Devoir Maison I

Exercice 1. (Constructibilité de polygones réguliers)
Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$. On s'intéresse ici à la constructibilité à la règle et au compas du nombre ζ_n ou plus géométriquement à celle de l'angle $2\pi/n$ ou encore à celle du n-gone régulier.

1. Montrer que ζ_{2^k} est constructible pour tout $k \in \mathbf{N}$.
2. Soient m, $n \in \mathbf{N}$ premiers entre eux. Montrer que ζ_m et ζ_n sont constructibles si et seulement si ζ_{mn} l'est.
3. Un nombre premier *de Fermat* est un nombre premier p tel que $p-1$ est une puissance de 2. Montrer que tout nombre premier de Fermat est de la forme $2^{2^k}+1$. Exhiber les permiers nombres de Fermat.
4. Soit p un nombre premier impair. Montrer que si ζ_p est constructible, alors p est de Fermat.
5. Soit p un nombre premier de Fermat. Le but de cette question est de montrer la réciproque de la question précédente.
   (a) Soit n un entier premier avec p.
      i. Montrer qu'il existe un unique automorphisme $\mathbf{Q}$-linéaire du corps $\mathbf{Q}[\zeta_p]$ qui envoie ζ_p sur ζ_p^n. On note σ_n cet automorphisme.
      ii. Montrer que σ_n ne dépend que de la classe de congruence de n modulo p.
      iii. Montrer que l'ensemble des points fixes de σ_n dans $\mathbf{Q}[\zeta_p]$ forme un sous-corps de $\mathbf{Q}[\zeta_p]$.
   (b) Soit u un générateur du groupe cyclique $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Pour tout entier naturel m, on note $\tau_m = \sigma_{u^{2^m}}$ et K_m le sous-corps de $\mathbf{Q}[\zeta_p]$ formé des points fixes de τ_m.
      i. Montrer que $\mathrm{K}_0 = \mathbf{Q}$.
      ii. Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\tau_{m+1} = \tau_m \circ \tau_m$. En déduire que K_{m+1} est une extension de K_m de degré au plus 2.
      iii. Montrer que ζ_p est constructible.

   Il nous reste à étudier la constructibilité du nombre ζ_{p^i} où p est un nombre premier impair et $i \geq 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Rappelons que le n-ième polynôme cyclotomique est défini par
   $$\Phi_n(\mathrm{X}) = \prod_{k \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*} (\mathrm{X} - \zeta_n^k)$$
   et c'est un polynôme à coefficients entiers.
6. Dans cette question seulement on suppose connu le fait que les polynômes cyclotomiques Φ_n sont irrédctibles dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$. Montrer que le nombre ζ_{p^i} n'est pas constructible, où p est un nombre premier impair et $i \geq 2$.
7. Maintenant on se propose de montrer le même résultat sans rien admettre sur les polynômes cyclotomiques. Soit p un nombre premier impair.
   (a) Ecrire explicitement les polynômes Φ_p et Φ_{p^2}, et montrer que Φ_p est irréductible.

(b) Montrer que pour tout m, $n \in \mathbf{N}$, la constructibilité de ζ_{mn} entraîne celle de ζ_n. En déduire que la non-constructibilité de ζ_{p^2} entraîne celle de tous les ζ_{p^i}, $i \geq 2$.

(c) Montrer que le polynôme $\Phi_{p^2}(\mathrm{X}+1)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$ et conclure.

8. Trouver tous les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que ζ_n soit constructible.
9. Observer que $\zeta_5^2 + \zeta_5 + 1 + \zeta_5^{-1} + \zeta_5^{-2} = 0$. En déduire le polynôme minimal de $cos(\frac{2\pi}{5})$ sur $\mathbf{Q}$ et une méthode de construction du pentagone régulier à la règle et au compas.