Feuille d'exercices 6 (Complétude)

Exercice 1 Soit (E, d) un espace métrique.
1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de Cauchy de E. Montrer que la suite $(d(a_n, b_n))$ est convergente dans $\mathbb{R}$.
2. Soit (a_n) une suite de E telle que $\sum d(a_n, a_{n+1}) < \infty$. Montrer que (a_n) est de Cauchy.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par $||\sum a_k X^k|| = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N})$. On note $P_n = 1 + X + \cdots + \dfrac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice 3 Soit δ la distance sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Montrer que $(\mathbb{R}, \delta)$ n'est pas complet.

Exercice 4 Soit (f_n) une suite de $(C([0, 1], \mathbb{R}), ||\ ||_\infty)$ telle que $||f_{n+1} - f_n||_\infty < \varepsilon_n$, où $\sum_n \varepsilon_n < \infty$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 5 Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_n |x_n|^p < \infty\}$ est un espace vectoriel complet pour la norme $||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$. (Indication: utiliser l'inclusion $l^p \subset l^\infty$).

Exercice 6 Soit X l'espace des suites réelles et soit

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \text{pour } x, y \in X\ .$$

1. Montrer que X est complet pour la métrique ρ.
2. Soit Y l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Y est dense dans X. Y est-il complet ?
3. Y muni de la norme uniforme est-il complet ? On considère Y comme un sous-ensemble de l'ensemble des suites bornées muni de la norme uniforme. Quel est alors son adhérence ? Celle-ci définit-elle un espace complet ?

Exercice 7 Montrer que $(\mathbb{R}^2, d_2)$ n'est pas réunion de cercles disjoints non réduits à un point. (*Indication :* considérer les disques fermés associés à une telle famille de cercles, et mettre en évidence une suite de disques emboités dont les rayons tendent vers 0.)

Exercice 8 (Continuité uniforme) 1. Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont uniformément continues sur leur intervalle de définition : i) exp. ii) ln. iii) $\sqrt{\cdot}$. iv) $x \mapsto \frac{1}{x}$. v) $x \mapsto x^2$. vi) $x \mapsto \sin(x^2)$. vii) $x \mapsto x \sin(\ln(x))$.
2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (indication : utiliser le théorème de Heine).

Exercice 9 (Construction d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dérivable nulle part) Soit $\varphi(x) = |x|$ pour $-1 \leq x \leq 1$. On prolonge φ par périodicité sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x + 2) = \varphi(x)$. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

En utilisant la convergence normale, montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, f n'est pas dérivable en x.

Exercice 10 À l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. *Indication :* on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.

Exercice 11 (Une application du théorème de Baire: le théorème de la limite simple) Soit f une limite **simple** d'applications continues $f_n : (E,d) \to (F,\delta)$, où (E,d) est un espace métrique **complet**.

(i) Pour des entiers p, q, n, on note $E_{p,q,n} = \{x \in E \mid \delta(f_p(x), f_q(x)) \leq 1/n\}$, et $E_{p,n} = \bigcap_{q \geq p} E_{p,q,n}$. Montrer $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} E_{p,n}$.

(ii) Pour tout n, on pose $O_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{E}_{p,n}$. Montrer que O_n est un ouvert dense dans E.

(iii) On pose $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Montrer que f est continue en x, pour tout x dans G.

(iv) En déduire que f est continue sur une partie dense de E.

(v) Application: soit f une fontion réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f' est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$. (Considérer $f_n(x) = (f(x+1/n) - f(x))/n$).

Exercice 12 Trouver

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \, dx.$$

Exercice 13 (Théorème de Picard) Soit (E,d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ ayant une itérée f^p contractante. Montrer que

(i) f possède un point fixe et un seul a.

(ii) Pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Exercice 14 Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continue non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une unique $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)).$$

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $|| \; ||_\infty$ et $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, où

$$g(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) \, dt.$$

Montrer que T^2 est contractante. Utiliser 13 et conclure.

Exercice 15 Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $|| \; ||_\infty$. On définit pour toute f de E, $T(f)$ par

$$T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x u f(u) du \right) dx.$$

Montrer que T est contractante. En déduire que l'équation différentielle$f''(t) - tf(t) = 0$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 0$, la fonction nulle.

Exercice 16 (Complété d'un espace métrique) Soit (E,d) un espace métrique.

(i) On dit que deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

(ii) On note E^* l'ensemble des classes d'équivalence. On pose, si $A \in E^*$ est représenté par (a_n) et $B \in E^*$ par (b_n), (cf Ex 1)

$$\Delta(A, B) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$

Montrer que Δ définit une distance sur E^*.

(iii) Montrer que (E^*, Δ) est complet. *Indication:* utiliser un procédé diagonal.

(iv) Pour $a \in E$, on note A_a l'élément de E^* représenté par $(a_n) = (a)$. Montrer que $\varphi(a) = A_a$ définit une isométrie de (E, d) dans (E^*, Δ).

(v) Montrer que $\varphi(E)$ est dense dans E^*. On identifie E à $\varphi(E)$ et on appelle E^* le *complété* de E.

Exercice 17 (Entiers p-adiques) Soit p un nombre premier. On munit $\mathbb{Z}$ de la distance p-adique (cf. feuille 3):

$$d_p(x, y) = \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

où pour tout entier strictement positif n, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers, et on pose $v_p(-n) = v_p(n)$. On note

$$|x|_p = d_p(x, 0) = p^{-v_p(x)},\ x \neq 0, \quad |0|_p = 0, \tag{1}$$

la *valeur absolue p-adique.*

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de $(\mathbb{Z}, d_p)$, et $\mathcal{N} = \{(x_n) \in \mathcal{C} |\ \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\}$. L'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ induit une structure d'anneau sur $\mathcal{C}$. *L'anneau des entiers p-adiques* est le quotient

$$\mathbb{Z}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}.$$

1. Montrer que l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$ qui à x associe la classe de la suite constante (x) est une injection. Dans la suite, on identifie $\mathbb{Z}$ avec son image par cette application.

2. Montrer que pour tout $(x_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|x_n|_p \geq c$.

3. On rappelle que si $d_p(x, y) \neq d_p(y, z)$, alors $d_p(x, z) = \max(d_p(x, y), d_p(y, z))$ ("tous les triangles sont isocèles"). Déduire de la question 2 que pour tout $(x_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ la suite réelle $(|x_n|_p) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n|_p = |x_m|_p$ si m, $n \geq N$.

4. Soit λ, $\mu \in \mathbb{Z}_p$, et $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$ de classes λ, μ, respectivement. On pose

$$d_p(\lambda, \mu) = \lim_{n\to\infty} d_p(x_n, y_n). \tag{2}$$

Montrer que cette limite existe, qu'elle ne dépend pas du choix des suites (x_n) et (y_n) représentant λ et μ, et que si λ et μ sont les classes de suites constantes (x) et (y), alors $d_p((x), (y)) = d_p(x, y)$.

5. Montrer que d_p définit une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}_p$.

6. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dense dans $(\mathbb{Z}_p, d_p)$.

7. En déduire que :

(a) $(\mathbb{Z}_p, d_p)$ est complet (*indication : étant donné une suite de Cauchy* (λ^n) *de* $(\mathbb{Z}_p, d_p)$*, on pourra utiliser le résultat de la question 6 et un procédé diagonal pour construire une suite de Cauchy* λ *de* $(\mathbb{Z}, d_p)$ *telle que* $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda^n$);

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ et $n \geq 1$, il existe un unique $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq p^n - 1$, tel que $d_p(x, \lambda) \leq p^{-n}$.

8. En utilisant les résultats des questions 7a et 7b, montrer que :

(a) $\mathbb{Z}_p$ est compact;

(b) tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ est limite d'une unique suite (x_n) de $(\mathbb{Z}, d_p)$ telle que

$$0 \leq x_n \leq p^n - 1, \quad x_{n+1} \equiv x_n \bmod(p^n).$$

9. En déduire que tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente

$$\lambda = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n + \ldots$$

avec $0 \leq a_i \leq p - 1$.