbites périodiques dont les périodes $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers l'infini et telle que $\frac{1}{t_n}(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers μ , alors la suite $(\frac{1}{t_n}g(\gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers la moitié de l'hélicité de (X, μ) .*

L'idée de la preuve est que, pour les flots dextrogyres ou lévogyres, le genre d'une orbite périodique est le genre d'une section de Birkhoff bordée par cette orbite. Le théorème 3.3.5 l'exprime alors comme un auto-enlacement. L'asymptotique de cet auto-enlacement n'est pas directement donnée par l'auto-enlacement des mesures invariantes tel que défini par Arnold et Vogel, car le *framing* n'est pas le même. En effet, pour le théorème 3.3.5 le framing est celui donné par un champ ζ transverse à X , tandis que pour Arnold et Vogel, le framing est celui donné par la différentielle du flot de X . Ces deux framings ne coïncident en général pas (par exemple pour le flot de Hopf, l'auto-enlacement des orbites périodiques est de +1 et -1 respectivement). Mais leur différence est donnée par ce qui s'appelle l'invariant de Ruelle. Comme celui-ci a un comportement asymptotique bien compris [GG97], en fait linéaire, les deux auto-enlacements considérés sont asymptotiques l'un à l'autre, et donc le genre est asymptotiquement la moitié de l'auto-enlacement d'Arnold et Vogel.

Chapitre 7

Perspectives

Dans ce dernier chapitre, on présente un certain nombre de perspectives de recherche. Certaines sont des pistes sérieuses, d'autres d'hasardeuses spéculations. Nous allons des questions les plus spécifiques et les plus proches de ce que nous avons étudié vers les questions les plus générales.

7.1 Sur les sections de Birkhoff pour les flots d'Anosov algébriques

Nos théorèmes permettent de comprendre que les flots géodésiques sur les surfaces hyperboliques admettent de nombreuses sections de Birkhoff. En particulier, à flot géodésique fixé, tout automorphisme linéaire préservant l'orientation de \mathbb{T}^2 apparaît comme application de premier retour pour une certaine section de Birkhoff. On peut alors chercher à trouver la section de Birkhoff la plus simple : elle doit être de genre minimal, mais parmi celles-ci, ce peut être celle qui a le moins de composantes de bord (et donc celle qui minimise la caractéristique d'Euler), ou peut-être un panachage entre le nombre de composantes de bord et la trace du premier retour (une section à 5 composantes de bord et de trace 12 pour le premier retour est-elle meilleure ou moins bonne qu'une section à 142 composantes de bord et de trace 3?).

7.1.1 Question. Définir une complexité pour les sections de Birkhoff qui tienne compte du genre, du nombre de composantes de bord, et du nombre de points fixes du premier retour. L'étudier pour les exemples algébriques.

Dans une autre direction, concernant les sections de Birkhoff à bord antithétique, nous avons deux théorèmes un peu orthogonaux : d'une part nous classifions les surfaces de Birkhoff à bord antithétique à l'aide des points entiers dans la boule-unité duale de la norme d'intersection associée (théorème 3.4.3 [CD16]), et d'autre part nous comprenons de façon satisfaisante les monodromies associées au centre de cette boule (théorème 4.2.1 [DL19]).

7.1.2 Question. Étudier les monodromies des surfaces associées aux autres points entiers de la boule-unité duale de la norme d'intersection. Trouver une expression

simple en termes de twists ou d'antitwists, et étudier les facteurs d'expansion associés.

Cette question constitue en fait le sujet de thèse de Théo Marty, qui a déjà décomposé ces monodromies comme produit de twists de Dehn explicites.

Enfin, une troisième direction se profile : pour les flots géodésiques on n'a bien compris que les sections de Birkhoff à bord antithétique. De plus, pour le flot géodésique sur le tore plat, on a aussi une classification par les points entiers dans un polygone explicite. Peut-on fusionner ces deux énoncés dans un théorème général ?

7.1.3 Question. Étant donné une multi-courbe orientée γ qui soit homologiquement nulle sur une surface hyperbolique, peut-on associer (algorithmiquement) à γ un polytope dont les points entiers correspondent aux sections de Birkhoff de ϕ_{geod} de bord $\vec{\gamma}$?

7.2 Sur les sections de Birkhoff pour les flots d'Anosov

Si on s'intéresse aux flots d'Anosov généraux, on ne sait que peu de choses. Néanmoins si on a une section de Birkhoff, alors l'application de premier retour est un homéomorphisme pseudo-Anosov. Or ceux-ci sont transitifs, donc le flot dont on est parti doit l'être. Ainsi les flots non transitifs n'ont pas de section de Birkhoff.

Concernant les flots d'Anosov transitifs généraux, Fried a démontré l'existence de sections de Birkhoff, mais sans contrôle du genre.

7.2.1 Question (Fried 1983). Tout flot d'Anosov transitif admet-il une section de Birkhoff de genre 1 ?

L'abondance des sections de genre 1 dans les cas algébriques incite à penser que la réponse est positive, mais pour le moment la question est ouverte.

Nous avons commencé à travailler sur cette question. La stratégie est la suivante : partir d'une section de Birkhoff quelconque, et en construire une qui soit plus simple, c'est-à-dire soit de genre inférieur, soit contenant moins de points fixes.

Si la somme de Fried s'est révélée cruciale, et suffisante, pour jouer dans le cas des flots géodésiques hyperboliques, il nous semble que pour ce cas général, il faille aussi s'intéresser à la **différence de Fried**. Cette notion nouvelle, et pour le moment peu connue, semble plus prometteuse pour décroître le genre. Il s'agit de remarquer que si S est une section de Birkhoff, si S' est une surface de Birkhoff, et si toute orbite du flot coupe S' strictement moins que S , alors dans la classe $[S - S']$ il existe une section de Birkhoff. Son genre peut être calculé, et parfois, il est inférieur à celui de S . Ainsi, dans un certain nombre de cas, en partant d'un flot qui a une section de genre 2, on a pu en trouver une autre de genre 1.

Pour le moment, nous avons une tricotomie : soit l'application de premier retour a beaucoup de points fixes, et nous trouvons un pantalon à lui ajouter qui diminue le nombre de points fixes, soit il n'y a aucun point fixe (en dehors des singularités),

et nous trouvons aussi un pantalon à retirer de sorte que le genre diminue, soit nous sommes entre les deux avec quelques points fixes mais pas trop, et nous ne savons pas quoi faire.

7.3 Sur les sections de Birkhoff générales

On a présenté ici les sections de Birkhoff, en expliquant qu'il s'agit d'objets qui apparaissent assez facilement. C'est le cas pour les flots que nous avons étudié, à savoir les flots d'Anosov transitifs. Mais pour des classes plus larges, ce n'est pas aussi évident.

Ainsi, comme nous l'avons mentionné, on peut faire des flots sans sections de Birkhoff : par exemple un flot sans orbite périodique sur \mathbb{S}^3 . Les questions générales suivantes, pas forcément difficiles, méritent d'être étudiées.

7.3.1 Question. Tout flot peut-il être approché par un flot admettant des sections de Birkhoff? L'ensemble des flots admettant des sections de Birkhoff est-il dense pour la topologie C^0 ? C^1 ?

Si on restreint quand même un peu les flots auxquels on s'intéresse, on peut poser des questions intéressantes :

7.3.2 Question. Tout flot de Reeb admet-il une section de Birkhoff?

Différents résultats partiels ont été récemment démontrés. C'est un projet en cours avec Vincent Colin et Ana Rechtman de répondre à cette question pour des flots de Reeb génériques.

Dans une autre direction, la restriction du problème des trois corps (restreint !) à des niveaux d'énergie fournit des exemples de flots tridimensionnels très intéressants. On sait que pour les niveaux d'énergie les plus bas, le flot admet des sections de Birkhoff qui sont des disques ou des anneaux.

7.3.3 Question. Pour quelles énergies le problème des trois corps restreint admet-il des sections de Birkhoff?

7.4 Sur les surfaces de Birkhoff et la différence de Fried

Comme nous l'avons mentionné, pour un flot donné et les surfaces de Birkhoff correspondantes, la somme et la différence de Fried sont deux opérations naturelles qui prennent deux surfaces de Birkhoff et en associent une troisième. Elles munissent l'ensemble des surfaces de Birkhoff d'une structure de cône linéaire. Si le flot admet une infinité d'orbites périodiques, ce cône a toutes les chances d'être de dimension infinie.

Le théorème démontré avec Mario Shannon est intéressant dans ce contexte : partant de la suspension d'un automorphisme A de \mathbb{T}^2 , on peut trouver une section

de Birkhoff dont le premier retour est RA , puis dans cette suspension une section de premier retour R^2A , etc. À chaque fois la nouvelle section est obtenue par différence de Fried de la précédente et d'un pantalon. Ainsi il existe pour cet ordre des suites infinies strictement décroissantes. C'est surprenant pour un ordre dont on pourrait conjecturer qu'il est bon.

7.4.1 Question. Comprendre cet **ordre de Fried** sur les surfaces/sections de Birkhoff pour un flot donné.

7.5 Sur les flots lévogyres

La notion de section de Birkhoff a reçu un regain d'intérêt grâce aux travaux de Ghys sur les flots lévogyres, un renforcement extrême de l'existence de sections de Birkhoff. Néanmoins ceux-ci semblent abondants, et de nombreux candidats existent.

7.5.1 Question. Pour quelles énergies le problème des trois corps restreint est-il lévogyres ?

Il s'agissait du sujet de la thèse de Marie Lhuissier [Lhu18]. Elle a présenté des indices numériques selon lesquels les flots de faible énergie semblent lévogyres.

On a vu que si on s'intéresse aux flots géodésiques sur des orbifolds hyperboliques, on sait exactement lesquels sont lévogyres. Si la courbure est positive, on sait que pour la métrique ronde ou celle d'un ellipsoïde, le flot est aussi lévogyre. Il y a des raisons de penser que c'est le cas dès que la courbure est positive :

7.5.2 Question. Si S^2 est une sphère riemannienne à courbure positive, le flot géodésique est-il lévogyre ?

Une dernière question nous semble particulièrement intéressante sur ce sujet : la motivation initiale pour introduire la notion de flot lévo- ou dextrogyre était d'expliquer le caractère fibré des nœuds de Lorenz, c'est-à-dire des orbites périodiques du flot géométrique de Lorenz. Si le flot est non-singulier, la forme du patron impliquerait que toutes les mesures invariantes s'enlacent positivement, et cela démontrerait le résultat. Mais le champ de Lorenz a trois points fixes, et donc trois mesures ergodiques invariantes qui ont enlacement nulle avec les autres. Le théorème de Ghys ne peut s'appliquer ici.

7.5.3 Question. Adapter aux flots singuliers les notions de cycles asymptotiques, de dextrogyrité, et adapter la théorie de Schwartzman-etc, afin de démontrer que les nœuds de Lorenz sont bien fibrés.

7.6 Sur les invariants asymptotiques

La recherche et la compréhension d'invariants de flots à homéomorphisme/difféomorphisme près est un sujet à la fois naturel, riche, et balbutiant. Comme on l'a dit, on connaît bien un invariant, l'hélicité, et on retombe souvent dessus.

Les exemples du *crossing number asymptotique* de Friedman et He et du tronc asymptotique que nous avons introduit avec Ana Rechtman montrent néanmoins que de tels invariants existent et qu'on peut les trouver. Le genre étant un des invariants de nœuds les plus simples à définir, il est naturel de s'y intéresser. Il y a deux raisons supplémentaires : d'une part nous avons montré que pour les flots lévogyres il y a un genre asymptotique (mais il est dans ce cas proportionnel à l'hélicité), d'autre part des simulations numériques avec le flot de Ghrist suggère un comportement asymptotique non proportionnel à l'hélicité.

7.6.1 Question. Le genre est-il un invariant asymptotique d'ordre 2 pour les champs de vecteurs dans une variété de dimension 3 ?

Nos essais se sont pour le moment révélés infructueux, mais on peut espérer qu'une approche à la Sullivan marche : on définirait un genre pour n'importe quel 2-courant (dans une certaine classe), de sorte qu'on puisse définir le genre d'un 1-cycle feuilleté comme le genre minimal d'un 2-courant bordant. Ensuite il s'agirait de montrer que cette notion coïncide avec la limite du genre classique des orbites périodiques.

Si on revient au tronc que nous avons défini, il y a deux questions naturelles qui restent ouvertes. D'une part le tronc n'est pas un invariant isolé dans la famille des invariants de nœuds. On peut par exemple considérer le tronc arborescent où on remplace les fonctions hauteur par des fonctions à valeur dans un arbre, ou différents troncs selon la topologie qu'on autorise pour les niveaux. Pour chacun de ces troncs, la question de l'existence d'une asymptotique existe.

Enfin, l'hélicité est connue pour fournir une borne inférieure (topologique) à l'énergie d'un champ de vecteurs.

7.6.2 Question. Le tronc d'un champ de vecteurs donne-t-il une borne inférieure sur son énergie ?

Chapitre 8

Bibliographie

8.1 Articles présentés dans le manuscrit

- [DL19] DEHORNOY, Pierre, LIECHTI, Livio : Divide monodromies and antitwists on surfaces (2019). <http://arxiv.org/abs/1910.00851>
- [DR19] DEHORNOY, Pierre, RECHTMAN, Ana : Vector fields and genus in dimension 3 (2019). <http://arxiv.org/abs/1910.03450>
- [DS19] DEHORNOY, Pierre, SHANNON, Mario : Almost equivalence of algebraic Anosov flows (2019). <https://arxiv.org/abs/1910.08457>
- [DP18] DEHORNOY, Pierre, PINSKY, Tali : Coding of geodesics and Lorenz-like templates for some geodesic flows, *Ergod. Theory Dynam. Systems.* **38** (2018), 940–960. <https://doi.org/10.1017/etds.2016.59>
- [Deh17] DEHORNOY, Pierre : Which geodesic flows are left-handed?, *Groups Geom. Dyn.* **11** (2017), 1347–1376. <http://dx.doi.org/10.4171/GGD/431>
- [DR17] DEHORNOY, Pierre, RECHTMAN, Ana : Asymptotic trunk for volume-preserving vector fields, *Nonlinearity* **30** (2017), 4089–4110, <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6544/aa83a8>.
- [CD16] COSSARINI, Marcos, DEHORNOY, Pierre : Intersection norms on surfaces and Birkhoff cross sections (2016). <http://arxiv.org/abs/1604.06688>
- [Deh15] DEHORNOY, Pierre : Genus one Birkhoff sections for geodesic flows, *Ergod. Theory Dynam. Sys.* **35** (2015), 1795–1813, <http://dx.doi.org/10.1017/etds.2014.14>.
- [Deh13] DEHORNOY, Pierre : Almost commensurability of 3-dimensional Anosov flows, *C. R. Math.* **351** (2013), 127–129. <https://doi.org/10.1016/j.crma.2013.02.012>

8.2 Autres articles personnels

- [BDL18] BAADER, Sebastian, DEHORNOY, Pierre, LIECHTI, Livio : Signature of positive knots and concordance, *Bull. London Math. Soc.* **50** (2018), 166–173. <https://doi.org/10.1112/blms.12124>

- [BD16] BAADER, Sebastian, DEHORNOY, Pierre : Trefoil plumbing, *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 387–397. <https://doi.org/10.1090/proc/12561>
- [Deh15a] DEHORNOY, Pierre : Geodesic flows, left-handedness, and templates, *Algebr. Geom. Topol.* **15** (2015), 1525–1597. <https://projecteuclid.org/euclid.agt/1510840968>
- [Deh15b] DEHORNOY, Pierre : On the zeroes of the Alexander polynomial of a Lorenz knot, *Ann. Inst. Fourier.* **65** (2015), 509–548. <https://doi.org/10.5802/aif.2938>
- [Deh15c] DEHORNOY, Pierre : Asymptotic invariants of 3-dimensional vector fields, in *Winter Braids Lecture Notes 2 : Winter Braids V, Pau 2015*, Winter Braids Lecture Notes .
- [Deh13a] DEHORNOY, Pierre : Small dilatation homeomorphisms as monodromies of Lorenz knots, in *IML Workshop on Growth and Mahler Measures in Geometry and Topology*, Institut Mittag-Leffler Preprints Series (2013) pp. 1–9.
- [Deh12] DEHORNOY, Pierre : Enlacement entre géodésiques sur une orbifold, *C. R. Math.* **350** (2012), 77–80. <https://doi.org/10.1016/j.crma.2011.11.015>
- [Deh11a] DEHORNOY, Pierre : A billiard containing all links, *C. R. Math.* **329** (2011), 575–578. <https://doi.org/10.1016/j.crma.2011.04.003>
- [Deh11b] DEHORNOY, Pierre : Les nœuds de Lorenz, *Enseign. Math.* **57** (2011), 211–280. <https://doi.org/10.4171/LEM/57-3-1>
- [Deh08] DEHORNOY, Pierre : On the 3-distortion of a path, *Eur. J. Comb.* **29** (2008), 171–178. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.11.002>
- [Deh03] DEHORNOY, Pierre : Décompte des mouvements dans un tour de cavalier, *C. R. Math.* **336** (2003), 543–548. [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(03\)00121-3](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00121-3)

8.3 Autres références

- [A’C75] A’CAMPO, Norbert : Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I, *Math. Ann.* **213** (1975), 1–32, URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01883883>.
- [A’C98] A’CAMPO, Norbert : Generic immersions of curves, knots, monodromy and gordian number, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **88** (1998), 152–169, URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02701769>.
- [AK99] ARNOLD, Vladimir I., KHESIN, Boris A. : *Topological Methods in Hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences, (Springer New York 1999), ISBN 9780387949475, URL <https://books.google.fr/books?id=9Iwrt010nFMC>.
- [Ano67] ANOSOV, Dmitri V. : Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov Inst. Math.* **60** (1967), 1–235.

- [Arn86] ARNOL'D, Vladimir I. : The asymptotic Hopf invariant and its applications, *Sel. Math. Sov.* **5** (1986), 327–345.
- [Baa07] BAADER, Sebastian : Asymptotic Rasmussen invariant, *C. R. Acad. Sci. Paris* **345** (2007), 225–228.
- [Baa11] BAADER, Sebastian : Asymptotic concordance invariants for ergodic vector fields, *Comment. Math. Helv.* **86** (2011), 1–12.
- [Bir17] BIRKHOFF, George D. : Dynamical systems with two degrees of freedom, *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (1917), 199–300, URL <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.3.4.314>.
- [BL94] BONATTI, Christian, LANGEVIN, Rémi : Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension, *Ergod. Theory Dynam. Sys.* **14** (1994), 633–643.
- [BM12] BAADER, Sebastian, MARCHÉ, Julien : Asymptotic Vassiliev invariants for vector fields, *Bull. Soc. Math. France* **140** (2012), 569–582.
- [Bru94a] BRUNELLA, Marco : Expansive Flows on Three-Manifolds, Ph.D. thesis, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Italy (1994).
- [Bru94b] BRUNELLA, Marco : On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows, *Ann. Fac. Sc. Toulouse Math.* **3** (1994), 335–346, URL http://www.numdam.org/item/AFST_1994_6_3_3_335_0/.
- [BT82] BOTT, Raoul, TU, Loring : *Differential forms in algebraic topology*, *Grad. Texts Math.*, vol. 82, (Springer1982), 331 pp.
- [BW83] BIRMAN, Joan, WILLIAMS, Robert : Knotted periodic orbits in dynamical systems I : Lorenz system, *Topology* **22** (1983), 47–82.
- [EPSTdL16] ENCISO, Alberto, PERALTA-SALAS, Daniel, TORRES DE LIZAU, Francisco : Helicity is the only integral invariant of volume-preserving transformations (2016), URL <https://arxiv.org/abs/1602.04745>.
- [FLP79] FATHI, Albert, LAUDENBACH, François, POENARU, Valentin : *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Astérisque*, vol. 66-67 (1979).
- [Fri79] FRIED, David : *Fibrations over S^1 with pseudo-Anosov monodromy*, *Exposé 14*, *Astérisque*, vol. 66-67 (1979).
- [Fri82] FRIED, David : The geometry of cross sections to flows, *Topology* **21** (1982), 353–371.
- [Fri83] FRIED, David : Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology* **22** (1983), 299–303, URL [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(83\)90015-0](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(83)90015-0).
- [Fri87] FRIED, David : Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, *Ann. Inst. Fourier* **37** (1987), 59–76, URL <http://dx.doi.org/10.5802/aif.1111>.
- [Ful65] FULLER, Francis B. : On the surfaces of section and periodic trajectories, *Am. J. Math.* **87** (1965), 473–480.
- [GG97] GAMBAUDO, Jean-Marc, GHYS, Étienne : Enlacements asymptotiques, *Topology* **36** (1997), 1355–1379.

- [GG01] GAMBAUDO, Jean-Marc, GHYS, Étienne : Signature asymptotique d'un champ de vecteurs en dimension 3, *Duke Math. J.* **106** (2001), 41–79.
- [Ghy09] GHYS, Étienne : Right-handed vector fields and the Lorenz attractor, *Japan. J. Math.* **4** (2009), 47–61.
- [Goo83] GOODMAN, Sue : *Dehn surgery on Anosov flows*, *Lect. Notes Math.*, vol. 1007, (Springer, Berlin, Heidelberg1983), URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0061421>.
- [Gro00] GROMOV, Mikhaïl : Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group, *preprint SUNY (1976)*, reprinted in *Enseign. Math.* **46** (2000).
- [Has90] HASHIGUCHI, Norikazu : On the Anosov diffeomorphisms corresponding to geodesic flow on negatively curved closed surfaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **37** (1990), 485–494.
- [HM17] HASHIGUCHI, Norikazu, MINAKAWA, Hiroyuki : Genus One Birkhoff Sections for the Geodesic Flows of Hyperbolic 2-Orbifolds, in *Geometry, Dynamics, and Foliations 2013, in honor of Steven Hurder and Takashi Tsuboi on the occasion of their 60th birthdays*, (eds. Taro Aduke, Shigenori Matsumoto, Yoshihiko Mitsumatsui), (Adv. Stud. Pure Math. 72, Math. Soc. Japan 2017) pp. 367–386, URL <http://dx.doi.org/10.2969/asp/07210367>.
- [HS85] HASS, Joel, SCOTT, Peter : Intersections of curves on surfaces, *Israel J. Math.* **51** (1985), 90–120, URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02772960>.
- [Ish04] ISHIKAWA, Masaharu : Tangent circle bundles admit positive open book decompositions along arbitrary links, *Topology* **43** (2004), 215–232, URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0040-9383\(03\)00040-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0040-9383(03)00040-5).
- [KK96] KUPERBERG, Greg, KUPERBERG, Kristina : Generalized counterexamples to the Seifert conjecture, *Ann. Math.* **144** (1996), 239–268.
- [KKN06] KAMATANI, Ghigeyuki, KODAMA, Hiroki, NODA, Takeo : A Birkhoff section for the Bonatti-Langevin example of Anosov flow, in *Foliations 2005*, (eds. Pawel Walczak, Rémi Langevin, Steven Hurder, Takashi Tsuboi), (World Scientific 2006), ISBN 981-270-074-9 pp. 229–243, URL http://dx.doi.org/10.1142/9789812772640_0012.
- [Kud] KUDRYAVTSEVA, Elena A : Helicity is the only invariant of incompressible flows whose derivative is continuous in C^1 -topology.
- [Kup94] KUPERBERG, Kristina : A smooth counterexample to the Seifert conjecture, *Ann. Math.* **140** (1994), 723–732.
- [Lhu18] LHUISSIER, Maris : Le problème mathématique des trois corps, abordé simultanément sous l'angle de la recherche théorique et celui de la diffusion auprès de publics variés, Ph.D. thesis, École Normale Supérieure de Lyon, France (2018).

- [LT11] LANNEAU, Erwan, THIFFEAULT, Jean-Luc : On the minimum dilatation of pseudo-Anosov diffeomorphisms on surfaces of small genera, *Ann. Inst. Fourier* **61** (2011), 105–144, URL <http://dx.doi.org/10.5802/aif.2599>.
- [Min13] MINAKAWA, Hiroyuki : Genus one Birkhoff sections for suspension Anosov flows, in *Geometry, Dynamics, and Foliations 2013, in honor of Steven Hurder and Takashi Tsuboi on the occasion of their 60th birthdays* (2013) URL <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/video/conference/2013GF/cf2013-038.html>.
- [Mof69] MOFFATT, Keith : The degree of knottedness of tangle vortex lines, *J. Fluid. Mech.* **106** (1969), 117–129.
- [Mor61] MOREAU, Jean-Jacques : Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope, *C. R. Acad. Sci. Paris* **252** (1961), 2810–2812.
- [Mos92] MOSHER, Lee : Dynamical systems and the homology norm of a 3-manifold II, *Invent. Math.* **107** (1992), 243–281.
- [Pen88] PENNER, Robert C. : A construction of pseudo-Anosov homeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 179–197, URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1988-0930079-9>.
- [Rat73] RATNER, Marina : Markov partitions for Anosov flows on n -dimensional manifolds, *Israel J. Math.* **15** (1973), 92–114.
- [RM] RODRÍGUEZ MIGUELES, José Andrés : On volumes of complements of periodic geodesics URL <https://arxiv.org/abs/1711.10757>, math/1711.10757.
- [San18] SANE, Abdoul Karim : Intersection norms and one-faced collections of curves (2018), URL <https://arxiv.org/abs/1809.03190>.
- [San19] SANE, Abdoul Karim : Curves on surfaces and surgeries (2019), URL <https://arxiv.org/abs/1902.06436>.
- [Sch57] SCHWARTZMAN, Sol : Asymptotic cycles, *Ann. Math.* **66** (1957), 270–284, URL <https://www.jstor.org/stable/1969999>.
- [Sch74] SCHWEITZER, Paul A. : Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Ann. Math.* **100** (1974), 386–400, URL <http://dx.doi.org/10.2307/1971077>.
- [Sul76] SULLIVAN, Dennis : Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976), 225–255.
- [Thu80] THURSTON, William : The topology and geometry of three-manifolds (1980), URL <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [Thu86] THURSTON, William : A norm for the homology of three-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **339** (1986), 99–130.
- [Thu89] THURSTON, William : On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1989), 417–431, URL <https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183554722>.

- [Tur02] TURAEV, Vladimiar : A norm for the cohomology of 2-complexes, *Alg. Geom. Top.* **2** (2002), 137–155.
- [Vog02] VOGEL, Thomas : On the asymptotic linking number, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2002), 2289–2297.
- [Wol58] WOLTJER, Lodewijk : A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **44** (1958), 489–491.