Licence de Mathématiques — Université J. Fourier
Topologie, L31 — 2009-2010

Feuille d'exercices 8 : Applications linéaires continues

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)$ bornées, et F le sous espace vectoriel des suites u telles que $\sum |u_n|$ converge. Pour $u \in E$, on pose $||u||_\infty = \sup_n |u_n|$, et pour $u \in F$, on pose $||u||_1 = \sum |u_n|$. On fixe $a \in E$, et on considère l'application $f : E \to E$ qui envoie u sur $au = (a_n u_n)_n$.
1. Montrer que f est une application linéaire continue, et calculer sa norme.
2. Montrer que $f(F) \subset F$, et calculer la norme de la restriction $f_{|F}$ quand on prend la norme $|| \, ||_1$ sur F.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Pour tout f, $g \in E$, on note fg la fonction produit de f et g. On dit qu'une forme linéaire φ est multiplicative si $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ pour tout f et g de E. Pour $x_0 \in [0,1]$, on définit l'application $\delta_{x_0} : E \to \mathbb{R}$ par $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$.
1. Montrer que δ_{x_0} est une forme linéaire continue multiplicative.
2. Déterminer $|||\delta_{x_0}|||$.
3. Soit φ une forme linéaire non identiquement nulle, continue et multiplicative. Montrer que $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ ($\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1).
4. Montrer que si $f \in E$ est telle que $f^{-1}(0) = \emptyset$, alors $f \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ (*considérer l'inverse g de f défini par $g(x) = 1/f(x)$*).
5. Montrer que si $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est une partie finie de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $Z(F) := \cap_{f \in F} f^{-1}(0)$ est non vide (*considérer $g = f_1^2 + \ldots + f_n^2$*).
6. Par un argument de compacité, en déduire que $Z(\mathrm{Ker}(\varphi)) \neq \emptyset$.
7. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{R}\mathbf{1}$. En déduire que $\varphi = \delta_{x_0}$ pour un élément $x_0 \in Z(\mathrm{Ker}(\varphi))$.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et D l'endomorphisme de dérivation.
1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu. (*On pourra considérer la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$*).
2. Soit F le sous espace vectoriel des fonctions polynômiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ soit continu.

Exercice 4 Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Soit ψ une forme linéaire non nulle continue sur E. On note $H = \mathrm{Ker}(\psi)$.
1. Montrer que pour tout x, $y \in E \setminus H$, on a $d(x, H)| \leq \frac{|\psi(x)|}{|\psi(y)|} \cdot ||y||$ (*On pourra utiliser une décomposition en somme directe de E*).
2. En déduire que pour tout $x \in E$, $|\psi(x)| = |||\psi|||d(x, H)$.
3. On fixe $a \in E$ tel que $\psi(a) \neq 0$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) il existe $b \in H$ tel que $d(a, b) = d(a, H)$;
   (ii) il existe $x \neq 0$ tel que $|\psi(x)| = |||\psi||| \cdot ||x||$.
4. Montrer que ces conditions sont vérifiées lorsque E est de dimension finie.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On fixe $g \in E$, et on considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$.
1. Montrer que φ est une forme linéaire continue.

2. Déterminer la norme $|||\varphi|||$ lorsque g est une fonction positive, puis lorsque g est la fonction $x \mapsto x - 1/2$.
3. (*) Que vaut $|||\varphi|||$ pour une fonction $g \in E$ quelconque ?
4. On note e_n la fonction monôme $e_n(x) = x^n$ restreinte à $[0, 1]$, et on suppose que $\varphi(e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = E$.

En déduire que $g = 0$.

Exercice 6 On considère la suite de fonctions $f_n(t) = sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}),\ t \in [0, +\infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers la fonction nulle.
2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$?

   Que dit le théorème d'Ascoli?

Exercice 7 $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

est-il un espace de Hilbert ?

Exercice 8 Soit E un evn

Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.